Уфа: УГАТУ, 2004 Вестник УГАТУ Т. 5, № 2 (10). С. 58–66

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА

УДК 519.2, 517.2

Ф. С. НАСЫРОВ, Г. З. МУХАМЕТОВА

О ЯВНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Показано, что решение определенного класса линейных эволюционных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и их потраекторных аналогов удается свести к решению системы обычных дифференциальных уравнений в частных производных.. *Симметричный интеграл; стохастический интеграл Ито; стохастический интеграл Стратоновича; эволюционное стохастическое дифференциальное уравнение; сильное решение*

ВВЕДЕНИЕ

Стохастическими дифференциальными уравнениями в частных производных называются уравнения вида $A(u,\omega)=0$, где $A(.,\omega)$ — интегро-дифференциальный оператор, содержащий частные производные, а ω — переменная, символизирующая случай. В настоящей работе исследуются эволюционные стохастические дифференциальные уравнения в частных производных и их потраекторные аналоги, т. е. уравнения вида

$$du(t,x) = Lu(t,x)\,dt + Mu(t,x)\,dX(t), \qquad (1)$$

где L и M — интегро-дифференциальные операторы (по x), $X(t)$ — либо стандартный (возможно, многомерный) винеровский процесс, либо произвольная непрерывная функция неограниченной вариации, а само равенство (1) понимается в смысле стохастического дифференциального исчисления Ито. Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных возникают во многих задачах из различных областей естествознания, более того, к ним приводят важные задачи теории случайных процессов. Приведем некоторые из них.

1. Пусть $u(t,x,s)$ — диффузионный процесс, являющийся решением обыкновенного стохастического дифференциального уравнения

$$du(t) = b(u(t))\,dt + \sigma(u(t))\,dX(t),$$
$$u(s) = x, \quad t > s,$$

$X(t)$ — винеровский процесс. Случайная функция $u(t)$ описывает динамику (по t) диффундирующей частицы, «стартующей» в момент t из точки x, следовательно, решение этого уравнения зависит от переменных x и s. Н. В. Крыловым было показано, что при фиксированном t функция $u(t,x,s)$ является решением обратного уравнения диффузии

$$-du(t,x,s) = \left[\frac{1}{2}\sigma^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x,s) + \right.$$
$$\left. + b(x)\frac{\partial}{\partial x}u(t,x,s)\right] ds + \frac{\partial}{\partial x}\sigma(x)\bar{d}X(s),$$
$$s<t, \;\; x\in R, \;\; u(t,x,t)=x,$$

при этом второй интеграл в правой части последнего уравнения есть обратный стохастический интеграл Ито.

2. Один из простейших объектов релятивистской квантовой механики — свободное бозонное поле. Это поле является стационарным решением ([7]) уравнения

$$du(t) = -\sqrt{m^2\Delta u(t,x)}\,dt + dX(t,x),$$

где Δ — оператор Лапласа, $X(t,x)$ — винеровский процесс в L^2, m — некоторая физическая постоянная.

3. Модели популяционной генетики с географической структурой приводят ([8]) к уравнениям вида

$$du(t) = \sigma\Delta u(t,x)\,dX(t,x) +$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00286) и государственной научно-технической программы РБ.

$$+\sqrt{u(t,x)(1-u(t,x))}\,dX(t,x),$$

обозначения те же, что и в предыдущем примере.

Важными примерами стохастических дифференциальных уравнений в частных производных являются ([6]) уравнение фильтрации (для фильтрационной плотности диффузионного процесса), стохастическое дифференциальное уравнение Навье–Стокса и другие.

Наиболее подробно в настоящее время исследованы (см. [6]) линейные стохастические дифференциальные уравнения в частных производных. В работе развивается общий метод нахождения таких решений, который недавно был найден (см. [4]) первым из авторов. Данный метод основан на теории потраекторных симметричных интегралов (см. [3]), которые являются детерминированными аналогами стохастических интегралов Стратоновича в случае винеровского процесса. До работы [4] в теории обыкновенных стохастических дифференциальных уравнений случаи, когда известна явная формула для определения (сильного) решения стохастического дифференциального уравнения, были немногочисленны (см., напр., [1]). В статье [4] было показано, что решение обыкновенного стохастического дифференциального уравнения Ито сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. В настоящей работе этот метод применен к нахождению явных формул для решений линейных эволюционных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. В этом смысле данную статью можно считать продолжением работы [4].

Поскольку с помощью формулы Ито в случае гладких интеграндов стохастические интегралы Ито (прямые и обратные) могут быть сведены к потраекторным симметричным интегралам (стохастическим интегралам Стратоновича), то оказалось возможным рассматривать не только стохастические, но и потраекторные (детерминированные) аналоги эволюционных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$du(t,x) = Lu(t,x)\,dt + Mu(t,x) * dX(t), \quad (2)$$

где второй интеграл в правой части (2) есть симметричный интеграл по детерминированной непрерывной функции неограниченной вариации $X(t)$. Достоинством такого подхода является тот факт, что в этом случае нет необходимости в ограничительных условиях типа предсказуемости, налагаемых при использовании стохастического интеграла Ито.

Приведем необходимые обозначения и сведения. Множества $R = (-\infty, +\infty)$, $[0,t]$, $t > 0$, предполагаются наделенными σ-алгебрами борелевских множеств, которые соответственно обозначаются B, B_t, $t > 0$; на этих подмножествах считается заданной мера Лебега $\lambda(\cdot)$. Для непрерывной функции $X(s)$, $s \in [0, +\infty)$, положим $M(t) = \max\{X(s) : s \in [0,t]\}$, $m(t) = \min\{X(s) : s \in [0,t]\}$.

Обозначим через $\operatorname{sgn}(x)$ знак вещественного числа x, а $\mathbf{1}(A)$ обозначает индикатор множества A, т. е. функцию, равную 1 на A и 0 вне A; далее всюду $\kappa(v,A,B) = \operatorname{sgn}(B - A)\mathbf{1}(\min(A,B) < v < \max(A,B))$. На протяжении всей статьи примем следующие соглашения: верхние индексы обозначают номера координат; нижние индексы — дифференцирование по данной переменной.

Определение. Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in [0,1]$, и $f(s,u)$, $s \in [0,1]$, $u \in R$, удовлетворяют *условию* (S) *на* $[0,t]$, если:

(a) функция $X(s)$, $s \in [0,t]$, непрерывна;

(b) при п.в. u функция $f(s,u)$, $s \in [0,t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0,t]$;

(c) при п.в. u справедливо равенство $\int_0^t \mathbf{1}(X(s) = u)|f|(ds,u) = 0$, где при каждом u функция $|f|(s,u)$ есть полное изменение функции $f(\tau,u)$ по переменной τ на отрезке $[0,s]$;

(d) полное изменение $|f|(t,u)$ функции $f(s,u)$ по переменной s на отрезке $[0,t]$ локально суммируемо по u.

Замечания:

1. Условие (c) будет выполнено, если непрерывная функция $X(s)$ обладает локальным временем $\alpha(t,u)$, а функция $f(s,u)$ при п. в. u абсолютно непрерывна по переменной s.

2. Если $X(s) = X(s,\omega)$ — случайный процесс, обладающий локальным временем $\alpha(t,u)$, а $f(s,u)$ — детерминированная функция, удовлетворяющая условию (b), то условие (c) будет выполнено для почти всех траекторий процесса. В частности, для случайного процесса броуновского движения $X(s,\omega)$ и детерминированной функции $f(s,u)$ с условием (b) предположение (c) всегда выполняется.

Пусть функции $X(s)$ и $f(s,u)$ удовлетворяют условию (S) на отрезке $[0,t]$. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка $[0,t]$: $T_n =$

$= \{t_k^{(n)}\}$, $0 = t_0^{(n)} \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_k^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant t_{m_n}^{(n)} = t$, $n \in N$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max\limits_k \left|t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right| \to 0$ при $n \to \infty$. Через $X^{(n)}(s)$, $s \in [0,t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n, а через $N^{(n)}(t,u)$ — соответствующую ей индикатрису Банаха (см. [5]). Введем следующие обозначения: $\Delta t_k^{(n)} = t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right] = \left[t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}\right]$, $\Delta X_k^{(n)} = X(t_k^{(n)}) - X(t_{k-1}^{(n)})$.

Определение. *Симметричным интегралом* называется (см. [3])

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \lim_{n\to\infty} \sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}} \int_{[\Delta t_k^{(n)}]} f(s, X^{(n)}(s))\, ds\, \Delta X_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений T_n, $n \in N$.

Замечание. Симметричный интеграл в случае винеровского процесса $X(s)$ является (см. [3]) детерминированным аналогом стохастического интеграла Стратоновича.

Пусть функции $X(s)$, $s \in [0,t]$, и $f(s,u)$, $s \in [0,t]$, $u \in R$, удовлетворяют условию (S) на $[0,t]$. Тогда симметричный интеграл $\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s)$ может быть вычислен по формуле

$$\int_0^t f(s, X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} f(t,v)\, dv - \int_{m(t)}^{M(t)} \int_0^t \kappa(v, X(0), X(\tau)) f(d\tau, v)\, dv. \quad (3)$$

1. ОДНОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ АНАЛОГИ

В настоящем параграфе рассматриваются стохастические уравнения Ито вида

$$\eta(t,x) - \eta(0,x) = \int_0^t \left(a \frac{\partial^2 \eta(s,x)}{\partial x^2} + b \frac{\partial \eta(s,x)}{\partial x} + c\eta(s,x) + f \right) ds + \int_0^t \left(\sigma \frac{\partial \eta(s,x)}{\partial x} + h\eta(s,x) + g \right) dX(s), \quad (4)$$

где $a \equiv a(s,x,\omega)$, $b \equiv b(s,x,\omega)$, $c \equiv c(s,x,\omega)$, $f \equiv f(s,x,\omega)$, $\sigma \equiv \sigma(s,x,\omega)$, $h \equiv h(s,x,\omega)$, $g \equiv g(s,x,\omega)$ (переменную ω в дальнейшем будем опускать). Второй интеграл в правой части уравнения (4) есть стохастический интеграл Ито, $X(s)$ — одномерный стандартный винеровский процесс. Наложим следующее условие: коэффициент $\sigma(s,x) \neq 0$, при любых s и x. Будем искать решение (4) в виде функции $\eta(s,x) = \varphi(s,x,X(s))$, для которой имеют смыслы интегралы в правой части уравнения (4), и которое обращает это уравнение в тождество.

Поскольку формулу Ито можно рассматривать как соотношение, связывающее стохастические интегралы Ито и Стратоновича, то формулу Ито можно записать в виде

$$\int_0^t h(s,X(s)) * dX(s) = \int_0^t h(s,X(s))\, dX(s) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} h(s,u)|_{u=X(s)}\, ds, \quad (5)$$

где интеграл в левой части есть стохастический интеграл Стратоновича, который совпадает с детерминированным (потраекторным) симметричным интегралом, определенным выше, а первое слагаемое в правой части равенства — это стохастический интеграл Ито. Поэтому стохастический интеграл Ито в правой части уравнения (4) в силу формулы (5) примет вид

$$\int_0^t (\sigma\varphi_x(s,x,X(s)) + h\varphi(s,x,X(s)) + g)\, dX(s) = \int_0^t (\sigma\varphi_x(s,x,X(s)) + h\varphi(s,x,X(s)) + g) * dX(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} (\sigma\varphi_x(s,x,u) + h\varphi(s,x,u) + g)|_{u=X(s)}\, ds.$$

Тогда уравнение (4) запишется в виде

$$\varphi(t,x,X(t)) - \varphi(0,x,X(0)) = \int_0^t P(s,x,X(s)) * dX(s) + \int_0^t \Big(a\varphi_{xx}(s,x,X(s)) + b\varphi_x(s,x,X(s)) + c\varphi(s,x,X(s)) + f - \frac{1}{2}\sigma\varphi_{xu}(s,x,u)|_{u=X(s)} - \frac{1}{2} h\varphi_u(s,x,u)|_{u=X(s)} \Big)\, ds, \quad (6)$$

где $P(s,x,X(s)) = \sigma\varphi_x(s,x,X(s)) + h\varphi(s,x,X(s)) + g$.

Уравнение (4) в случае стандартного винеровского процесса $X(s)$ эквивалентно уравнению (6), однако последнее уравнение с симметричным интегралом имеет смысл для произвольной непрерывной функции $X(s)$ и детерминированных коэффициентов a, b, c, f, σ, h, g. Поэтому в дальнейшем в этом параграфе будем рассматривать уравнение (6) с детерминированными коэффициентами a, b, c, f, σ, h, g, где $X(s)$ есть непрерывная функция неограниченной вариации.

Поскольку мы ищем решение уравнения (6) в виде $\eta(s,x) = \varphi(s,x,X(s))$ с достаточно гладкой функцией $\varphi(s,x,u)$, то при этом предположении вычислим симметричный интеграл по формуле (3) в правой части уравнения (6):

$$\int_0^t P(s,x,X(s)) * dX(s) = \int_{X(0)}^{X(t)} P(t,x,u)\,du - \int_0^t\int_{X(0)}^{X(s)} (P(s,x,u))_s\,du\,ds = \int_{X(0)}^{X(t)} P(t,x,u)\,du - \int_0^t\int_{X(0)}^{X(s)} (\sigma_s\varphi_x(s,x,u) + \sigma\varphi_{sx}(s,x,u) + h_s\varphi(s,x,u) + h\varphi_s(s,x,u) + g_s)\,du\,ds. \tag{7}$$

Левую часть уравнения (6) мы можем записать в виде

$$\varphi(t,x,X(t)) - \varphi(0,x,X(0)) = (\varphi(t,x,X(t)) - \varphi(t,x,X(0))) + (\varphi(t,x,X(0)) - \varphi(0,x,X(0))) = \int_{X(0)}^{X(t)} \varphi_u(t,x,u)\,du + \int_0^t \varphi_s(s,x,X(0))\,ds. \tag{8}$$

Подставив соотношения (7) и (8) в уравнение (6), получим

$$\int_{X(0)}^{X(t)} \varphi_u(t,x,u)du + \int_0^t \varphi_s(s,x,X(0))ds = \int_{X(0)}^{X(t)} P(t,x,u)du - \int_0^t\int_{X(0)}^{X(s)} (\sigma_s\varphi_x(s,x,u) + \sigma\varphi_{sx}(s,x,u) + h_s\varphi(s,x,u) + h\varphi_s(s,x,u) + g_s)du\,ds + \int_0^t \Big(a\varphi_{xx}(s,x,X(s)) + b\varphi_x(s,x,X(s)) + c\varphi(s,x,X(s)) + f - \frac{1}{2}\sigma(s,x)\varphi_{xu}(s,x,u)|_{u=X(s)} - \frac{1}{2}h(s,x)\varphi_u(s,x,u)|_{u=X(s)}\Big)\,ds,$$

или

$$\int_{X(0)}^{X(t)} (\varphi_u(t,x,u) - P(t,x,u))\,du = \int_0^t \Big(-\varphi_s(s,x,X(0)) - \int_{X(0)}^{X(s)} (\sigma_s\varphi_x(s,x,u) + \sigma\varphi_{sx}(s,x,u) + h_s\varphi(s,x,u) + h\varphi_s(s,x,u) + g_s)du + a\varphi_{xx}(s,x,X(s)) + b\varphi_x(s,x,X(s)) + c\varphi(s,x,X(s)) + f - \frac{1}{2}\sigma\varphi_{xu}(s,x,u)|_{u=X(s)} - \frac{1}{2}h\varphi_u(s,x,u)|_{u=X(s)}\Big)\,ds. \tag{9}$$

Заметим, что правая часть равенства (9) есть функция ограниченной вариации, в то время как левая нет, в силу условия на функцию $X(s)$. Следовательно, мы можем приравнять интегранды в обеих частях равенства (9) к нулю, получим систему

$$\begin{cases} \varphi_u(s,x,u) = P(s,x,u), \\ \varphi_s(s,x,X(0)) = a\varphi_{xx}(s,x,X(s)) + b\varphi_x(s,x,X(s)) + c\varphi(s,x,X(s)) + f - \frac{1}{2}\sigma\varphi_{xu}(s,x,u)|_{u=X(s)} - \frac{1}{2}h\varphi_u(s,x,u)|_{u=X(s)} - \int_{X(0)}^{X(s)}(\sigma_s\varphi_x(s,x,u) + \sigma\varphi_{sx}(s,x,u) + h_s\varphi(s,x,u) + h\varphi_s(s,x,u) + g_s)du. \end{cases}$$

Далее, воспользовавшись первым уравнением системы, интеграл из правой части второго уравнения можно преобразовать следующим образом:

$$\int_{X(0)}^{X(s)} (\sigma_s\varphi_x(s,x,u) + \sigma\varphi_{sx}(s,x,u) +$$

$$+h_s\varphi(s,x,u) + h\varphi_s(s,x,u) + g_s)du =$$

$$= \int_{X(0)}^{X(s)} (\varphi_u(s,x,u))_s du =$$

$$= \int_{X(0)}^{X(s)} \varphi_{su}(s,x,u)du =$$

$$= \varphi_s(s,x,u)|_{u=X(s)} - \varphi_s(s,x,X(0)).$$

Тогда второе уравнение системы запишется в виде

$$\varphi_s(s,x,X(0)) = a\varphi_{xx}(s,x,X(s)) +$$

$$+ b\varphi_x(s,x,X(s)) + c\varphi(s,x,X(s)) + f -$$

$$-\frac{1}{2}\sigma\varphi_{xu}(s,x,u)|_{u=X(s)} -$$

$$-\frac{1}{2}h(s,x)\varphi_u(s,x,u)|_{u=X(s)} -$$

$$-\varphi_s(s,x,u)|_{u=X(s)} + \varphi_s(s,x,X(0)).$$

Следовательно, наша система уравнений примет вид

$$\begin{cases} \varphi_u(s,x,u) = \sigma\varphi_x(s,x,u) + h\varphi(s,x,u) + g, \\ \varphi_s(s,x,u)|_{u=X(s)} = a\varphi_{xx}(s,x,X(s)) + \\ \quad + b\varphi_x(s,x,X(s)) + c\varphi(s,x,X(s)) + \\ \quad + f - \frac{1}{2}\sigma\varphi_{xu}(s,x,u)|_{u=X(s)} - \\ \quad - \frac{1}{2}h\varphi_u(s,x,u)|_{u=X(s)}. \end{cases} \tag{10}$$

Преобразуем второе уравнение системы (10), воспользовавшись первым уравнением. При этом условимся в дальнейшем опускать переменные s, x, u. Имеем:

$$\varphi_u = \sigma\varphi_x + h\varphi + g,$$

$$\varphi_{xu} = \sigma_x\varphi_x + \sigma\varphi_{xx} + h_x\varphi + h\varphi_x + g_x.$$

Поэтому

$$\varphi_s = a\varphi_{xx} + b\varphi_x + c\varphi + f -$$

$$-\frac{1}{2}\sigma(\sigma_x\varphi_x + \sigma\varphi_{xx} + h_x\varphi + h\varphi_x + g_x) -$$

$$-\frac{1}{2}h(\sigma\varphi_x + h\varphi + g).$$

Таким образом, наша система примет вид

$$\begin{cases} \varphi_u = \sigma\varphi_x + h\varphi + g, \\ \varphi_s = \left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\varphi_{xx} + \\ \quad + \left(b - \frac{1}{2}\sigma\sigma_x - \sigma h\right)\varphi_x + \\ \quad + \left(c - \frac{1}{2}\sigma h_x - \frac{1}{2}h^2\right)\varphi + f - \frac{1}{2}\sigma g_x - \frac{1}{2}hg. \end{cases} \tag{11}$$

Нам также необходимо начальное условие $\varphi(0,x,X(0)) = \eta(0,x)$. Таким образом, решение уравнения (6) свелось к решению системы (11) дифференциальных уравнений в частных производных.

Построим явные формулы для решения потраекторного аналога стохастического дифференциального уравнения (6), т. е. покажем, что с помощью системы уравнений (11) можно найти решения уравнений (4) и (6).

Сначала решим первое уравнение системы (11), переписав его в виде

$$\varphi_u - \sigma\varphi_x = h\varphi + g. \tag{12}$$

Последнее уравнение является линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка (см. [2]). Составим для него характеристическую систему:

$$\begin{cases} \frac{du}{1} = dt, \\ \frac{dx}{-\sigma} = dt, \\ \frac{d\varphi}{h\varphi + g} = dt \end{cases}$$

и найдем два первых интеграла этой системы. Имеем:

$$\psi_1 = u + \int \frac{dx}{\sigma},$$

$$\psi_2 = \varphi \exp\left(\int \frac{h}{\sigma}dx\right) + \int \frac{g}{\sigma} \exp\left(\int \frac{h}{\sigma}dx\right)dx,$$

где ψ_1, ψ_2 – два первых интеграла характеристической системы. Таким образом, общее решение уравнения (12) имеет вид

$$F(s,\psi_1,\psi_2) = 0,$$

где $F(x,y)$ – произвольная функция двух переменных. Предположим, что это уравнение разрешимо относительно последней переменной, тогда

$$\varphi = -\exp\left(-\int \frac{h}{\sigma}dx\right)\int \frac{g}{\sigma}\exp\left(\int \frac{h}{\sigma}dx\right) +$$

$$+ \exp\left(-\int \frac{h}{\sigma}dx\right) U\left(s, u + \int \frac{dx}{\sigma}\right), \tag{13}$$

где $U(x,y)$ — произвольная дифференцируемая функция двух переменных. Чтобы найти эту функцию, воспользуемся вторым уравнением системы (11). Положив $\alpha = \frac{g}{\sigma}$, $\beta = \frac{h}{\sigma}$, $\gamma = \frac{1}{\sigma}$, $\xi = \exp\left(\int \beta dx\right)$, получим

$$\varphi = -\xi^{-1}\int \alpha\xi dx + \xi^{-1} U\left(s, u + \int \gamma dx\right).$$

Вычислив частные производные φ_s, φ_x и φ_{xx} и подставив их во второе уравнение системы (11), получим уравнение на U:

$$U_s(s,y)|_{y=u+\int\gamma dx} = A\,U_{yy}(s,y)|_{y=u+\int\gamma dx} + \\ + B\,U_y(s,y)|_{y=u+\int\gamma dx} + \\ + C\,U(s,y)|_{y=u+\int\gamma dx} + D, \quad (14)$$

где

$$A = \left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\gamma^2;$$

$$B = \left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(\gamma_x - 2\xi^{-1}\xi_x\gamma\right) + \\ + \left(b - \frac{1}{2}\sigma\sigma_x - \sigma h\right)\gamma - \int \gamma_s dx;$$

$$C = \left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(2\xi^{-2}(\xi_x)^2 - \xi^{-1}\xi_{xx}\right) - \\ - \left(b - \frac{1}{2}\sigma\sigma_x - \sigma h\right)\xi^{-1}\xi_x + \\ + \left(c - \frac{1}{2}\sigma h_x - \frac{1}{2}h^2\right)\left(\xi^{-1}\xi_s + 1\right);$$

$$D = \left(a - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\left(-2\xi^{-2}(\xi_x)^2\int \alpha\xi dx + \right. \\ \left. + \xi^{-1}\xi_{xx}\int \alpha\xi dx + \alpha - \alpha_x\xi\right) + \\ + \left(b - \frac{1}{2}\sigma\sigma_x - \sigma h\right)\left(\xi^{-1}\xi_x\int \alpha\xi dx - \alpha\xi\right) - \\ - \left(c - \frac{1}{2}\sigma h_x - \frac{1}{2}h^2\right)\int \alpha\xi dx - \xi^{-1}\xi_s\int \alpha\xi dx + \\ + \int \alpha_s\xi dx + \int \alpha\xi_s dx + f - \frac{1}{2}\sigma g_x - \frac{1}{2}hg.$$

Положим $y = u + \int \gamma dx$, тогда $y_x = \gamma$, $y_{xx} = \gamma_x$. Используя соотношения $f_y = \frac{f_x}{y_x}$ и $f_{yy} = \frac{f_{xx}}{(y_x)^2} - \frac{f_x y_{xx}}{(y_x)^3}$, которые справедливы для произвольных гладких функций $f(x)$ и $y(x)$, уравнение (14) можно переписать в виде

$$U_s = A_1 U_{xx} + B_1 U_x + C_1 U + D_1, \quad (15)$$

где $A_1 = \frac{A}{\gamma^2}$, $B_1 = \frac{B}{\gamma} - \frac{A\gamma_x}{\gamma^3}$, $C_1 = C$, $D_1 = D$. Составим новое уравнение по уравнению (15):

$$v_s(s,x) = A_1 v_{xx}(s,x) + B_1 v_x(s,x) + \\ + C_1 v(s,x) + D_1. \quad (16)$$

Предположим, что решение уравнения (16) можно представить в виде $v = v\left(s, \int \gamma dx\right)$, тогда функция $U = v\left(s, u + \int \gamma dx\right)$ будет являться решением уравнения (15). Следовательно,

$$\varphi(s,x,u) = -\xi^{-1}\int \alpha\xi\, dx + \\ + \xi^{-1} v\left(s, u + \int \gamma dx\right)$$

и случайная функция

$$\eta(s,x) = -\xi^{-1}\int \alpha\xi\, dx + \\ + \xi^{-1} v\left(s, X(s) + \int \gamma\, dx\right).$$

является решением уравнений (4) и (6).

Пример. Требуется решить уравнение

$$\eta(t,x) - \eta(0,x) = \int_0^t \left(4\frac{\partial^2\eta(s,x)}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + 5\frac{\partial\eta(s,x)}{\partial x} + 6\eta(s,x)\right) ds + \\ + \int_0^t \left(\frac{\partial\eta(s,x)}{\partial x} + \eta(s,x)\right) dX(s) \quad (17)$$

с начальным условием $\eta(0,x) = 3\exp(x + 2X(0))$, где второй интеграл в правой части уравнения (17) есть стохастический интеграл Ито по винеровскому процессу $X(s)$.

Решение $\eta(s,x) = \varphi(s,x,X(s))$ данного уравнения находим из системы

$$\begin{cases} \varphi_u = \varphi_x + \varphi, \\ \varphi_s = \frac{7}{2}\varphi_{xx} + 4\varphi_x + \frac{11}{2}\varphi \end{cases}$$

с начальным условием $\varphi(0,x,X(0)) = 3\exp(x + 2X(0))$. Ее решение имеет вид $\varphi(s,x,u) = 3\exp(13s + 2u + x)$, следовательно, случайная функция $\eta(s,x) = 3\exp(13s + 2X(s) + x)$ является решением стохастического дифференциального уравнения (17).

2. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОМЕРНЫМ ВИНЕРОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

Пусть $X(s) = (X^1(s), ..., X^n(s))$ — n-мерный винеровский процесс, компоненты которого являются независимыми процессами броуновского движения. Рассмотрим (см. [6]) систему стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$\eta^l(t,x)-\eta^l(0,x) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a^{ij} \frac{\partial^2 \eta^l(s,x)}{\partial x^i \, \partial x^j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^m b^i \frac{\partial \eta^l(s,x)}{\partial x^i} + c\eta^l(s,x) + f \right) ds +$$

$$+ \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \sigma^{il} \frac{\partial \eta^l(s,x)}{\partial x^i} + \right.$$

$$\left. + h^l \eta^l(s,x) + g^l \right) dX^l(s), \ \ l = 1, ..., n, \quad (18)$$

где вторые интегралы в правых частях есть стохастические интегралы Ито, $x \in R^m$, $x = (x^1, ..., x^m)$. Предполагается, что коэффициенты уравнений (18) удовлетворяют стандартным условиям предсказуемости, необходимым для существования стохастических интегралов Ито; при этом все $\sigma^{il}(s,x) \neq 0$ для любых s и x.

Будем искать решение уравнений (18) в виде $\eta(s,x) = \varphi(s,x,X(s))$, где

$$\varphi(s,x,u) = \begin{bmatrix} \varphi^1(s,x,u^1) \\ ... \\ \varphi^n(s,x,u^n) \end{bmatrix}.$$

В силу формулы Ито (5) преобразуем стохастические интегралы Ито из уравнений (18):

$$\int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \sigma^{il} \varphi^l_{x^i}(s,x,X^l(s)) + h^l \varphi^l(s,x,X^l(s)) + \right.$$

$$\left. + g^l \right) dX^l(s) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \sigma^{il} \varphi^l_{x^i}(s,x,X^l(s)) + \right.$$

$$\left. + h^l \varphi^l(s,x,X^l(s)) + g^l \right) * dX^l(s) -$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u^l} \left(\sum_{i=1}^m \sigma^{il} \varphi^l_{x^i}(s,x,u^l) + \right.$$

$$\left. + h^l \varphi^l(s,x,u^l) + g^l \right) |_{u^l = X^l(s)} ds,$$

$$l = 1, ..., n.$$

Каждое из уравнений (18) примет вид

$$\varphi^l(t,x,X^l(t)) - \varphi^l(0,x,X^l(0)) =$$

$$= \int_0^t P^l(s,x,X^l(s)) * dX^l(s) +$$

$$+ \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a^{ij} \varphi^l_{x^i x^j}(s,x,X^l(s)) + \right.$$

$$+ \sum_{i=1}^m b^i \varphi^l_{x^i}(s,x,X^l(s)) +$$

$$+ c(s,x)\varphi^l(s,x,X^l(s)) + f -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sigma^{il} \varphi^l_{x^i u^l}(s,x,u^l)|_{u^l = X^l(s)} -$$

$$\left. - \frac{1}{2} h^l \varphi^l_{u^l}(s,x,u^l)|_{u^l = X^l(s)} \right) ds,$$

$$l = 1, ..., n, \quad (19)$$

где $P^l(s,x,X^l(s)) = \sum_{i=1}^m \sigma^{il} \varphi^l_{x^i}(s,x,X^l(s)) + h^l \varphi^l(s,x,X^l(s)) + g^l$. Вычислим симметричные интегралы в правых частях уравнений (19) по формуле (3), учитывая, что $\eta^l(s,x) = \varphi^l(s,x,X^l(s))$:

$$\int_0^t P^l(s,x,X^l(s)) * dX^l(s) =$$

$$= \int_{X^l(0)}^{X^l(t)} P^l(t,x,u^l) du^l -$$

$$- \int_0^t \int_{X^l(0)}^{X^l(s)} \left(P^l(s,x,u^l) \right)_s du^l \, ds =$$

$$= \int_{X^l(0)}^{X^l(t)} P^l(t,x,u^l) du^l -$$

$$- \int_0^t \int_{X^l(0)}^{X^l(s)} \left(\sum_{i=1}^m \sigma^{il}_s \varphi^l_{x^i}(s,x,u^l) + \right.$$

$$+ \sigma^{il} \varphi^l_{sx^i}(s,x,u^l) + h^l_s \varphi^l(s,x,u^l) +$$

$$\left. + h^l \varphi^l_s(s,x,u^l) + g^l_s \right) du^l \, ds,$$

$$l = 1, ..., n. \quad (20)$$

Левые части уравнений (19) мы можем записать в виде

$$\varphi^l(t,x,X^l(t)) - \varphi^l(0,x,X^l(0)) = (\varphi^l(t,x,X^l(t)) - \varphi^l(t,x,X^l(0))) + (\varphi^l(t,x,X^l(0)) - \varphi^l(0,x,X^l(0))) = \int_{X^l(0)}^{X^l(t)} \varphi_{u^l}(t,x,u^l)du^l + \int_0^t \varphi_s^l(s,x,X^l(0))ds, \quad l=1,...,n. \quad (21)$$

Подставив соотношения (20) и (21) в уравнения (19), получим

$$\int_{X^l(0)}^{X^l(t)} \varphi_{u^l}^l(t,x,u^l)du^l + \int_0^t \varphi_s^l(s,x,X^l(0))ds = \int_{X^l(0)}^{X^l(t)} \left(\sum_{i=1}^m \sigma^{il}\varphi_{x^i}^l(t,x,u^l) + h^l\varphi^l(t,x,u^l) + g^l\right)du^l - \int_0^t \int_{X^l(0)}^{X^l(s)} \left(\sum_{i=1}^m \sigma_s^{il}\varphi_{x^i}^l(s,x,u^l) + \sum_{i=1}^m \sigma^{il}\varphi_{sx^i}^l(s,x,u^l) + h_s^l\varphi^l(s,x,u^l) + h^l\varphi_s^l(s,x,u^l) + g_s^l\right)du^l ds + \int_0^t \left(\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a^{ij}\varphi_{x^ix^j}^l(s,x,X^l(s)) + \sum_{i=1}^m b^i\varphi_{x^i}^l(s,x,X^l(s)) + c\varphi^l(s,x,X^l(s)) + f - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sigma^{il}\varphi_{x^iu^l}^l(s,x,u^l)|_{u^l=X^l(s)} - \frac{1}{2}h^l\varphi_{u^l}(s,x,u^l)|_{u^l=X^l(s)}\right)ds, \quad l=1,...,n.$$

Следовательно,

$$\int_{X^l(0)}^{X^l(t)} (\varphi_{u^l}^l(t,x,u^l) - P^l(t,x,u^l))du^l = \int_0^t \left(-\varphi_s^l(s,x,X^l(0)) - \int_{X^l(0)}^{X^l(s)} \left(\sum_{i=1}^m \sigma_s^{il}\varphi_{x^i}^l(s,x,u^l) + \sum_{i=1}^m \sigma^{il}\varphi_{sx^i}^l(s,x,u^l) + h_s^l\varphi^l(s,x,u^l) + h^l\varphi_s^l(s,x,u^l) + g_s^l\right)du^l + \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a^{ij}\varphi_{x^ix^j}^l(s,x,X^l(s)) + \sum_{i=1}^m b^i\varphi_{x^i}^l(s,x,X^l(s)) + c\varphi^l(s,x,X^l(s)) + f - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sigma^{il}\varphi_{x^iu^l}^l(s,x,u^l)|_{u^l=X^l(s)} - \frac{1}{2}h^l\varphi_{u^l}^l(s,x,u^l)|_{u^l=X^l(s)}\right)ds, \quad l=1,...,n. \quad (22)$$

Заметим, что правая часть каждого уравнения (22) является функцией ограниченной вариации, в то время как соответствующая ей левая нет, в силу условий на функции $X^l(s)$, $l=1,...,n$. Следовательно, мы можем приравнять соответствующие интегранды в обеих частях равенств (22) к нулю, в результате получим систему из $2n$ (детерминированных) уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \varphi_{u^l}^l(s,x,u^l) = P^l(s,x,u^l), \\ \varphi_s^l(s,x,X^l(0)) = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m a^{ij}\varphi_{x^ix^j}^l(s,x,X^l(s)) + \\ \quad + \sum_{i=1}^m b^i\varphi_{x^i}^l(s,x,X^l(s)) + c\varphi^l(s,x,X^l(s)) + \\ \quad + f - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \sigma^{il}\varphi_{x^iu^l}^l(s,x,u^l)|_{u^l=X^l(s)} - \\ \quad - \frac{1}{2}h^l\varphi_{u^l}(s,x,u^l)|_{u^l=X^l(s)} - \\ \quad - \int_{X^l(0)}^{X^l(s)} \left(\sum_{i=1}^m \sigma_s^{il}\varphi_{x^i}^l(s,x,u^l) + \right. \\ \quad + \sum_{i=1}^m \sigma^{il}\varphi_{sx^i}^l(s,x,u^l) + h_s^l\varphi^l(s,x,u^l) + \\ \quad \left. + h^l\varphi_s^l(s,x,u^l) + g_s^l\right)du^l, \quad l=1,...,n, \end{cases}$$

которая после преобразований примет вид

$$\begin{cases} \varphi^l_{u^l}(s,x,u^l) = \sum\limits_{i=1}^m \sigma^{il}\varphi^l_{x^i}(s,x,u^l) + \\ +h^l\varphi^l(s,x,u^l) + g^l, \\ \varphi^l_s(s,x,X^l(s)) = \sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{j=1}^m a^{ij}\varphi^l_{x^ix^j}(s,x,X^l(s)) + \\ +\sum\limits_{i=1}^m b^i\varphi^l_{x^i}(s,x,X^l(s)) + c\varphi^l(s,x,X^l(s)) + \\ +f - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^m \sigma^{il}\varphi^l_{x^iu^l}(s,x,u^l)|_{u^l=X^l(s)} - \\ -\frac{1}{2}h^l\varphi^l_{u^l}(s,x,u^l)|_{u^l=X^l(s)}, \\ l=1,...,n, \end{cases} \tag{23}$$

с начальным условием $\varphi(0,x,X(0)) = \eta(0,x)$.

Итак, решение уравнений (19) свелось к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных (23).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, основным результатом данной статьи можно считать тот факт, что решение определенного класса линейных эволюционных стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и их потраекторных аналогов удается свести к решению системы обычных дифференциальных уравнений в частных производных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ватанабе С., Икеда Н.** Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М.: Наука, 1986. 448 с.
2. **Матвеев Н. М.** Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Вышейшая школа, 1974. 768 с.
3. **Насыров Ф. С.** Симметричные интегралы и их применение в финансовой математике // Тр. МИАН. 2002. Т. 237. С. 265–278.
4. **Насыров Ф. С.** Симметричные интегралы и потраекторные аналоги стохастических дифференциальных уравнений // Вестник УГАТУ. 2003. Т. 4, № 2. С. 55–66.
5. **Натансон И. П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
6. **Розовский Б. Л.** Эволюционные стохастические системы. Линейная теория и приложения к статистике случайных процессов. М.: Наука, 1983. 208 с.
7. **Саймон Б.** Модель эвклидовой квантовой теории поля. М.: Мир, 1976. 357 с.
8. **Fleming W. H.** Distributed parameter stochastic systems in popular biology // Lect. Notes Econ. and Math. Syst. 1975. V. 107. P. 179–191.

ОБ АВТОРАХ

Насыров Фарит Сагитович, проф. каф. математики. Дипл. математик (ЛГУ, 1976). Д-р физ.-мат. наук по теории вероятностей и мат. статистике и по мат. анализу (защ. в ИМ им. Соболева, Новосибирск, 2002). Иссл. в обл. теории случайных процессов, теории функций, финансовой математики.

Мухаметова Гульнара Зуфаровна, ст. преп. той же кафедры. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 2000). Иссл. в обл. теории функций, теории вероятностей и теории случайных процессов.