

УДК 539.3

А. А. АБДРАХМАНОВА, В. П. ПАВЛОВ

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СТЕКЛОПЛАСТИКОВОГО СТЕРЖНЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ЖЕСТКОСТЯХ ОПОР

Предлагается методика расчета напряженного состояния стеклопластикового стержня при различных жесткостях опор в условиях одностороннего нагрева. Она включает вывод нелинейных дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях, способ их линеаризации, метод численного решения получающихся линейных дифференциальных уравнений. Произведена оценка точности методики на основе сопоставления полученных расчетных результатов с результатами прямых экспериментальных исследований стеклопластикового стержня, заземленного по концам при одностороннем высокотемпературном нагреве. Проведен анализ напряженного состояния стеклопластикового стержня при различных способах его крепления и выявлены способы закрепления стержня, при которых он обладает наибольшей прочностью. *Математическая модель расчета стержня; система нелинейных дифференциальных уравнений; метод сплайна 5-й степени; коэффициент опасности*

### ВВЕДЕНИЕ

В современных изделиях авиационной и космической техники широко применяются стеклопластики, обладающие рядом уникальных свойств: малым удельным весом, высокой удельной прочностью, малой теплопроводностью, высокой удельной теплоемкостью и др. Ряд стеклопластиковых элементов космических аппаратов работает при высоких температурах. Так, при посадке на Землю в момент входа в плотные слои атмосферы скорость космического спускаемого аппарата (КСА) равна  $7,9 \div 10$  км/с, и гашение этой скорости осуществляется за счет аэродинамического торможения в атмосфере. При этом наружная тепло-защитающая стеклопластиковая обшивка КСА при торможении снаружи нагревается до температуры достигающей в ряде случаев  $1000^\circ\text{C}$  и выше и в ней возникают значительные внутренние усилия, которые могут разрушить теплозащитную оболочку или узлы ее крепления к силовому корпусу КСА. В связи с этим для проектирования надежно работающей тепло-защитающей обшивки КСА необходимо иметь методику математического моделирования стеклопластиковых элементов конструкций в условиях высокотемпературного нагрева, соответствующего условиям реальной эксплуатации.

### 1. РАСЧЕТНАЯ СХЕМА ЗАДАЧИ

Для оценки работоспособности тепловой защиты КСА рассматривается выделенный из тепло-защитающей оболочки модельный элемент в виде прямоугольного стержня. Рассматривая такой стержень, можно изучить качество тепловой защиты КСА, оптимальным образом выбрать толщину тепло-защитающей оболочки и способы ее крепления.

Для расчета стержня из теплозащитного стеклопластика при одностороннем нагреве выбрана расчетная схема в виде прямоугольного стержня ВС длиной  $l$  и прямоугольным поперечным сечением  $b \times h$ , жестко связанного с двумя опорными стойками (рис. 1).

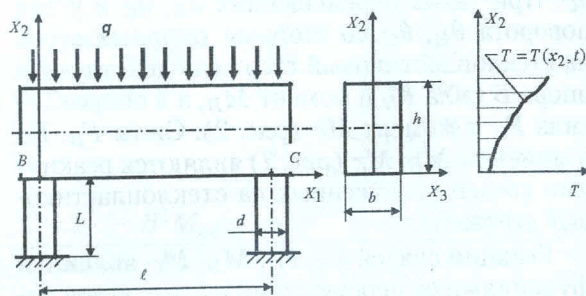


Рис. 1. Расчетная модель стеклопластикового стержня при одностороннем нагреве

Опорные стойки (см. рис. 1) являются прямыми стержнями длиной  $L$  с круглым поперечным сечением диаметра  $d$ , изготовлены

из изотропного упругого материала с модулем упругости  $E$ , их нижние концы жестко заземлены. На верхнюю поверхность стержня ВС воздействует тепловой поток интенсивностью  $q$ , в результате чего создается переменное во времени температурное поле  $T = T(x_2, t)$  (рис. 1).

При расчете напряженно-деформированного состояния стержня выбирается базовая линия, в качестве которой принята линия ВС (рис. 1), совмещенная с нижней «холодной» поверхностью стержня, и принимается справедливость гипотезы плоских нормальных сечений, при которой в процессе деформирования стержня плоское нормальное сечение остается всегда перпендикулярным к деформированной базовой линии. В такой постановке граничными условиями являются ограничения на перемещения точек закрепления  $B, C$  и углы поворота поперечных сечений, проходящих через точки  $B, C$ .

В работе рассматриваются следующие граничные условия, которые записаны для точки  $B$  (для точки  $C$  выписываются аналогично):

**Вариант 1.** Жесткое защемление (заделка)

$$u(0, t) = 0, v(0, t) = 0, \tau_1(0, t) = 1.$$

**Вариант 2.** В точке  $B$  неподвижный шарнир вдоль оси  $X_1$

$$u(0, t) = 0, v(0, t) = 0, v'(0, t) = 0.$$

**Вариант 3.** В точке  $B$  подвижный шарнир вдоль оси  $X_1$

$$v(0, t) = 0, (\bar{N}_\tau + \bar{Q}_n) \bar{e}_1 = 0, M_{x_3}(0, t) = 0.$$

**Вариант 4.** Перемещения точек  $B, C$  обозначим  $u_B, u_C$ , а углы поворота сечений, проходящих через данные точки обозначим  $\theta_B, \theta_C$ . При таких перемещениях  $u_B, u_C$  и углах поворота  $\theta_B, \theta_C$  со стороны опорных стоек на стеклопластиковый стержень действуют в опоре  $B$  сила  $F_B$  и момент  $M_B$ , а в опоре  $C$  — сила  $F_C$  и момент  $M_C$  (рис. 2). Силы  $F_B, F_C$  и моменты  $M_B, M_C$  (рис. 2) являются реакциями связей, наложенных на стеклопластиковый стержень.

Реакции связей  $F_B, F_C, M_B, M_C$  являются функциями от перемещений  $u_B, u_C$ , углов поворота  $\theta_B, \theta_C$ , размеров стоек и их материала:

$$\begin{cases} F_B = \frac{12EI}{\ell^3} u_B + \frac{6EI}{\ell^2} \theta_B, \\ M_B = \frac{6EI}{\ell^2} u_B + \frac{4EI}{\ell} \theta_B. \end{cases}$$

Данные матричные соотношения определяют податливость и жесткость связей, наложенных на стержень ВС.

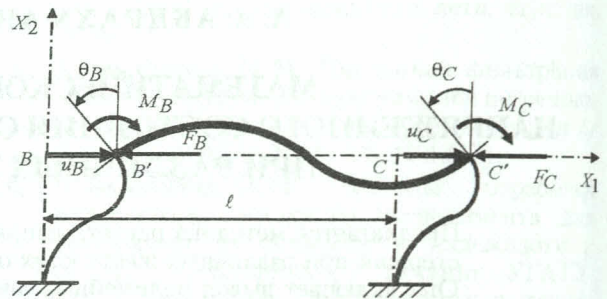


Рис. 2. Расчетная схема стеклопластикового стержня при одностороннем нагреве и реакции связей  $F_B, F_C, M_B, M_C$ , наложенных на стержень

## 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

При построении нелинейных дифференциальных уравнений равновесия, описывающих напряженно-деформированное состояние стержня при больших перемещениях, используется гипотеза плоских нормальных сечений. Рассматривается первоначально прямой стержень, точки базовой линии которого идентифицируются ее начальными координатами  $x_1$  по координатной оси  $X_1$ , направленной вдоль стержня (рис. 3).

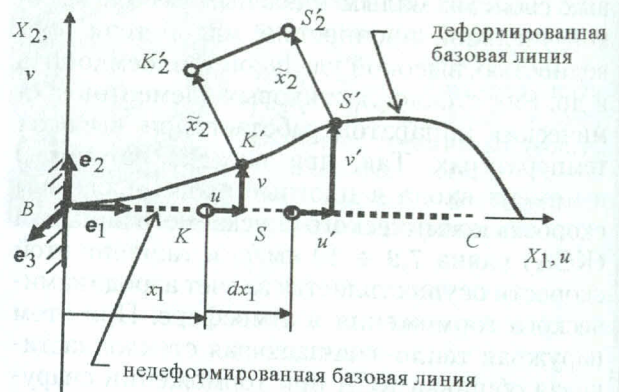


Рис. 3. Деформация базовой линии стержня и перемещения точек  $K', S'$  волокна стержня, имеющего координату  $x_2 = \bar{x}_2$

Деформация базовой линии описывается функциями перемещений

$$u = u(x_1, t), v = v(x_1, t),$$

зависящими от начальной пространственной координаты  $x_1$  и времени  $t$ .

Линейная деформация базовой линии определяется выражением

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_1(x_1, t) &= \frac{|K'S'| - dx_1}{dx_1} = \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2} - 1 = \\ &= \sqrt{(1 + u^{(\partial 1)})^2 + (v^{(\partial 1)})^2} - 1. \end{aligned}$$

Оргы касательной  $\tau$  и нормали  $n$  деформированной базовой линии

$$\tau = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2, \quad n = n_1 e_1 + n_2 e_2$$

определяются проекциями

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1 + u^{(\partial 1)}}{1 + \varepsilon_1}, \quad \tau_2 = \frac{v^{(\partial 1)}}{1 + \varepsilon_1}, \\ n_1 &= -\tau_2, \quad n_2 = \tau_1. \end{aligned}$$

В рамках гипотезы Бернулли определяется продольная деформация  $\varepsilon_{11}$  волокна стержня с координатой  $\tilde{x}_2$  (рис. 3)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \\ &= \sqrt{(1 + u^{(\partial 1)} - \tilde{x}_2 \tau_2^{(\partial 1)})^2 + (v^{(\partial 1)} - \tilde{x}_2 \tau_1^{(\partial 1)})^2} - 1 \end{aligned}$$

При деформации стержня в нем возникают нормальные напряжения, в общем случае нелинейно зависящие от деформации и температуры

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(\varepsilon_{11}, T).$$

По нормальным напряжениям  $\sigma_{11}$  определяются внутренняя продольная сила  $N_\tau$  и внутренний изгибающий момент  $M_{x3}$

$$N_\tau = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} b d\tilde{x}_2, \quad M_{x3} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11} b \tilde{x}_2 dx_2.$$

Из первоначально прямого стержня выделен элемент  $KS$  бесконечно малой длины  $dx_1$ . В результате температурного и силового воздействия данный элемент деформируется, и в деформированном состоянии обозначен  $K'S'$  на рис. 4.

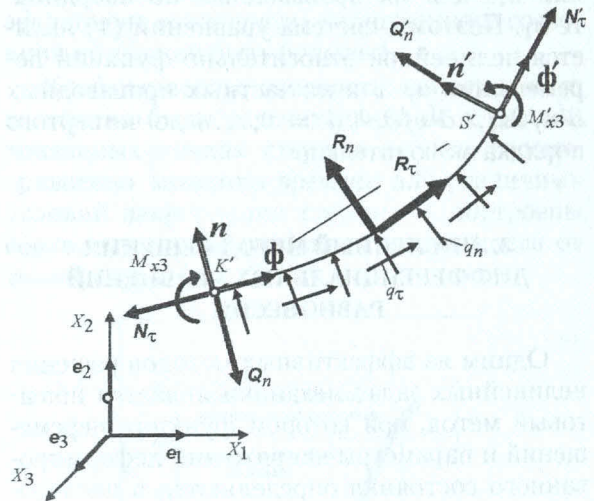


Рис. 4. Внутренние силовые факторы, действующие на элемент стержня

На выделенный элемент стержня  $K'S'$  действуют внутренние продольные силы  $N_\tau, N'_\tau$ , поперечные силы  $Q_n, Q'_n$  и изгибающие моменты  $M_{x3}, M'_{x3}$  (рис. 4).

В общем случае величины продольной силы  $N_\tau$ , поперечной силы  $Q_n$  и изгибающего момента  $M_{x3}$  являются функциями от координаты  $x_1$  точки их приложения  $K'$  (рис. 4)

$$\begin{aligned} N_\tau &= N_\tau(x_1, t), \quad Q_n = Q_n(x_1, t), \\ M_{x3} &= M_{x3}(x_1, t). \end{aligned}$$

При неподвижном элементе стержня  $K'S'$  (рис. 4) приложенная к нему система сил удовлетворяет условиям равновесия

$$\begin{aligned} R_\tau + R_n + N_\tau + N'_\tau + Q_n + Q'_n &= 0, \\ M_{x3} + M'_{x3} + \overline{S'K'} \times N_\tau + \\ &+ \overline{S'K'} \times Q_n + 0,5 \cdot \overline{S'K'} \times R_n = 0, \end{aligned}$$

которые после преобразований приводятся к системе двух дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\tau_2 \tau_1^{(\partial 1)} - \tau_1 \tau_2^{(\partial 1)}}{(1 + \varepsilon_1)^2} \frac{\partial M_{x3}}{\partial x_1} - \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \frac{\partial N_\tau}{\partial x_1} - \\ - \frac{\tau_1 \tau_1^{(\partial 1)} + \tau_2 \tau_2^{(\partial 1)}}{1 + \varepsilon_1} N_\tau = q_\tau, \\ \frac{1}{(1 + \varepsilon_1)^2} \frac{\partial^2 M_{x3}}{\partial x_1^2} + \frac{\tau_1 \tau_1^{(\partial 1)} + \tau_2 \tau_2^{(\partial 1)}}{(1 + \varepsilon_1)^2} \frac{\partial M_{x3}}{\partial x_1} - \\ - \frac{\varepsilon_1^{(\partial 1)}}{(1 + \varepsilon_1)^3} \frac{\partial M_{x3}}{\partial x_1} + \frac{\tau_2 \tau_1^{(\partial 1)} - \tau_1 \tau_2^{(\partial 1)}}{1 + \varepsilon_1} N_\tau = q_n. \end{aligned} \quad (1)$$

Все входящие в систему (1) величины являются функциями от функций перемеще-

ния  $u$ ,  $v$  и их производных по координате  $x_1$ . Поэтому, система уравнений (1) является нелинейной относительно функций перемещения  $u$ ,  $v$  и их частных производных  $\partial^j u / \partial x^j$ ,  $\partial^j v / \partial x^j$ ,  $j = 0, \dots, 4$  до четвертого порядка включительно

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Одним из эффективных методов решения нелинейных задач механики является пошаговый метод, при котором функции перемещений и параметры напряженно-деформированного состояния определяются в последовательные моменты времени при достаточно малом временном шаге. На каждом шаге задача линеаризуется разложением в ряд Тейлора выражений, входящих в систему (1), в результате чего получается система линейных дифференциальных уравнений [1]

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^4 \frac{\partial}{\partial u^{(\partial j)}} (A_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + A_{N\tau}^{(\partial 1)} N_{\tau}^{(\partial 1)} + \\ & \quad + A_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i u_{i+1}^{(\partial j)} + \\ & + \sum_{j=0}^4 \frac{\partial}{\partial v^{(\partial j)}} (A_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + A_{N\tau}^{(\partial 1)} N_{\tau}^{(\partial 1)} + \\ & \quad + A_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i v_{i+1}^{(\partial j)} = q_{\tau}(t_{i+1}) - \\ & - (A_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + A_{N\tau}^{(\partial 1)} N_{\tau}^{(\partial 1)} + A_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i + \\ & + \sum_{j=0}^4 \frac{\partial}{\partial u^{(\partial j)}} (A_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + A_{N\tau}^{(\partial 1)} N_{\tau}^{(\partial 1)} + \\ & \quad + A_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i u_i^{(\partial j)} + \\ & + \sum_{j=0}^4 \frac{\partial}{\partial v^{(\partial j)}} (A_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + A_{N\tau}^{(\partial 1)} N_{\tau}^{(\partial 1)} + \\ & \quad + A_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i v_i^{(\partial j)}, \\ & \sum_{j=0}^4 \frac{\partial}{\partial u^{(\partial j)}} (B_{Mx_3}^{(\partial 2)} M_{x_3}^{(\partial 2)} + B_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + \\ & \quad + B_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i u_{i+1}^{(\partial j)} + \\ & + \sum_{j=0}^4 \frac{\partial}{\partial v^{(\partial j)}} (B_{Mx_3}^{(\partial 2)} M_{x_3}^{(\partial 2)} + B_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + \\ & \quad + B_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i v_{i+1}^{(\partial j)} = q_n(t_{i+1}) - \\ & - (B_{Mx_3}^{(\partial 2)} M_{x_3}^{(\partial 2)} + B_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + B_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{j=0}^4 \frac{\partial}{\partial u^{(\partial j)}} (B_{Mx_3}^{(\partial 2)} M_{x_3}^{(\partial 2)} + B_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + \\ & \quad + B_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i u_i^{(\partial j)} + \\ & + \sum_{j=0}^4 \frac{\partial}{\partial v^{(\partial j)}} (B_{Mx_3}^{(\partial 2)} M_{x_3}^{(\partial 2)} + B_{Mx_3}^{(\partial 1)} M_{x_3}^{(\partial 1)} + \\ & \quad + B_{N\tau}^{(\partial 0)} N_{\tau}^{(\partial 0)})_i v_i^{(\partial j)}. \end{aligned} \quad (2)$$

В правой части системы линейных дифференциальных уравнений (2) находятся величины, известные для момента времени  $t_i$ .

В левой части системы линейных дифференциальных уравнений (2) находятся неизвестные производные  $u_{i+1}^{(\partial j)} = \frac{\partial^j u_{i+1}}{\partial x^j}$ ,  $v_{i+1}^{(\partial j)} = \frac{\partial^j v_{i+1}}{\partial x^j}$ ,  $j = 0, \dots, 4$  от функций перемещения  $u_{i+1} = u(x_1, t_{i+1})$ ,  $v_{i+1} = v(x_1, t_{i+1})$  в момент времени  $t_{i+1}$ .

Полученная система линейных дифференциальных уравнений (2) дополняется уравнениями, учитывающими конкретные граничные условия, и затем может быть решена каким-либо численным методом.

В качестве такого метода выбран метод сплайнов пятой степени [2, 3] обеспечивающий четвертый порядок сходимости. В работе [2] сформулированы основные положения метода и на примере решения модельной задачи показана его высокая точность для решения дифференциальных уравнений.

### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ МЕТОДИКИ РАСЧЕТА

Рассматривался стержень из стеклопластика КТ-11-К-Ф при одностороннем нагреве с изменением температуры, согласно рис. 5 [4].

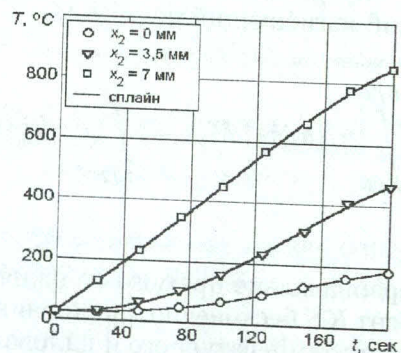


Рис. 5. Изменение температуры  $T$  во времени  $t$  в слоях с координатами  $x_2$  при одностороннем нагреве стержня из КТ-11-К-Ф, закрепленного по концам в опорах заданной жесткости

Для оценки точности предлагаемой методики выполнен расчет стержня с упругой опорой заданной жесткости, и полученные расчетные результаты сопоставлены с результатами прямых экспериментальных исследований стеклопластикового стержня, полученными в работе [4], где экспериментально изучалось изменение от времени внутреннего продольного усилия при одностороннем нагреве прямоугольного стержня размером  $7 \times 25 \times 150$  мм. Экспериментальная зависимость продольного усилия от температуры «горячей» поверхности показана точками на рис. 6. Там же (рис. 6) сплошной линией показано расчетное усилие. Видно (рис. 6), что разработанная методика расчета стержней при неоднородном температурном поле с учетом геометрической и физической нелинейности показывает приемлемую для практики точность.

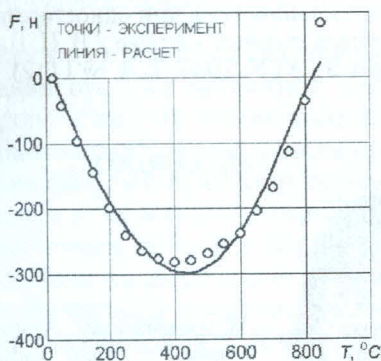


Рис. 6. Сила  $F$ , действующая на опору заданной жесткости, в зависимости от температуры  $T$  «горячей» поверхности образца, при одностороннем нагреве стержня

### 5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ СТЕРЖНЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ ЕГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ

По разработанной методике были проведены расчеты стержня при различных граничных условиях, зависящих от жесткости опор. Были рассчитаны напряжения  $\sigma$  в узловых точках для всех расчетных моментов времени и во всех слоях. В каждой точке в каждый момент времени известна температура, и, следовательно, известен предел прочности материала  $\sigma_{пч}$ .

В работе для оценки работоспособности материала введен коэффициент «опасности» напряженного состояния

$$K = \frac{\sigma}{\sigma_{пч}} \quad (3)$$

Для безопасной работы конструкции коэффициент «опасности» напряженного состояния не должен быть больше 1.

Коэффициенты опасности напряженного состояния были рассчитаны во всех рассматриваемых точках стержня во все рассматриваемые моменты времени для различных условий закрепления стержня и построены соответствующие графики в зависимости от температуры (рис. 7–9).



Рис. 7. Коэффициент опасности для стержня, заземленного по концам



Рис. 8. Коэффициент опасности для стержня, имеющего неподвижные шарниры по концам



Рис. 9. Коэффициент опасности для стержня, имеющего неподвижный и подвижный шарниры по концам

Из рис. 7 и 8 видно, что в случае стержня, заземленного по концам и стержня, имеющего неподвижные шарниры по концам уже в точках, где температура достигает и превышает  $600^{\circ}\text{C}$ , коэффициент опасности превышает единицу, что означает, что материал может разрушиться в этих точках.

В случае, когда один из шарниров является подвижным, как видно из рис. 9, коэффициент «опасности» напряженного состояния практически не превышает единицу, что позволяет сделать вывод о том, что в основной своей массе материал не разрушится и конструкция может эксплуатироваться.

Таким образом, мы видим, что путем рационального выбора типа опор можно существенно повышать прочность конструкции.

### ВЫВОДЫ

1. Построена, в рамках гипотезы плоских нормальных сечений, система квазистационарных нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, описывающих равновесие стержня при произвольных по величине перемещениях, нелинейном законе изменения температуры по времени и нелинейных зависимостях напряжений от деформаций.
2. Система нелинейных дифференциальных уравнений сведена к стационарной системе линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка в перемещениях.
3. Методом сплайнов пятой степени найдено решение системы линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка, описывающих деформирование геометрически и физически нелинейного стержня.
4. Для проведения численного анализа напряженного состояния стеклопластикового стержня при различных способах его крепления по разработанной методике решена система квазистационарных нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка при различных граничных условиях. На основе полученных решений выявлены вари-

анты закрепления стержня, при которых напряженные состояния характеризуются наименьшим коэффициентом опасности и, соответственно, наибольшей прочностью.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Абдрахманова, А. А.** Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стержня при больших деформациях / А. А. Абдрахманова, В. П. Павлов // Вестник Самарск. гос. ун-та. Естественнонаучная серия. Самара, 2007. № 2(52). С. 30–36.
2. **Абдрахманова, А. А.** Вариант метода сплайна для расчета изгиба балок / А. А. Абдрахманова // Там же. С. 19–29.
3. **Павлов, В. П.** Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел / В. П. Павлов. Уфа: УГАТУ, 2003. 197 с.
4. **Павлов, В. П.** Методика расчета и результаты экспериментального исследования стержня из стеклопластика при одностороннем высокотемпературном нагреве / В. П. Павлов // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 1(12). С. 162–167.

### ОБ АВТОРАХ



**Абдрахманова Алия Айдаровна**, ст. преп. каф. матем. Дипл. мат.-инж. (УГАТУ, 1998). Иссл. в обл. расчета конструкций из стеклопластиков.



**Павлов Виктор Павлович**, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж.-мех. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике, прочности машин, приборов и аппаратуры (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. механики полимерн. композиц. материалов.