

УДК 533.697.3

Э. Г. ГИМРАНОВ, В. Г. МИХАЙЛОВ

## РАСЧЕТ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГАЗОДИНАМИКИ ТОРМОЖЕНИЯ ВЯЗКОГО СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА В КАНАЛАХ ДЛА И ЭУ

Приводится интегральный метод расчета параметров струйно-турбулентной модели псевдоскачка в каналах ДЛА и ЭУ с поперечной и продольной кривизмой стенок. Влияние эффектов кривизны на параметры торможения вязкого сверхзвукового потока и интегральные характеристики в области псевдоскачка учитываются путем преобразования основных расчетных уравнений законов сохранения в криволинейную систему координат, учитывающую кривизну стенок канала, и дополнения их модифицированными гипотезами турбулентности Л. Прандтля. Торможение вязкого сверхзвукового потока; псевдоскачок; модифицированные гипотезы турбулентности; параметризация касательных напряжений

### ВВЕДЕНИЕ

Решение многих важнейших теоретических, экспериментальных и прикладных задач газовой динамики торможения вязкого сверхзвукового потока в псевдоскачке [1] в настоящее время приобретает особую актуальность в связи с необходимостью разработки и создания ряда устройств и аппаратов нового поколения авиационной и ракетно-космической техники. К примеру, повышение эффективности воздухозаборников как составной части прямоточных воздушно-реактивных двигателей со сверхзвуковым горением топлива (ПВРДсг) в основной камере сгорания для сверх- и гиперзвуковых летательных аппаратов или в камере дожигаания в ракетно-прямоточных двигателях (РПД) достигается осуществлением наиболее эффективного способа торможения сверхзвукового потока в проточной части входного канала. Требования к уменьшению потерь полного давления, минимальной длине зоны торможения, неравномерности поля скоростей и уровня пульсаций параметров газового потока на входе в камеру сгорания ПВРДсг или газогенератор РПД ставят необходимость подробного изучения газодинамической структуры псевдоскачка.

Схематизация течения в струйно-турбулентном псевдоскачке [2] заключается в том, что рассматривается непрерывная, под действием продольного градиента давления, деформация энтропии скоростей ограниченной стенками канала турбулентной струи от пер-

воначально невозмущенного развитого вязкого слоя через большие неравномерности к практически равномерному дозвуковому профилю. Излагаемые ниже математические выкладки основываются на следующих допущениях:

- статическое давление поперек струи в канале постоянно (кроме каналов с продольной кривизной);
- волновое ядро отсутствует, а центральная область течения принимается изоэнтروпической и равномерной;
- давление в изоэнтропическом ядре течения определяется изменением толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta^*(x)$ .

Граничные условия на поверхности стенок и внешней границе пограничного слоя для проекций скоростей записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} u = u_w; \quad V = V_w; \quad y = 0, \\ u \rightarrow U_\delta; \quad V \rightarrow V_\delta = U_\delta \operatorname{tg} \theta_k = \\ = U_\delta d\delta^*/dx \text{ при } y = \delta \end{aligned} \right\}. \quad (1)$$

На стенке канала  $V = V_w$  есть условие ее проницаемости. Если стенка непроницаема, то  $V_w = 0$ ; при  $V_w > 0$  имеет место подача газа в пограничный слой (вдув); случай  $V_w < 0$  соответствует отсосу газа из пограничного слоя.

Предложенная математическая модель струйно-турбулентного псевдоскачка позволяет рассчитать с учетом поперечной и продольной кривизны стенок канала интегральные характеристики струйного слоя, толщину вытеснения  $\delta^*(x)$  и толщину потери им-

пульса  $\delta^{**}(x)$  в функции продольной координаты по заданному распределению статического давления  $P(x)$  вдоль течения, а также применяя параметризацию касательных напряжений в области псевдоскачка с развитым струйным автомодельным профилем скорости, получить зависимость формпараметра профиля скорости  $\bar{U}_{1m}(x)$  вдоль области торжожения [3, 4].

### 1. УРАВНЕНИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ

Основными, описывающими в общем случае течения газа в псевдоскачке, будут уравнения законов сохранения расхода, энергии, импульса и уравнение состояния. В качестве замыкающих в зависимости от решения прямой, обратной или смешанной задач, могут быть выбраны уравнения изменения площади поперечного сечения канала, изменения давления вдоль продольной оси или определенная зависимость между  $p$  и  $F$ . Интегральные соотношения импульсов для вязкого слоя в криволинейной ортогональной системе координат будет иметь вид:

- для кольцевого цилиндрического канала

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \frac{\partial}{\partial x} \ln[(r_0 + H)\rho_\delta U_\delta^2] + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta = C_f/2 + C_m; \quad (2)$$

- для кольцевого конического канала

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \frac{\partial}{\partial x} \ln[x \operatorname{tg} \theta_k \rho_\delta U_\delta^2] + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta = C_f/2 + C_m; \quad (3)$$

- для кольцевого сферического канала

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_\delta U_\delta^2) + \frac{1}{R+H} \operatorname{ctg} \frac{x}{R+H} + \frac{2}{R+H} \frac{\partial \delta^*}{\partial x} \right] + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta = C_f/2 + C_m + C_f \ln(R+H) \pm \left[ \frac{\partial \delta^*}{\partial x} + C_m \left(1 - \frac{1}{\bar{U}_{1m}}\right) \right] \ln(R+H); \quad (4)$$

- для плоского прямолинейного канала

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_\delta U_\delta^2) + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta = C_f/2 + C_m; \quad (5)$$

- для плоского канала с продольной кривизной

$$\frac{\partial \delta^{**}}{\partial x} + \delta^{**} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho_\delta U_\delta^2) + \frac{2}{R+H} \frac{\partial \delta^*}{\partial x} \right] + \delta^* \frac{\partial}{\partial x} \ln U_\delta = C_f/2 + C_m + C_f \ln(R+H) \pm \left[ \frac{\partial \delta^*}{\partial x} + C_m \left(1 - \frac{1}{\bar{U}_{1m}}\right) \right] \ln(R+H); \quad (6)$$

Здесь  $C_f = 2\tau_\omega/\rho_\delta U_\delta^2$  — местный коэффициент трения;  $C_m = \rho_\omega V_\omega U_{1m}/\rho_\delta U_\delta$  — относительная массовая скорость газа через поверхность.

Как уже отмечалось ранее [2], в области псевдоскачка имеются две зоны. Первая зона — это слой смешения, поглощающий изэнтропическое ядро на участке  $\delta_1 < \delta < h$ , и вторая зона — с постоянной толщиной вязкого слоя  $\delta = h$ . Интегральные соотношения неразрывности записываются отдельно для указанных областей модели. В зоне  $\delta_1 < \delta < h$  будем иметь:

- для кольцевого цилиндрического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{\delta - \delta^*} \times \exp \left[ \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\ln((r_0 + H \pm \delta))}{\delta - \delta^*} d\delta \right] \times \exp \left[ \int_{\delta_1^*}^{\delta^*} \frac{\ln(r_0 + H \pm \delta^*)}{\delta^* - \delta} d\delta^* \right]; \quad (7)$$

- для кольцевого конического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta_1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{\delta - \delta^*} \times \exp \left[ \int_{\delta_1}^{\delta} \frac{\ln(r_0 + H)/\cos \theta_k \pm \delta}{\delta - \delta^*} d\delta \right] \times \exp \left[ \int_{\delta_1^*}^{\delta^*} \frac{\ln(r_0 + H)/\cos \theta_k \pm \delta^*}{\delta^* - \delta} d\delta^* \right]; \quad (8)$$

- для кольцевого сферического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta 1})} = \frac{(\delta_1 - \delta_1^*)^{1 \pm (\delta_1 + \delta_1^*) / (R+H)}}{(\delta - \delta^*)^{1 \pm (\delta_1 + \delta_1^*) / (R+H)}} \times \left[ \frac{\sin(x_0 / (R+H))}{\sin(x / (R+H))} \right]^{1 / (R+H)} \times \exp \left[ \pm \frac{(\delta + \delta^*) - (\delta_1 - \delta_1^*)}{R+H} \right]; \quad (9)$$

- для плоского прямолинейного канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta 1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{\delta - \delta^*}; \quad (10)$$

- для плоского канала с продольной кривизной

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta 1})} = \frac{(\delta_1 - \delta_1^*)^{1 \pm (\delta_1 + \delta_1^*) / (R+H)}}{(\delta - \delta^*)^{1 \pm (\delta_1 + \delta_1^*) / (R+H)}} \times \exp \left[ \pm \frac{(\delta + \delta^*) - (\delta_1 - \delta_1^*)}{R+H} \right]; \quad (11)$$

где

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta 1})} = \frac{M_\delta}{M_{\delta 1}} \left[ \frac{1 + (\gamma - 1) / 2 M_{\delta 1}^2}{1 + (\gamma - 1) / 2 M_\delta^2} \right]^{(\gamma + 1) / 2(\gamma - 1)}$$

На участке, где  $\delta = h$  уравнения неразрывности примут вид:

- для кольцевого цилиндрического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta 1})} = \left( \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{h - \delta^*} \right)^{1 + \ln[(r_0 + H) - h]} \times \exp \left( \pm \frac{\delta_1^* - \delta^*}{r_0 + H - h} \right); \quad (12)$$

- для кольцевого конического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta 1})} = \left( \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{h - \delta^*} \right)^{1 + \ln[(r_0 + H) / \cos \theta_k - h]} \times \exp \left[ \pm \frac{\delta_1^* - \delta^*}{(r_0 + H) / \cos \theta_k - h} \right]; \quad (13)$$

- для кольцевого сферического канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta 1})} = \frac{(\delta_1 - \delta_1^*) \sin(x_0 / (R+H))}{(h - \delta^*) \sin(x / (R+H))} \times \exp \left[ \pm \frac{1}{R+H} (\delta^* - \delta_1^* - \ln \left( \frac{\delta_1^* - h}{\delta^* - h} \right)^h) \right]; \quad (14)$$

- для плоского прямолинейного канала

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta 1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{h - \delta^*}; \quad (15)$$

- для плоского канала с продольной кривизной

$$\frac{q(M_\delta)}{q(M_{\delta 1})} = \frac{\delta_1 - \delta_1^*}{h - \delta^*} \times \exp \left[ \pm \frac{1}{R+H} (\delta^* - \delta_1^* - \ln \left( \frac{\delta_1^* - h}{\delta^* - h} \right)^h) \right]; \quad (16)$$

Исходя из аналогии с методом К. К. Федяевского и др. [5], задававших профили касательных напряжений в сечениях турбулентного плоского пограничного слоя в виде степенного полинома, в первом приближении допустим, что и в криволинейных каналах касательные напряжения могут быть описаны аналогичным образом, т. е. в виде полинома

$$\frac{\tau}{\tau_w} = \sum_{n=0}^3 D_n \eta^n,$$

или

$$\frac{\tau}{\tau_w} = D_0 + D_1 \eta + D_2 \eta^2 + D_3 \eta^3, \quad (17)$$

удовлетворяющего следующим условиям на границах:

$$\left. \begin{aligned} \eta = \frac{y}{\delta} = 0; \quad \frac{\tau}{\tau_w} = D_0; \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\tau}{\tau_w} \right) = D_1; \\ \eta = 1; \quad \frac{\tau}{\tau_w} = D_0 + D_1 + D_2 + D_3; \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\tau}{\tau_w} \right) = D_1 + 2D_2 + 3D_3. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Тогда уравнения касательных напряжений пограничного слоя для участка псевдоскачка, где присутствует сверхзвуковое несвязное ядро, имеют вид:

- для кольцевого цилиндрического канала

$$\frac{\tau}{\tau_w} = [1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + \frac{\delta}{\tau_w} \left( \frac{dP}{dx} + \rho_w u_w \frac{du_w}{dx} \right) \eta (1 - \eta)^2] /$$

$$/ \left( \left[ 1 \pm \frac{\eta(1-\eta)^2}{\bar{r}_0 + H} \right] \right) \quad (19)$$

- для кольцевого конического канала

$$\frac{\tau}{\tau_\omega} = \left[ 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + \frac{\delta}{\tau_\omega} \left( \frac{dP}{dx} + \rho_\omega u_\omega \frac{du_\omega}{dx} \right) \eta(1-\eta)^2 \right] / \left( \left[ 1 \pm \frac{\eta(1-\eta)^2}{(\bar{r}_0 + H) / \cos \theta_k} \right] \right); \quad (20)$$

- для кольцевого сферического и плоского канала с продольной кривизной

$$\frac{\tau}{\tau_\omega} = \left[ 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3 + \frac{\delta}{\tau_\omega} \left( \frac{dP}{dx} + \rho_\omega u_\omega \frac{du_\omega}{dx} \right) \eta(1-\eta)^2 - \frac{\tau_\omega \rho \nu_{t-TM}}{\delta} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial U_\delta}{\partial \eta} \eta^2 (3-2\eta) - \frac{\rho \nu_{t-TM}}{\tau_\omega \delta} \frac{\partial^2 U_\delta}{\partial \eta^2} \eta^2 \times \right. \\ \left. \times (1-\eta) \right] / \left[ 1 \pm \frac{\eta(1-\eta)^2}{(\bar{r}_0 + H) / \cos \theta_k} \right]. \quad (21)$$

## 2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПСЕВДОСКАЧКА

При расчете параметров псевдоскачка с использованием интегральных методов течение в вязкой области описывается зависимостями, аналогичными для свободной (неограниченной стенками канала) турбулентной, неизобарической, автомодельной струи. Профили скорости практически вдоль всего течения могут описываться некоторой универсальной функцией распределения дефекта скорости, не зависящей от трения о стенки канала и от продольного градиента давления

$$\frac{u}{U_\delta} = 1 - \bar{U}_{1m} f_1(\eta), \quad (22)$$

где  $f(\eta) = (U_\delta - u)/(U_\delta - u_\omega)$  — функция распределения дефекта скорости для плоских и осесимметричных течений обычно принимается равной

$$f_1(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4. \quad (23)$$

Изменения приведенной скорости вдоль оси канала  $Cr_\delta = f(x)$  и относительного статического давления на стенке канала  $\bar{P} = f(\bar{x})$  считаются известными. При расчете

используются предположения о постоянстве статического давления поперек пограничного слоя и эмпирические константы ( $\chi$  и  $k$ ), входящие в формулы Прандтля, не зависят от продольного градиента давления.

Вязкий слой в области псевдоскачка считается турбулентным и рассчитывается по «двухслойной» схеме. Внутренняя область, объединяющая в себя вязкий подслой, переходную область и область логарифмического профиля скорости, имеющая толщину примерно  $(0,15-0,2)\bar{\delta}$  толщины всего слоя (при отсутствии градиента давления), описывается полумпирической гипотезой турбулентности Прандтля [6]

$$\tau = \rho \chi^2 y^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (24)$$

Для внешней области, занимающей по толщине примерно  $(0,8-0,85)\bar{\delta}$  толщины слоя, с профилем скорости по форме напоминающим струйный, гипотеза турбулентности Прандтля имеет вид:

$$\tau = \rho k \delta (U_\delta - u_m) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (25)$$

Решение поставленной задачи основывается на методе интегральных соотношений. В результате расчета определяются формпараметр  $\bar{U}_{1m}$ , относительная толщина вязкого слоя  $\bar{\delta}$ , относительные интегральные толщины  $\bar{\delta}^*$  и  $\bar{\delta}^{**}$  в функции продольной координаты, а также строятся профили продольной скорости.

Для описания профиля скорости воспользуемся методом параметризации касательных напряжений и запишем окончательный вид уравнений для пристенного (внутреннего) слоя.

$$\frac{u}{U_\delta} = \frac{1}{\chi M_\delta \sqrt{\gamma \bar{P} \bar{\rho}}} \int_{\eta_\omega}^{\eta_m} \left[ C_f (1/(\eta^2 + 2\eta - 3)) + \bar{\delta} \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \frac{(1-\eta)^2}{\eta} \right]^{1/2} d\eta; \quad (26)$$

для внешней области плоского прямолинейного канала

$$\frac{u}{U_\delta} = 1 - \bar{U}_{1m} \left[ \frac{1}{4k\bar{\rho}(\bar{U}_{1m})^2} (C_f(2\eta -$$

$$-2\eta^3 + \eta^4)) + \psi(6\eta^2 - 8\eta^3 + 3\eta^4)] , \quad (27)$$

где

$$\psi = \frac{\delta}{3\gamma\bar{P}M_\delta^2} \left[ \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} + \bar{\rho}\gamma\bar{P}M_\delta^2(1 - \bar{U}_{1m}) \times \right. \\ \left. \times ((1 - \bar{U}_{1m}) \frac{d \ln Cr_\delta}{d\bar{x}} - \frac{d \ln Cr_\delta}{d\bar{x}} - \frac{d\bar{U}_{1m}}{d\bar{x}}) \right] .$$

Из (27) легко получить выражение для функции распределения дефекта скорости

$$f_2(\eta) = 1 - \frac{C_f}{C_f + \psi} [ C_f(2\eta - 2\eta^3 + \\ + \eta^4) + \frac{\psi}{C_f + \psi} (6\eta^2 - 8\eta^3 + 3\eta^4) ] . \quad (28)$$

В точке отрыва, где  $C_f = 0$ ,  $U_{1m} = 1$ ,  $\delta/(12k\rho M_\delta^2) d\bar{P}/d\bar{x} = 1$ , функция  $f_2(\eta)$  имеет вид

$$f_2(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4, \quad (29)$$

т.е. адекватна функции распределения дефекта скорости для струйного, турбулентного, неограниченного стенками канала течения (23). В начальном и конечном сечениях псевдоскачка, где  $dP/dx = 0$ ,  $\bar{U}_{1m} = \bar{U}_{1m}(x) = \text{const}$ , функция  $f_2(\eta)$  запишется как

$$f_2(\eta) = 1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4. \quad (30)$$

Для внутренней области вязкого слоя в кольцевом канале профиль скорости имеет вид

$$\frac{u}{U_\delta} = \frac{1}{\chi M_\delta \sqrt{\gamma \bar{P} \bar{\rho}}} \int_{\eta_w}^{\eta_m} \left[ \frac{C_f}{2} (2\eta + \right. \\ \left. 1/\eta^2 - 3)(1 + \frac{\eta(1-\eta)^2}{\bar{r}_0 + \bar{H}}) + \right. \\ \left. + \delta \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \frac{(1-\eta)^2}{\eta(1+\eta(1-\eta)^2/(\bar{r}_0 + \bar{H}))} \right]^{1/2} d\eta; \quad (31)$$

для внешней области вязкого слоя кольцевого канала профиль скорости записывается как

$$\frac{u}{U_\delta} = 1 - \bar{U}_{1m} + \frac{\bar{r}_0 + \bar{H}}{2k\bar{U}_{1m}\bar{\rho}} \times \\ \times \int_{\eta_w}^{\eta_m} \left[ C_f \frac{(1-3\eta^2+2\eta^3)}{\bar{r}_0 + \bar{H} + (1-\eta)^2\eta} + \right. \\ \left. + 6\psi \frac{(1-\eta)^2}{\bar{r}_0 + \bar{H} + \eta(1-\eta)^2} \right] d\eta; \quad (32)$$

Таким образом, из рассматриваемой приближенной методики расчета профилей скорости в области псевдоскачка следует, что продольный градиент давления  $d\bar{P}/d\bar{x}$  и местный коэффициент трения  $C_f$  не оказывают влияния на форму профиля скорости только в поперечных сечениях, соответствующих точке отрыва, началу и концу псевдоскачка. Во всех остальных сечениях при расчете профиля скорости внешней области вязкого слоя необходимо учитывать продольный градиент давления и влияние трения о стенки канала.

Из уравнений (27) и (11) при условии  $\eta = 1$  и  $u = U_\delta$  получим дифференциальные уравнения изменения формпараметра профиля скорости вдоль псевдоскачка

- для течения в плоском канале в виде

$$\frac{d\bar{U}_{1m}}{d\bar{x}} = \left( 3\frac{C_f}{\delta} + \frac{1}{\gamma\bar{P}M_\delta^2} \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} \right) \times \\ \times \frac{1}{\bar{\rho}(1-\bar{U}_{1m})} - \frac{12k\bar{U}_{1m}^2}{\delta(1-\bar{U}_{1m})} + \\ + (1-\bar{U}_{1m}) \frac{d \ln Cr_\delta}{d\bar{x}}; \quad (33)$$

- для течения в цилиндрическом канале как

$$\frac{d\bar{U}_{1m}}{d\bar{x}} = C_f \frac{q_1}{2\bar{\rho}\delta(1-\bar{U}_{1m})q_2} - \\ - \frac{\bar{U}_{1m}^2 k}{\delta(1-\bar{U}_{1m})q_2} + \frac{1}{\bar{\rho}(1-\bar{U}_{1m})\gamma\bar{P}M_\delta^2} \times \\ \times \frac{d\bar{P}}{d\bar{x}} + (1-\bar{U}_{1m}) \frac{d \ln Cr_\delta}{d\bar{x}}, \quad (34)$$

где

$$q_1 = \int_0^1 (1-3\eta^2+2\eta^3)/(1 \pm \frac{\eta(1-\eta)^2}{\bar{r}_0 + \bar{H}}) d\eta, \\ q_2 = \int_0^1 \eta(1-\eta)^2/(1 \pm \frac{(1-\eta)^2\eta}{\bar{r}_0 + \bar{H}}) d\eta.$$

Для численного решения уравнений (26, 27), (31–34) необходимо определить закономерности изменения толщины вязкого слоя  $S$  и местного коэффициента трения  $C_f$  вдоль псевдоскачка. В первом приближении из соображений безотрывности течения в классическом псевдоскачке примем местный коэффициент трения  $C_f$  постоянным вдоль всего псевдоскачка ( $C_f = 0,003$ ), а изменение относительной толщины вязкого слоя  $\delta$  выразим в виде кусочной функции. На участке  $\delta_1 < \bar{\delta} < 0,5$

- для плоского канала в виде

$$\bar{\delta} = \delta + (\bar{\delta}_1 - \delta_1^*) \frac{q(M_{\delta 1})}{q(M_{\delta})}; \quad (35)$$

для кольцевого канала

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{x}} &= (M_{\delta}^2 - 1) \frac{\bar{\delta} - \delta^*}{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta})} \times \\ &\times Cr_{\delta} \frac{dCr_{\delta}}{d\bar{x}} + \frac{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta}^*)}{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta})} \frac{d\bar{\delta}^*}{d\bar{x}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Согласно экспериментальным данным [7], в области псевдоскачка относительная скорость на оси течения описывается выражением

$$\begin{aligned} Cr_{\delta} &= Cr_{\delta 1} \times \\ &\times \exp\left(-2 \ln\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} Cr_{\delta 1}\right) \frac{\bar{x}}{\bar{l}_{\text{псск}}}\right), \end{aligned}$$

критический режим течения наступит на расстоянии  $\bar{x}_{\text{кр}}$  от начала псевдоскачка

$$\bar{x}_{\text{кр}} = -\bar{l}_{\text{псск}} \frac{Cr_{\delta \text{кр}}}{Cr_{\delta 1}} / (2 \ln \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} Cr_{\delta 1}). \quad (37)$$

Относительная толщина вытеснения в критическом сечении  $\bar{\delta}_{\text{кр}}^*$  будет определяться по выражениям

- для плоского течения как

$$\bar{\delta}_{\text{кр}}^* = 0,5 - (\bar{\delta}_1 - \delta_1^*) q(M_{\delta 1}); \quad (38)$$

- для течения в кольцевом канале

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\delta}_{\text{кр}}^*}{d\bar{x}} &= (0,5 - \bar{\delta}_{\text{кр}}^*) \times \\ &\times \frac{1 - M_{\delta}^2}{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta}_{\text{кр}}^*)} \frac{d \ln Cr_{\delta}}{d\bar{x}} \end{aligned} \quad (39)$$

Одно из основных допущений предлагаемой методики расчета состоит в том, что на участке равномерного сверхзвукового ядра предполагается изменение относительной толщины вытеснения  $\bar{\delta}^*$  по линейному закону от  $\bar{\delta}^*$  до  $\bar{\delta}_{\text{кр}}^*$  в виде

$$\bar{\delta}^* = \bar{\delta}_1^* + \frac{\bar{\delta}_{\text{кр}}^* - \bar{\delta}_1^*}{\bar{x}_{\text{кр}}} \bar{x}. \quad (40)$$

На участке  $\bar{\delta} > 0,5$  толщину вязкого слоя будем считать постоянной

$$\delta = 0,5,$$

а толщина вытеснения будет определяться

- для плоского течения из выражения

$$\bar{\delta}^* = 0,5 - (\bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_1^*) \frac{q(M_{\delta 1})}{q(M_{\delta})}; \quad (41)$$

- для течения в кольцевом канале

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\delta}^*}{d\bar{x}} &= (0,5 - \bar{\delta}^*) \times \\ &\times \frac{1 - M_{\delta}^2}{1 + \ln(\bar{r}_0 + \bar{H} + \bar{\delta}_{\text{кр}}^*)} \frac{d \ln Cr_{\delta}}{d\bar{x}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Соотношение (40) является упрощенным и может уточняться в дальнейшем. Относительная толщина потери импульса определяется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\delta}^{**}}{d\bar{x}} + \bar{\delta}^{**} \frac{d}{d\bar{x}} \ln(\gamma \bar{P} M_{\delta}^2) + \\ + \bar{\delta}^* \frac{d \ln Cr_{\delta}}{d\bar{x}} = \frac{C_f}{2}. \end{aligned} \quad (43)$$

Для решения дифференциальных уравнений (33), (34), (36), (39), (42) и (43) начальные условия выбирались согласно предположению, что начальный профиль скорости псевдоскачка можно описать степенной зависимостью вида

$$\frac{u}{U_{\delta}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}. \quad (44)$$

Тогда начальные (при  $\bar{x}_1 = 10^{-6}$ ) интегральные характеристики можно определить из выражений

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 1 - 7(D-1) \frac{D^3}{2 \ln\left(\frac{D}{D-1}\right)} - \frac{D^2}{2} - \frac{D}{4} - \frac{1}{6}; \quad (45)$$

стенки канала, где средняя скорость течения  $u = 0$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = 1 - \frac{\delta^*}{\delta} - 7(D-1) \times \frac{D^{7/2}}{2 \ln((\sqrt{D} + 1)/(\sqrt{D} - 1))} - D^3 - \frac{D^2}{3} - \frac{D}{5} - \frac{1}{7}, \quad (46)$$

где  $D = 1 + \frac{1}{(\gamma-1)/2M_1^2}$ .

Численный расчет приведенных выше дифференциальных уравнений осуществлялся по методу Рунге-Кутты с начальными условиями  $\bar{x}_1 = 10^{-6}$  и  $(\bar{U}_{1m})_1 = 0,236$ , с шагом  $d\bar{x} = 0,17$ . Определенные интегралы рассчитывались численным способом по методу Симпсона, причем нижний предел интеграла принимался на некотором расстоянии от

$$\eta_w = (30 \div 70) \delta \frac{v_t}{U_\delta \sqrt{C_f/2}},$$

верхний предел соответствовал наружной границе внутренней турбулентной зоны и определялся как  $\eta_m = 0,15$ .

Склейка внутренней и внешней турбулентных зон в первом приближении производилась только по равенству скоростей ( $U_{m+} = U_{m-}$ ) и показана на рис. 1. Расчеты производились при начальных условиях  $M_1 = 1,99$ ;  $Re_1 = 74 \times 10^7$ ;  $\delta_1 = 0,3$  для течения в плоском канале (рис. 2).

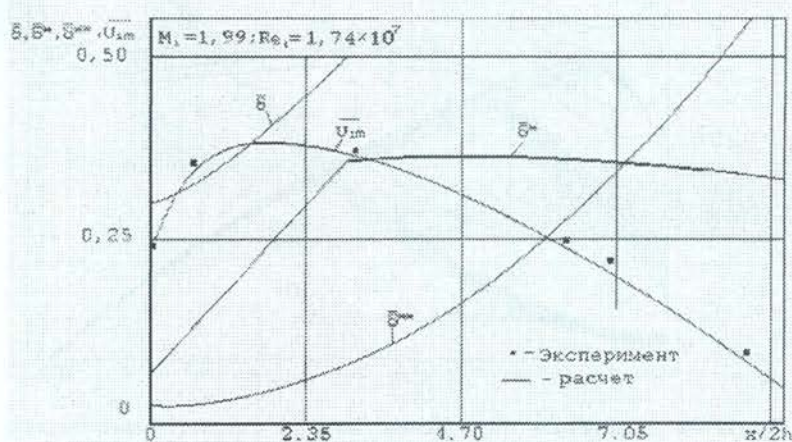


Рис. 1. Склейка скорости внутренней и внешней областей вязкого слоя в некоторых сечениях псевдоскачка

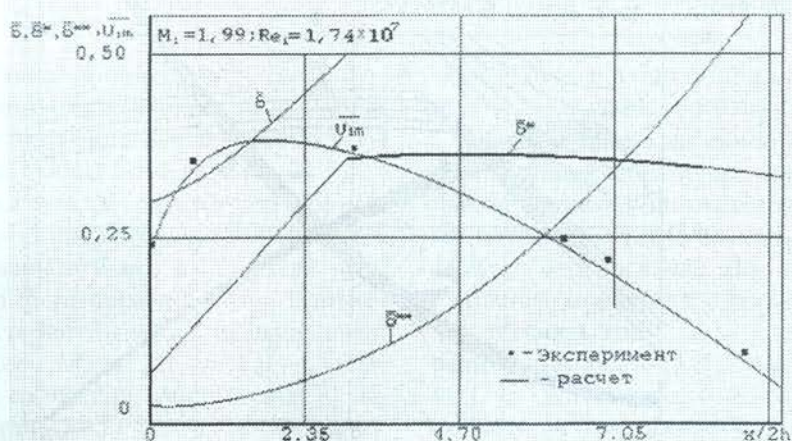


Рис. 2. Сравнение расчетных и экспериментальных значений форм — параметра вязкого сверхзвукового потока газа в псевдоскачке при начальных условиях  $M_1 = 1,99$ ,  $Re_1 = 1,74 \times 10^7$ ,  $\delta_1 = 0,3$

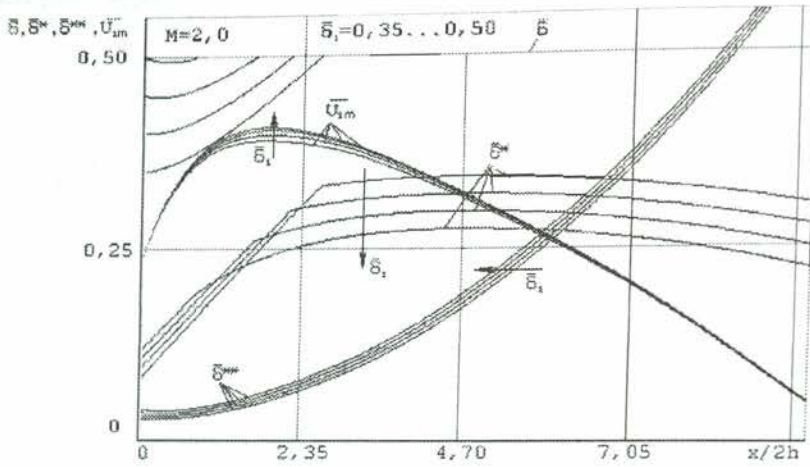


Рис. 3. Изменение параметров торможения вязкого сверхзвукового потока газа вдоль псевдоскачка при  $M_1 = 2,0$

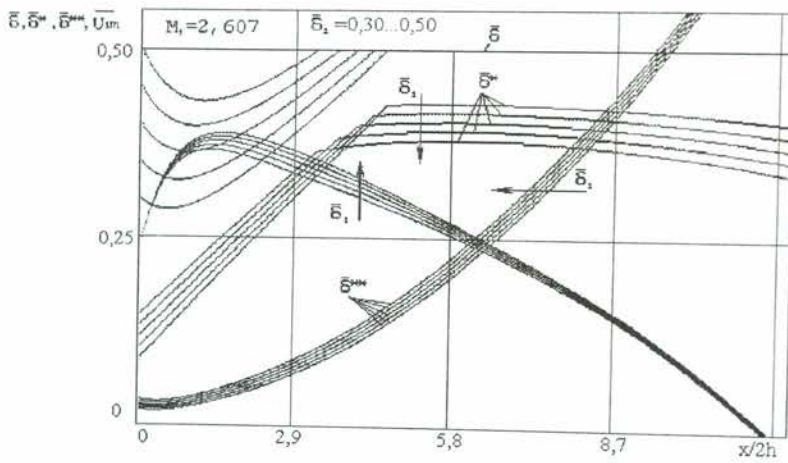


Рис. 4. Изменение параметров торможения вязкого сверхзвукового потока газа вдоль псевдоскачка при  $M_1 = 2,607$

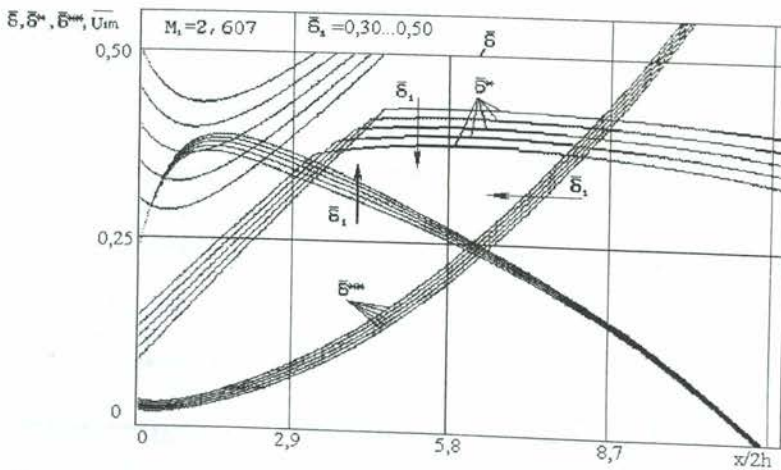


Рис. 5. Изменение параметров торможения вязкого сверхзвукового потока газа вдоль псевдоскачка при  $M_1 = 3,593$



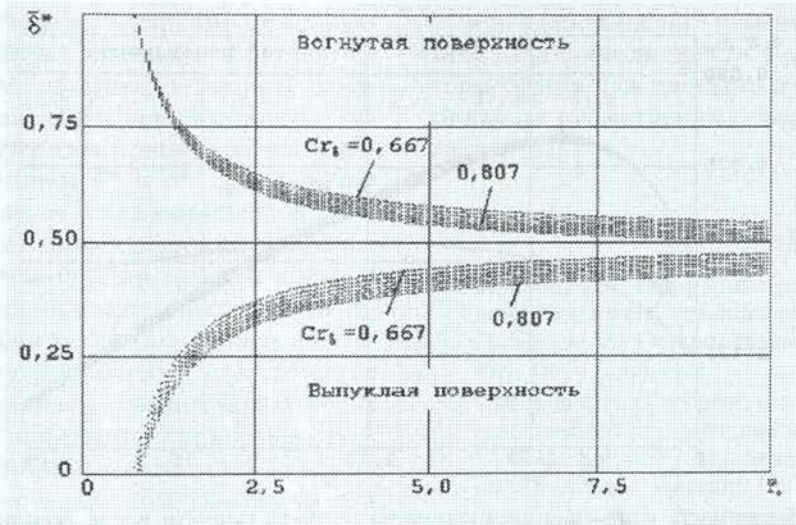


Рис. 6. Зависимость относительной толщины вытеснения вязкого  $\bar{\delta}^*$  в предотрывной области от радиуса кривизны стенок кольцевого цилиндрического канала  $\bar{r}_0 = r_0/\delta$

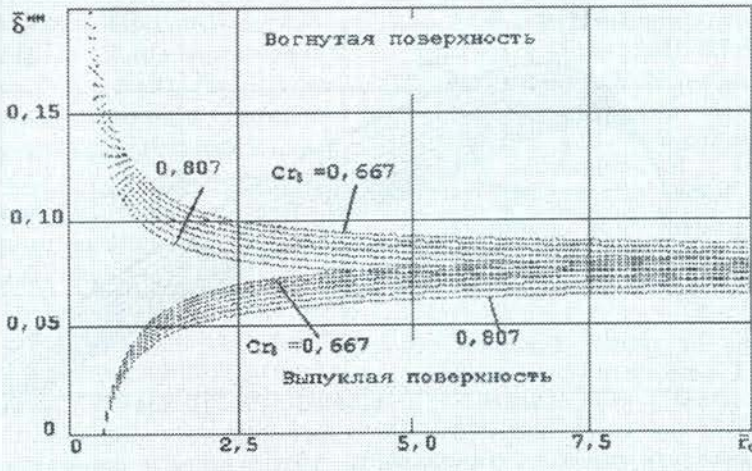


Рис. 7. Зависимость относительной толщины потери импульса вязкого слоя  $\bar{\delta}^{**}$  в предотрывной области от радиуса кривизны стенок кольцевого цилиндрического канала  $\bar{r}_0 = r_0/\delta$

Анализ результатов показывает, что полученные при расчете зависимости  $\bar{U}_{1m} = f(\bar{x})$  и  $u/U_\delta = f(\eta)$  достаточно хорошо соответствуют экспериментальным данным [7].

Паряду с расчетами параметров торможения в псевдоскачке с определенными начальными условиями были выполнены расчеты изменения формпараметра  $\bar{U}_{1m}$  и интегральных характеристик вдоль псевдоскачка в диапазоне чисел Маха  $M_1 = 2,0 - 3,593$  при различных толщинах вязкого слоя  $\bar{\delta}_1 = 0,30 - 0,5$  (рис. 3-5). Расчеты показали, что в заданном диапазоне чисел Маха и начальных относительных толщин пограничного слоя отрывные течения отсутствуют, что

согласуется с экспериментальными исследованиями классического псевдоскачка.

Исследовалось влияние поперечной кривизны стенок канала на значения относительных величин толщины вытеснения и толщины потери импульса вязкого слоя в струйной области псевдоскачка. Для этого на примере струйного профиля скорости для предотрывной области, где  $U_{1m} = 1$ , в функции поперечной кривизны  $\bar{r}_0$  при различных значениях  $Cr_{\delta_1}$  для выпуклой и вогнутой поверхности канала были построены зависимости относительной толщины вытеснения  $\bar{\delta}^* = \delta^*/\delta$  и относительной толщины потери импульса  $\bar{\delta}^{**} = \delta^{**}/\delta$  (рис. 6, 7).

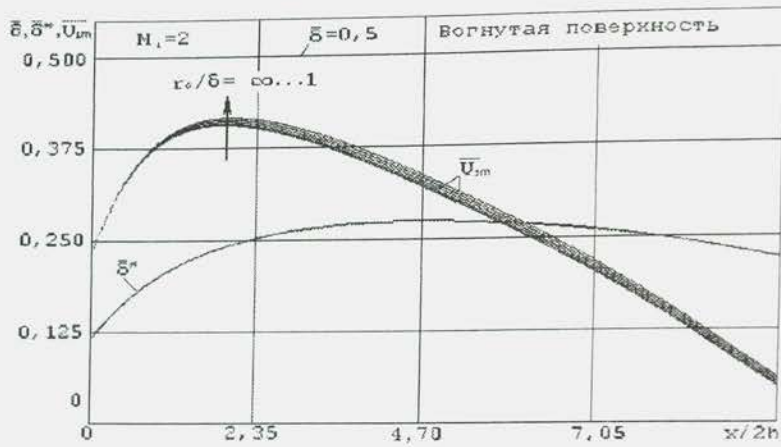


Рис. 8. Зависимость изменения формпараметра профиля скорости вдоль псевдоскачка от кривизны вогнутой поверхности канала  $M_1 = 2,0$

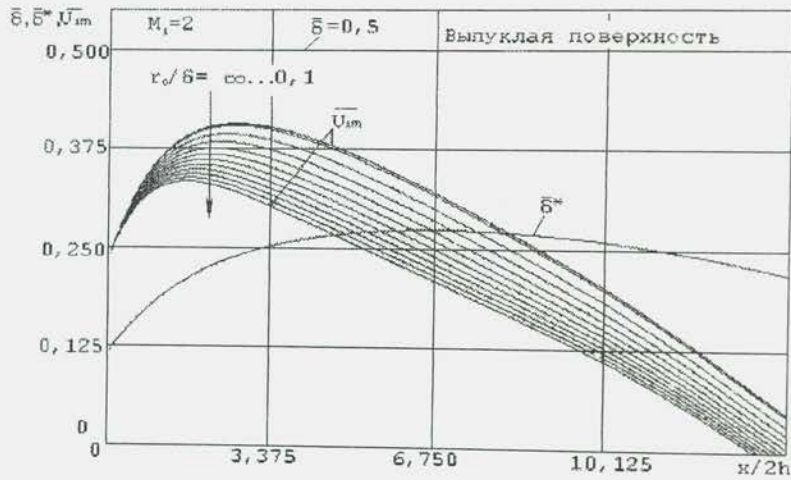


Рис. 9. Зависимости изменения формпараметра профиля скорости вдоль псевдоскачка от кривизны выпуклой поверхности канала при  $M_1 = 2,0$

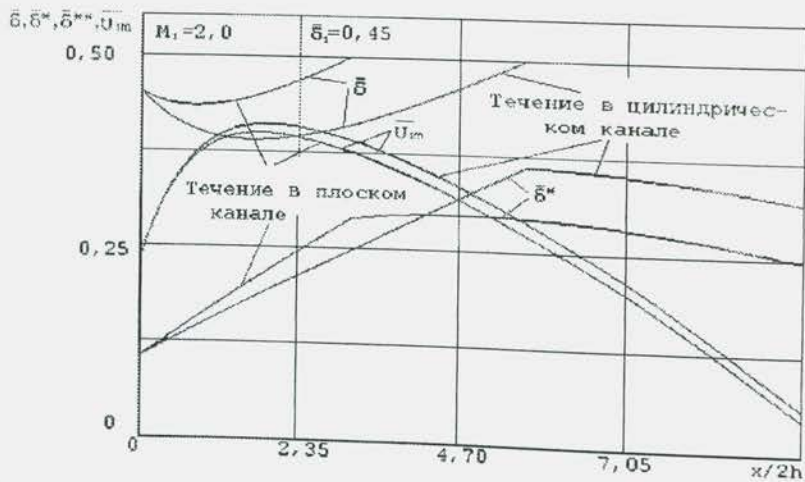


Рис. 10. Сравнение параметров торможения в течении типа псевдоскачка в плоском и цилиндрическом каналах при  $M_1 = 2,0$

Анализ полученных зависимостей показал, что при радиусе кривизны  $2,5 > r > (5,0 - 7,5)$  абсолютные величины относительных толщин вытеснения и потери импульса асимптотически приближаются к абсолютным величинам  $\bar{\delta}^*$  и  $\bar{\delta}^{**}$  для течения в плоском канале, и, следовательно, в этом диапазоне относительных радиусов кривизны канала  $r_0$  с учетом незначительной погрешности, в интегральных методиках расчета течений типа псевдоскачка можно пользоваться формулами неразрывности и количества движения для плоского течения. При относительном радиусе поперечной кривизны стенки кольцевого цилиндрического канала  $r_0 < 2,5$  использование в расчетах уравнений для плоского течения ведет к появлению существенных погрешностей.

Для случая с сомкнувшимися вязкими слоями в начальном сечении области торможения построены зависимости формпараметра профиля скорости вдоль псевдоскачка при числе Маха  $M_1 = 2$  и относительной кривизне стенок  $r_0$  (рис. 6–9). Анализ расчетных кривых показал, что на вогнутой поверхности влияние кривизны стенки на зависимость изменения и абсолютную величину формпараметра профиля скорости незначительно и в определенных случаях, например, при предварительных расчетах, поперечную кривизну канала можно не учитывать, чего нельзя сказать об изменении формпараметра профиля скорости на выпуклой поверхности. Здесь при уменьшении относительной кривизны стенки использование уравнений плоского течения недопустимо.

Проведены расчеты и для сравнения параметров торможения в области псевдоскачка, на рис. 10 представлены зависимости толщины вязкого слоя  $\bar{\delta}$ , толщины вытеснения  $\bar{\delta}^*$  и формпараметра профиля скорости  $\bar{U}_{tm}$  в функции продольной координаты при числе  $M_1 = 2$  перед областью торможения в плоском прямолинейном и цилиндрическом каналах.

### ВЫВОДЫ

Аналогичные расчеты проводились для различных чисел Маха. Анализ расчетных зависимостей позволяет заключить:

- сверхзвуковое ядро в цилиндрическом канале имеет большую протяженность, чем в плоском;
- с ростом числа  $M_1$  протяженность сверхзвукового ядра в плоском и цилиндрическом каналах постепенно выравнивается;

- в зависимостях изменения формпараметра профиля скорости  $\bar{U}_{tm}$  вдоль области торможения для плоского и цилиндрического канала существенных различий не наблюдается.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крокко, Л. Одномерное рассмотрение газовой динамики установившихся течений / Л. Крокко // Основы газовой динамики. М.: ИЛ, 1963. С. 64–324.
2. Gimranov, E. G. Theoretical investigation of pseudo-shock in ramjet engine / E. G. Gimranov, V. G. Michailov // The Scient.-Techn. Seminar on GT Engines. Istanbul, 1997. P. 26–41.
3. Лапин, Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа / Ю. В. Лапин. М.: Наука, 1982. 312 с.
4. Гиневский, А. С. Методы расчета турбулентного пограничного слоя / А. С. Гиневский, В. А. Иоселевич, А. В. Колесников [и др.] // Механика жидкости и газа. Итоги науки и техники. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 155–305.
5. Федяевский, К. К. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости / К. К. Федяевский, А. С. Гиневский, А. В. Колесников. Л.: Судостроение, 1973. Гл. 1, 11.
6. Prandtl, L. Ueber Reibungsschichten bei dreidimensionalen Stromungen. Albert / L. Prandtl. Betz zum 60. Geburtstag. Göttingen, 1956. P. 134–141.
7. Tamaki, T. Study of pseudo-shock. 2-rept. X-tupe pseudo-shock / T. Tamaki, Y. Tamita, R. Yamane // Bull. JSME. 1971. № 74. P. 807–817.

### ОБ АВТОРАХ



**Гимранов Эрнст Гайсович**, проф. каф. прикладной гидромеханики. Дипл. инж.-мех. по авиац. двигателям (УАИ, 1965). Д-р техн. наук по тепловым двигателям (УАИ, 1990). Иссл. в обл. газовой динамики двигателей.



**Михайлов Валерий Германович**, проф. каф. основ констр. механизмов и машин. Дипл. инж.-мех. по гидравлич. машинам (УАИ, 1985). Д-р техн. наук по тепловым двигателям (УГАТУ, 1999). Иссл. в обл. газовой динамики двигателей.