

А. А. РОЗЕНМАН, С. С. ПОРЕЧНЫЙ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО КОМПЛЕКСА

Рассматривается задача об обтекании диполя, расположенного над прямолинейным дном, пристенным потоком идеальной невязкой весомой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью. Приводятся результаты численного исследования, включающие предельный режим, образующийся при приближении диполя к свободной поверхности. Представляется комплекс, помогающий исследователю решать подобные задачи. *Исследовательский комплекс; гидродинамика; весома жидкость*

В данной работе в качестве примера рассматривается плоская симметричная задача обтекания диполя с моментом N , ограниченным потоком идеальной несжимаемой весомой жидкости со свободной границей (рис. 1, а), причем определяются апериодические решения (солитоны).

Аналогичная задача для невесомой жидкости решена Уайтхедом [1].

Численное исследование задачи обтекания весомой жидкостью диполя, расположенного на дне, проведено в [2].

Задача решается в системе координат, связанной с диполем. Пусть диполь с моментом N расположен в точке A (рис. 1, а). Ось диполя ориентирована горизонтально. Скорость на бесконечности V_0 направлена в положительном направлении оси x . В точках F и F_1 , координаты которых зависят от параметров течения, скорость равна нулю. При $N < 0$ таким течением может моделироваться бесциркуляционное обтекание тела, если его размеры малы по сравнению с расстоянием до дна AB и до свободной поверхности AC . Расстояние между точками F_1 и F (которые при $N < 0$ располагается слева и справа от точки A) можно считать размером обтекаемого тела.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Граничные условия

Пусть скорость жидкости на бесконечности — V_0 , асимптотическая толщина струи — h , сила тяжести действует вертикально вниз. Модуль вектора скорости жидкости V на свободной поверхности CD связан с высотой

точки y уравнения Бернулли:

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \frac{2y}{Fr^2 h} = \text{const}, \quad Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gh}}. \quad (1)$$

На других участках границы имеют место следующие краевые условия: $\text{Re } z = 0$ на AB и AC , $\text{Re } z = 0$ на BD , где $z = x + iy$ — комплексные координаты точки, A — точка расположения диполя.

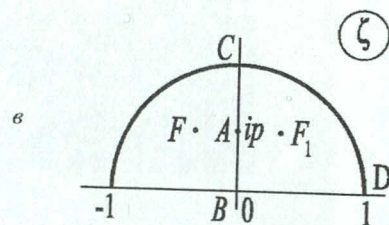
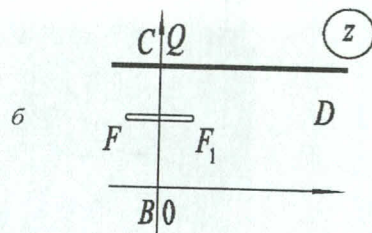
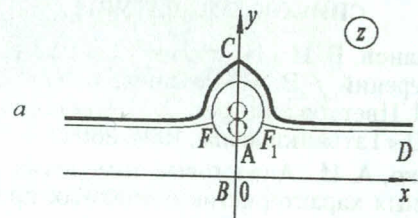


Рис. 1. Формы области течения на различных плоскостях: а — физической плоскости; б — плоскости комплексного потенциала; в — плоскости изменения параметрического переменного

В связи с принятыми допущениями об идеальности среды течение соленоидально и потенциально, тогда решение задачи можно получить в виде аналитических функций комплексного переменного $z(\zeta), w(\zeta)$, где ζ — параметрическая переменная, областью изменения которой является полукруг (рис. 1, в), w — комплексный потенциал [3].

Поскольку границы потока являются непроницаемыми, областью, соответствующей потоку на плоскости комплексного потенциала, является полоса с разрезом и связанной с ней плоскостью. Эта плоскость (с разрезом) является образом замкнутой области течения вокруг диполя (рис. 1, а).

Область течения на плоскости w для данного течения приведена на рис. 1, б, зависимость $w(\zeta)$ определяется формулой [1, 2]:

$$w(\zeta) = \frac{2hV_0}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} - \frac{N_1}{2\pi} \left(\frac{1}{\zeta - ip} + \frac{1}{\zeta + ip} + \frac{1}{p^2(\zeta - ip)} + \frac{1}{p^2(\zeta + ip)} \right), \quad (2)$$

$$N_1 = \frac{N}{dz/d\zeta(ip)}, \quad (3)$$

где N — дипольный момент, ip — образ точки расположения диполя на плоскости ζ .

Производная (2) равна:

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{2hV_0}{\pi} \left[\frac{2}{1-\zeta^2} + \frac{n_1}{2} \left(\frac{\zeta^2 - p^2}{(\zeta^2 + p^2)^2} + \frac{\zeta^2 p^2 - 1}{(p^2 \zeta^2 + 1)^2} \right) \right], \quad (4)$$

где $n_1 = N_1/hV_0$.

1.2. Метод прямого конформного отображения

Функция $z(\zeta)$ является аналитической в полукруге $|\zeta| < 1, \text{Im} \zeta > 0$, нечетной (в силу симметрии течения относительно оси y) функцией, имеющей нулевые значения мнимой части на горизонтальном диаметре $\text{Im} \zeta = 0, 0 < \text{Re} \zeta < 1$ и удовлетворяющей крайнему условию (1) на полуокружности ABC (при этом $V = \left| \frac{dw}{dz} \right|, y = \text{Im} z$).

При решении с помощью конформных отображений функцию $z(\zeta)$ будем искать в виде суммы степенного ряда и некоторых функций, учитывающих заданные особенности в точках

$$z(\zeta) = h [z_0(\zeta) + z_1(\zeta) + z_2(\zeta) + z_3(\zeta)], \quad (5)$$

где $z_0(\zeta) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ — функция, отображающая полуокружность на полосу, $z_1(\zeta)$ — линейная комбинация степенных функций, коэффициенты которой подбираются так, чтобы выполнялось условие уравнения Бернулли (1), $z_2(\zeta)$ и $z_3(\zeta)$ — функции, введенные для учета особенностей решения $z(\zeta)$ при $\zeta = 1$ и в точке излома свободной поверхности.

Функция $z_1(\zeta) = z(\zeta)/h - z_0(\zeta) - z_2(\zeta) - z_3(\zeta)$, имеющая чисто действительные значения на действительном диаметре, аналитична внутри полукруга и непрерывна на границе. В связи с этим ее можно аналитически продолжить на весь круг и искать в виде сходящегося степенного ряда с действительными коэффициентами

$$z_1(\zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \zeta^{2m+1}$$

Функции $z_2(\zeta)$ и $z_3(\zeta)$ определяются аналогично [2]

$$z_2(\xi) = A_1 \left[\left(\frac{1-\xi}{2} \right)^\alpha - \left(\frac{1+\xi}{2} \right)^\alpha \right] \quad (6)$$

$$z_3(\xi) = iA_2 \left[\left(\frac{1+i\xi}{2} \right)^\beta - \left(\frac{1-i\xi}{2} \right)^\beta \right], \quad (7)$$

$$0 < \beta < 1.$$

где α — первый корень трансцендентного уравнения Стокса

$$\alpha \frac{\pi}{2} \text{ctg} \alpha \frac{\pi}{2} = \frac{1}{Fr^2}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (8)$$

Наличие степенной особенности с показателем $2/3$ означает, что свободная граница в точке излома C образует угол, равный $2\pi v z$, что соответствует известной особенности волны Стокса. Это значение получено исходя из предположения, что предельное значение угла θ при подходе к точке C существует и не равно нулю. То есть при нулевом предельном значении можно ожидать существование других режимов с критической точкой C .

Здесь также учитывалось, что, как и $z(\zeta)$, функции $z_2(\zeta)$ и $z_3(\zeta)$ должны быть нечетными и иметь действительные значения на действительной оси.

Тем самым определен вид функции (5).

1.3. Обтекание диполя невесомой жидкостью

Функция Жуковского $\omega(\zeta) = \ln \frac{1}{V_0} \frac{dw}{dz} = \theta + i\tau$ (θ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс, $\tau = \ln(V/V_0)$) для данного течения строится аналогично задаче, описанной в [1]. Для аналитической функции $\omega(\zeta)$ имеют место следующие краевые условия:

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{на } BD, \\ 0 & \text{на } F_1B, \\ 0 & \text{на } FC, \\ \pi & \text{на } AF, \\ -\pi & \text{на } AF_1, \end{cases} \quad \tau = 0 \text{ на } CD, \quad (9)$$

где A — точка расположения диполя, F и F_1 — критические точки. Такие условия имеют место при $n_1 > 0$. Этим условиям удовлетворяет функция

$$\omega = i \ln \frac{(p^2\zeta^2 + 1)^2 (\zeta^2 + q^2) (\zeta^2 + q_1^2)}{(\zeta^2 + p^2)^2 (q^2\zeta^2 + 1) (q_1^2\zeta^2 + 1)}, \quad (10)$$

где p — образ точки расположения диполя, q и q_1 — образы точек F и F_1 .

Параметры q и q_1 определяются из решения уравнения $dw/d\zeta = 0$. В частном случае $p = 0$ (диполь расположен на дне) [2]:

$$\omega = i \ln \frac{(\zeta^2 + q^2)}{\zeta^2 (q^2\zeta^2 + 1)}, \quad (11)$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{2hV_0}{\pi} \left[\frac{2}{1-\zeta^2} - \frac{n_1}{4} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \right]. \quad (12)$$

В формуле (12) момент n_1 берется с половинным весом, так как в частном случае $p = 0$ на плоскости ζ совмещаются два диполя, а их суммарный момент связывается с моментом диполя на физической плоскости.

Для связи дипольных моментов на физической и параметрической плоскостях необходимо найти производную $dz/d\zeta$ в точке $\zeta = 0$:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{V_0} e^{i\omega} \frac{dw}{d\zeta}. \quad (13)$$

Подставим (11) и (12) в (13):

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{2h}{\pi} \frac{\zeta^2 (q^2\zeta^2 + 1)}{\zeta^2 + q^2} \left[\frac{2}{1-\zeta^2} - \frac{n_1}{4} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) \right].$$

Переходя к пределу при $\zeta \rightarrow 0$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta}(0) &= \frac{2h}{\pi} \frac{1}{q^2} \frac{n_1}{4} = \\ &= \frac{h}{\pi} \left(2 - \frac{n_1}{2} + 2\sqrt{1 - \frac{n_1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Используя (14) в (3) найдем уравнение, связывающее n_1 и n ,

$$n_1 \left(2 - \frac{n_1}{2} + 2\sqrt{1 - \frac{n_1}{2}} \right) = \frac{\pi}{h} n, \quad (15)$$

которое можно решить численно.

В случае обтекания диполя весомой жидкостью для пересчета дипольных моментов по формуле (3) необходимо вычислить производную $dz/d\zeta$ в точке $\zeta = ip$:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta}(ip) &= h \left(\frac{4}{\pi(1+p^2)} - A_2 \frac{2}{3} \left((1-p)^{-1/3} + \right. \right. \\ &+ (1+p)^{1/3} \left. \left. + \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) C_{2m+1} (-1)^m p^{2m} - \right. \right. \\ &\left. \left. - 2A_1 \alpha \sqrt{1+p^2} \cos(\alpha-1) \operatorname{arctg} p \right). \end{aligned} \quad (16)$$

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

2.1. Численный алгоритм

Задача сводится к решению уравнения (1), решать ее будем методом коллокаций [2]. В бесконечной сумме z_1 сохраняется конечное число N слагаемых, а равенство (1) удовлетворяется в дискретных точках $\sigma_m = \pi m / (2N)$, $m = \overline{1, N}$. Полученные N нелинейных уравнений образуют систему, которая решается методом Ньютона с регуляризацией шага относительно параметров C_{2m+1} , $m = \overline{0, N-4}$, A_1, A_2, Fr . Для волн типа Стокса Fr является искомым параметром.

Оценка погрешности производится по усовершенствованному правилу Рунге [4] путем сравнения значений параметров (например, числа Fr , координаты точки C и др.), полученных при последовательном возрастании N , а также по максимальной невязке Δ_{\max} уравнения (1), рассчитанной в промежуточных точках между узлами коллокаций σ_m .

2.2. Численные результаты

На рис. 2 представлены зависимости числа, обратного числу Фруда, от высоты гребня волны для разных высот расположения диполя. Кривые начинаются с решения, соответствующего обтеканию невесомой жидкостью ($Fr = \infty$), и заканчиваются волной предельной высоты (типа Стокса) с критической точкой на гребне и изломом свободной поверхности (с внутренним углом 120°).

Для волн с критической точкой на гребне справедливо равенство, следующее из уравнения Бернулли

$$y_C = 1 + \frac{Fr^2}{2}$$

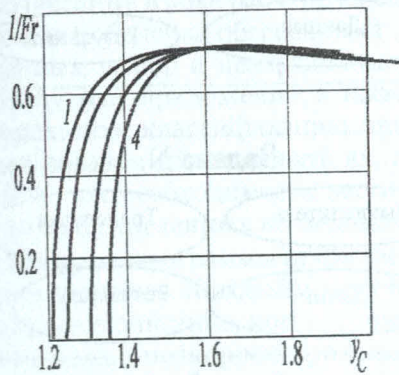


Рис. 2. Зависимости величины $1/Fr$ от высоты гребня y_C для разных высот расположения диполя: 1 - $y_A = 0,05$; 2 - $y_A = 0,5$; 3 - $y_A = 0,75$; 4 - $y_A = 0,9$

Применительно к данной задаче представляет интерес исследовать случаи приближения диполя к свободной поверхности. Ранее были изучены случаи приближения к свободной поверхности вихря [2]. При этом, как было показано, вокруг вихря образовывался замкнутый поток, который при совпадении направления скорости набегающего потока и вихревого движения вблизи свободной поверхности вместе с вихрем отрывался от основного потока.

При обтекании диполя такое явление не может иметь места, так как отсутствует как горизонтальная, так и вертикальная составляющая силы взаимодействия диполя с набегающим потоком. Исследование показало, что приближение диполя к свободной поверхности при малых n ограничено возникновением критического режима, при котором число Фруда $Fr=1$, где V_0, h — скорость и ордината точки свободной поверхности на бесконечности.

На рис. 3 представлены формы свободной поверхности волн типа Стокса при различных расстояниях диполя от дна y_A для $n = -1$. Верхняя кривая соответствует диполю, расположенному на дне, нижняя кривая — $Fr = 1$.

На рис. 4 даны зависимости y_A от ординаты y_C при $n = \text{const} < 0$. При $n \geq -1$ кривые начинаются с предельного значения $y_C = 1,5$ ($Fr = 1$) и заканчиваются при $y_A = 0$.

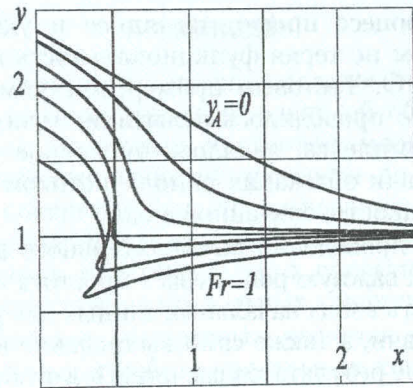


Рис. 3. Формы свободной поверхности волн Стокса при различных высотах расположения диполя ($n = -1$)

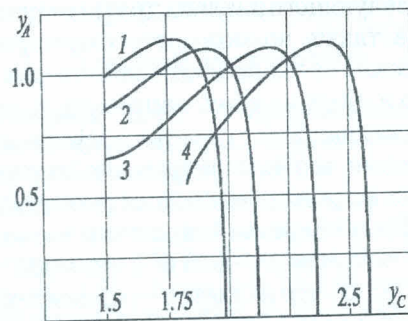


Рис. 4. Зависимости высоты расположения диполя y_A от высоты гребня y_C (для волн типа Стокса): 1 - $n = -0,25$; 2 - $n = -0,5$; 3 - $n = -1$; 4 - $n = -1,5$

Для $n < -1$ предельный режим $Fr = 1$ не реализуется. При приближении диполя к свободной поверхности критические точки F и F_1 выходят на свободную поверхность. Однако течение в этом предельном случае имеет сложный вид, представляется на двулистной Римановой поверхности и не может быть реализовано физически.

3. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

Комплекс призван решить проблему информационно-методического обеспечения вычислительного эксперимента. Недостаток или избыток информации, промежуточные эксперименты, множество сходных проектов часто не позволяет исследователю быстро и полноценно оценить и обработать результаты, полученные в ходе численного эксперимента, минимизировать хранимую информацию, сохранив важнейшую ее часть.

Была сделана попытка разработать программный комплекс, позволяющий сделать

этот процесс проще, нагляднее и удобнее, при этом не теряя функциональность и гибкость ПО. Тестовым примером, с помощью которого проводилось испытание программного комплекса, являлось численное решение задачи обтекания диполя потоком вязкой жидкости, описанной выше.

При проведении вычислительного эксперимента важную роль играет простота и корректность ввода начальных данных для решения задачи, а также само вычисление и отображение результатов расчета. Под отображением результатов здесь понимается не только представление результатов расчета в графическом виде на экране компьютера, но и табличное представление численных данных для последующего анализа другими приложениями, а также возможность формирования графических и табличных файлов для дальнейшего использования, например, в отчетах.

Существующие пакеты программного обеспечения, являясь закрытыми системами, не могут наделить исследователя достаточной свободой действий, при этом часто неизвестной остается точность, с которой получен результат, что является неприемлемым. К тому же формат исходных данных и выходных данных, как правило, строго фиксирован, что также не всегда устраивает исследователя. Пользователь ограничен в выборе средств программирования вычислительного процесса. Полученные данные при этом, как правило, собраны в одном месте и объединены в базу данных (см. рис. 5).



Рис. 5. Структура закрытой системы

Другой вариант, когда мы не имеем отдельной закрытой системы, а используем для решения разных задач разные средства. В этом случае мы можем контролировать процесс вычислений и точность вычислений. При необходимости исследователь может вмешиваться в процесс и модифицировать его. Возникает, правда, проблема хранения различных результатов программного ко-

да и порожденного каждым программным кодом данных (см. рис. 6).

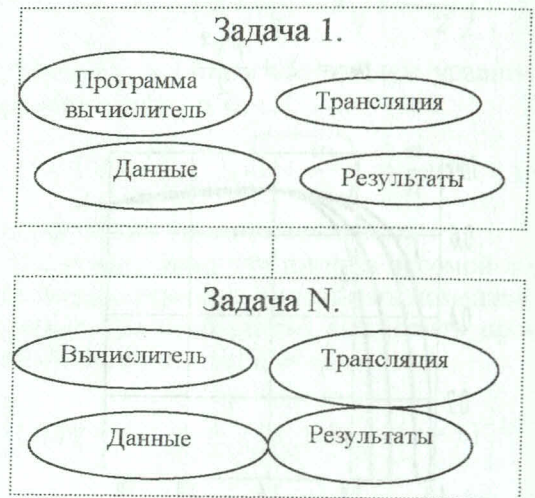


Рис. 6. Состав базы данных результатов решения задачи

Была сделана попытка создать оболочку, которая обеспечила бы удобство работы и предоставления доступа к требуемым исходным данным, результатам, а также к программному коду (см. рис. 7).

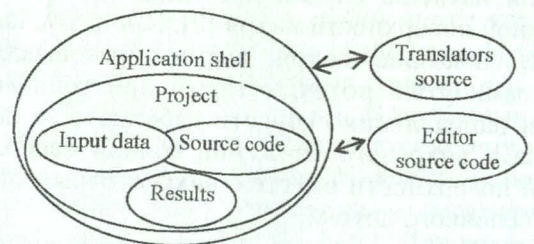


Рис. 7. Структура исследовательского комплекса

Численный эксперимент разбивается на несколько этапов: построение дискретного аналога дифференциальной задачи, отладка и тестирование пользовательских программ численного решения дискретной задачи на серии тестовых задач, проведение расчетов.

В результате проведения серии расчетов возникает большой объем информации, требующей хранения в определенном требуемом виде, что делает невозможным, неудобным или неоправданным использование существующих универсальных программных пакетов.

Проведение расчетов делится на следующие этапы: постановка задачи численного исследования, подготовка начальных данных, а также корректировка приложения-решателя

для проведения данного исследования; трансляция приложения-решателя; запуск приложения-решателя; анализ полученных данных.

При этом возникает необходимость создания общей базы данных, в которой бы в одном месте хранились начальные данные, модификации программных модулей, конечные данные, полученные в ходе расчета. Специальное приложение-оболочка обеспечивает доступ к базе данных, выбор и централизованный запуск требуемых приложений, а также позволяет проводить классификацию проектов и нужным образом группировать их, дает возможность при необходимости вести подробный протокол численных исследований.

При запуске программы открывается окно с деревом проектов. Каждый проект имеет индивидуальное описание, которое при необходимости можно подкорректировать. Отдельные проекты могут быть объединены в группы в соответствии с типом решаемых ими задач. Данное окно допускает следующие виды операций над проектами: создание нового проекта; дублирование проекта; удаление проекта; перемещение проекта из одной группы в другую; изменение имени проекта; выбор проекта для редактирования.

При выборе конкретного проекта пользователь попадает в следующее окно для работы с проектом, в котором можно добавить, отредактировать или удалить файлы с исходными данными и файлы с необходимым программным кодом.

Данные в каждом проекте делятся на три типа: файлы с исходными данными; файлы с программным кодом, исходные тексты программы решателя; результаты — данные, полученные после прогона исходных данных через оттранслированную программу-решатель.

Исходные данные и файлы с программным кодом могут, по мере необходимости, редактироваться. После подготовки файлов программы-решателя ее необходимо оттранслировать. Если трансляция прошла успешно, то можно запускать программу-решатель с требуемыми начальными данными. Начальные данные выбираются из списка файлов с исходными данными.

По окончании работы программы-решателя полученные результаты автоматически становятся доступными для дальнейшей работы. Данные могут быть представлены в виде таблиц, рисунков и графиков, которые в свою очередь могут быть выведены на экран, в файл или на принтер.

ВЫВОДЫ

С помощью научно-исследовательского комплекса на примере задачи об обтекании диполя проведено численное моделирование течения весомой жидкости со свободной поверхностью. Использование научно-исследовательского комплекса позволило сопоставить в рамках одного проекта модели различного вида предельных конфигураций.

Наиболее интересным является два типа найденных в работе предельных конфигураций при приближении диполя к свободной поверхности: при $n \geq -1$ предельный режим $Fr = 1$, в противном случае — выход критических точек на свободную поверхность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Whitehead, L. G. Two-dimensional wind-tunnel interference / L. G. Whitehead // ARC Rep. and Memo. 1950. № 2802.
2. Житников, В. П. Обтекание диполя под поверхностью весомой жидкости с образованием солитона / В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина, О. И. Шерыхалин // Динамика сплошной среды. Новосибирск : Ин-т гидродинамики, 1999. Вып. 114. С. 31–34.
3. Гуревич, М. И. Теория струй идеальной жидкости / М. И. Гуревич. М. : Наука. 1979. 536 с.
4. Житников, В. П. Методы верификации математических моделей в условиях неопределенности / В. П. Житников, Н. М. Шерыхалина // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. С. 53–60.

ОБ АВТОРАХ



Розенман Алексей Александрович, асп. каф. компьют. матем. Дипл. инж. (УГАТУ, 2000). Готовит дис. в обл. прогр. комплексов.



Поречный Сергей Сергеевич, асп. каф. компьют. матем. Дипл. инж. и магистр по информ. и прогр. обесп. САПР (УГАТУ, 2006). Готовит дис. в обл. мат. моделирования физ. процессов.