Уфа: УГАТУ, 2005 Вестник УГАТУ Т. 6, № 2 (13). С. 40–44

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 531.388

Р. Р. ИСЛАМОВ, Р. Р. ИСЛАМОВ (МЛ.)

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Исследуется устойчивость решений определенного класса дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Для данной системы дифференциальных уравнений изучаются простой и комбинационный параметрический резонансы. Установлены теоремы об устойчивости решений для различных классов матриц возмущений. Приводятся формулы для определения границы области неустойчивости через параметры системы. Полученные результаты применяются для исследования устойчивости четырехгироскопной вертикали при вибрации основания. *Параметрический резонанс; устойчивость; уравнения движения; гировертикаль*

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается класс дифференциальных уравнений вида

$$A\ddot{X} + G\dot{X} + BX = \varepsilon G_1(\theta t)\dot{X} + \varepsilon A_1(\theta t)X. \quad (1.1)$$

Здесь $X = \{x_1, ..., x_{2n}\}$ – вектор, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. $A$, $B$ – вещественные постоянные диагональные матрицы:

$$\begin{aligned} &A = \operatorname{diag}(a_1, ..., a_{2n}),\\ &B = \operatorname{diag}(b_1, ..., b_{2n}),\\ &a_k > 0,\ b_k > 0,\ d_k > 0,\\ &(k = 1, 2, ..2n); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$G$ – кососимметрическая матрица вида

$$G = \begin{pmatrix} 0 & H_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ -H_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & H_3 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & -H_3 & 0 & \dots & 0 & 0\\ . & . & . & . & \dots & . & .\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & H_{2n-1}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -H_{2n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$(H_{2m-1} > 0,\ m = 1, 2 \dots n)$; $G_1(\theta t)$, $A_1(\theta t)$ – вещественные периодические $2n \times 2n$ матрицы с периодом $T = 2\pi\theta^{-1}$, элементы этих матриц представимы рядами Фурье:

$$G_1(\tau) = \|\mu_{rs}(\tau)\|_1^{2n},\ \mu_{rs}(\tau) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_{rs}^{(k)} e^{ik\tau};$$

$$A_1(\tau) = \|\kappa_{rs}(\tau)\|_1^{2n},\ \kappa_{rs}(\tau) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \kappa_{rs}^{(k)} e^{ik\tau};$$

$$\left(\tau = \theta t,\ i = \sqrt{-1},\ \mu_{rs}^{(0)} = 0,\ \kappa_{rs}^{(0)} = 0\right), \quad (1.4)$$

матрицы $G_1(\tau)$ и $A_1(\tau)$ имеют нулевые средние значения; точка над переменной означает дифференцирование по времени.

Уравнениями вида (1.4) описываются движения многих гироскопических систем при параметрических возмущениях (малых по амплитуде). Целью данной работы является исследование устойчивости решений системы (1.1) для различных классов матриц возмущений $G_1(\theta t)$, $A_1(\theta t)$.

Аналогичная задача, без учёта гироскопических членов $G\dot{X}$, рассмотрена в работе [1]. Получены формулы, определяющие границы области неустойчивости при параметрическом резонансе непосредственно через элементы матриц исходной системы. Результаты работы используются для исследования устойчивости четырёхгироскопной вертикали при вибрации основания.

## 2. О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ

Уравнение (1.1) при $\varepsilon = 0$ будем называть невозмущенным, а при $\varepsilon \neq 0$ – возмущенным. Это возмущенное уравнение при сколь угодно малом $\varepsilon$ и некотором $\theta$ может иметь неограниченные решения, в отличие от невозмущенного уравнения. В этом случае говорят, что в системе, описываемой уравнением (1.1), наступает параметрический резонанс.

Известно [2], что на плоскости параметров $\varepsilon$, $\theta$ множество точек, в которых уравнение (1.1) имеет неограниченное при $t \to \infty$ решение, распадается на счетное число областей вида клинышков, примыкающих острыми концами к точкам $(0, \theta_0)$, где $\theta_0$ – критическая частота. Частота $\theta_0$ называется критической, если для любого $\delta > 0$ найдутся $\varepsilon$, $\theta$ такие, что при $|\varepsilon| < \delta$, $|\theta - \theta_0| < \delta$ уравнение (1.1) имеет неограниченные при $t \to \infty$ решения.

**Определение 1.** Будем относить систему уравнений (1.1) к классу M, если её характеристические показатели [3] расположены симметрично относительно мнимой оси.

При приближении параметров $\varepsilon$, $\theta$ к границе области неустойчивости характеристические показатели $p_1, p_2$ с разных сторон приближаются к мнимой оси. Они совпадают, когда точка на плоскости параметров $\varepsilon$, $\theta$ выходит на границу области неустойчивости. Тогда уравнение границы области неустойчивости системы класса M можно получить из условия совпадения характеристических показателей. При $\varepsilon = 0$ условие кратности характеристических показателей имеет вид

$$\begin{gathered}\theta_0 = |\omega_j + \omega_h| \, \gamma^{-1} \\ (j, h = 1, .., 2n; \ \gamma = 0, 1, 2...),\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\omega_j$, $\omega_h$ – собственные частоты системы (1.1) при $\varepsilon = 0$. Если $\omega_j$=$\omega_h$, то резонанс называется простым; если $\omega_j \neq \omega_h$, то резонанс называется комбинационным.

**Определение 2.** Частоту $\theta_0$ будем называть сильно устойчивой [2], если при произвольных, но достаточно мало измененных матрицах $G_1'(\theta t)$, $A_1'(\theta t)$ в уравнении (1.1):

$$\begin{gathered}|G_1'(\theta t) - G_1(\theta t)| < \mu, \ |A_1'(\theta t) - A_1(\theta t)| < \mu; \\ (-\infty < t < \infty)\end{gathered} \tag{2.2}$$

оставляющих систему в классе M, решения системы будут устойчивы при всех $\varepsilon$, $\theta$, удовлетворяющих условию

$$0 \leqslant \varepsilon < \delta, \quad |\theta - \theta_0| < \delta, \tag{2.3}$$

где $\mu$ и $\delta$ – некоторые положительные числа. Только резонансные частоты вида (2.1) могут не быть сильно устойчивыми.

**Определение 1.3.** Частоту $\theta_0$ будем называть сильно неустойчивой, если при произвольных, но достаточно мало измененных матрицах $G_1'(\theta t)$, $A_1'(\theta t)$ в уравнении (1.1), удовлетворяющих (2.2) и оставляющих систему (1.1) в классе M, при любых $\mu > 0$ и $\delta > 0$ найдутся $\varepsilon$, $\theta$ из (2.3), при которых решения системы (1.1) будут неустойчивы.

## 3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ КЛАССОВ МАТРИЦ ВОЗМУЩЕНИЙ

**3.1.** Пусть в системе (1.1) класса M $G_1(\theta t) = 0$. В этом случае система (1.1) записывается в форме

$$A\ddot{X} + G\dot{X} + BX = \varepsilon A_1(\theta t) X. \tag{3.1}$$

Квадраты собственных частот системы (3.1) находим по формуле

$$\begin{gathered}\omega^2_{2s-1,2s} = \frac{H^2_{2s-1}}{2a_{2s-1}a_{2s}} \Big(1 + \mu_{2s-1} + \mu_{2s} \pm \\ \pm \sqrt{(1 + \mu_{2s-1} + \mu_{2s})^2 - 4\mu_{2s-1}\mu_{2s}}\Big),\end{gathered} \tag{3.2}$$

где

$$\begin{gathered}\mu_{2s-1} = H^{-2}_{2s-1} b_{2s-1} a_{2s}, \\ \mu_{2s} = H^{-2}_{2s-1} b_{2s} a_{2s-1} \\ (s = 1, ..., n).\end{gathered} \tag{3.3}$$

Границы $\theta_\pm$ области неустойчивости для системы (1.1) на плоскости параметров $\varepsilon$, $\theta$ имеют вид [1]

$$\theta_\pm = \theta_0 + \lambda_\pm \varepsilon, \tag{3.4}$$

$$\theta_0 = \gamma^{-1} (\omega_l + \omega_m), \tag{3.5}$$

где $\lambda_+$, $\lambda_-$ определяются из формулы

$$\lambda_\pm = \pm \gamma^{-1} \sqrt{g}, \tag{3.6}$$

а $g$ находится по формуле, полученной в работе [4].

Тогда для симметрической матрицы $A_1(\theta t) = A_1^*(\theta t)$ и кососимметрической матрицы $A_1(\theta t) = -A_1^*(\theta t)$, используя результаты работы [4], для $g$ получим выражение вида

$$\begin{gathered}g = \pm \sigma_{2j-1}\sigma_{2h-1} \times \\ \times \left( \left( c_1 \left|\kappa^{(\gamma)}_{2j,2h}\right| \pm (-1)^{l+m} c_2 \left|\kappa^{(\gamma)}_{2j-1,2h-1}\right| \right)^2 + \right. \\ \left. + \left( (-1)^m c_3 \left|\kappa^{(\gamma)}_{2j,2h-1}\right| \pm (-1)^l c_4 \left|\kappa^{(\gamma)}_{2j-1,2h}\right| \right)^2 \right),\end{gathered} \tag{3.7}$$

где

$$c_1 = \left(\beta_l\beta_m \frac{\lambda_{2j}\lambda_{2h}}{a_{2j}a_{2h}}\right)^{\frac{1}{2}}, \; c_2 = \left(\frac{\lambda_{2j-1}\lambda_{2h-1}}{\beta_l\beta_m a_{2j-1}a_{2h-1}}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$c_3 = \left(\frac{\beta_l\lambda_{2j}\lambda_{2h-1}}{\beta_m a_{2j}a_{2h-1}}\right)^{\frac{1}{2}}, \; c_4 = \left(\frac{\beta_m\lambda_{2j-1}\lambda_{2h}}{\beta_l a_{2j-1}a_{2h}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.8}$$

здесь

$$\begin{aligned} &\sigma_{2s-1} = \left(\omega_{2s-1}^2 - \omega_{2s}^2\right)^{-1} > 0; \\ &\lambda_{2s-1} = H_{2s-1}a_{2s-1}^{-1}; \\ &\lambda_{2s} = H_{2s-1}a_{2s}^{-1}; \\ &\beta_{2s-1} = \frac{\omega_{2s-1}\lambda_{2s-1}}{\omega_{2s-1}^2 - \nu_{2s}} > 0; \\ &\beta_{2s} = \frac{\omega_{2s}\lambda_{2s-1}}{\nu_{2s} - \omega_{2s}^2} > 0; \\ &\nu_{2s} = \frac{b_{2s}}{a_{2s}} \\ &(l = 2j-1, 2j, \\ &m = 2h-1, 2h, \\ &j, h, s = 1, 2, ..., n). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь $\omega_{2s-1}$, $\omega_{2s}$ – частоты нутационных и прецессионных колебаний, определяемые из формулы (3.2), а $a_r$, $b_r$ $(r = 1, ..., 2n)$, $H_{2s-1}$ $(s = 1, ..., n)$ – элементы матриц $A$, $B$, $G$ (1.2).

В выражении (3.7) для $g$ в случае симметрической матрицы $A_1(\theta t)$ верхний знак соответствует частоте

$$\theta_0 = \gamma^{-1}\left(\omega_l + \omega_m\right), \tag{3.10}$$

т.е. $g > 0$, а нижний знак относится к сопряженной частоте

$$\theta_0^* = \gamma^{-1}\left|\omega_l - \omega_m\right|, \tag{3.11}$$

поэтому $g < 0$.

В случае кососимметрической матрицы $A_1(\theta t)$ в выражении для $g$ (3.7) верхний знак соответствует частоте $\theta_0^*$ (3.11) $(g > 0)$, а нижний знак – частоте $\theta_0$ (3.10) $(g < 0)$. Так как в формуле (3.6) для $\lambda_\pm$ значение $g$ находится под квадратным корнем, то, учитывая знаки $g$ в (3.7) для симметрической и кососимметрической матриц $A_1(\theta t)$, приходим к теореме:

**Теорема 1.** Если в системе (3.1) класса М с положительно определенными диагональными матрицами $A$, $B$ и кососимметрической матрицей $G$:

1) матрица $A_1(\theta t)$ – симметрическая, то частоты $\theta_0$ (3.10) не могут быть сильно устойчивыми, а им сопряжённые частоты $\theta^*$ (3.11) не могут быть сильно неустойчивыми;

2) матрица $A_1(\theta t)$ – кососимметрическая, то частоты $\theta_0$ (3.10) не могут быть сильно неустойчивыми, а им сопряжённые частоты $\theta^*$ (3.11) не могут быть сильно устойчивыми.

Здесь утверждение 1 теоремы обобщает теорему *М. Г. Крейна* [2] на случай систем с гироскопическим членом $G\dot{X}$. Теорема 1 является обобщением теоремы (3.5) *К. Г. Валеева* [1] также для систем с гироскопическим членом $G\dot{X}$.

**3.2.** Рассмотрим систему класса М вида

$$A\ddot{X} + G\dot{X} + BX = \varepsilon G_1(\theta t)\dot{X}. \tag{3.12}$$

Тогда, используя результаты работы [4] для симметрической матрицы $G_1(\theta t)$ в случае частот $\theta_0$ и $\theta_0^*$ (3.10) и (3.11), получим выражения вида

$$g = \omega_l\omega_m\sigma_{2j-1}\sigma_{2h-1}\rho(\mu), \tag{3.13}$$

где $\rho(\mu)$ можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\rho(\mu) = \\ &= \left(c_1\left|\mu_{2j,2h}^{(\gamma)}\right| \mp (-1)^{l+m}c_2\left|\mu_{2j-1,2h-1}^{(\gamma)}\right|\right)^2 + \\ &+ \left(c_3\left|\mu_{2j,2h-1}^{(\gamma)}\right| \mp (-1)^{l+m}c_4\left|\mu_{2j-1,2h}^{(\gamma)}\right|\right)^2, \\ &l = 2j-1, 2j; \; m = 2h-1, 2h; \\ &j, \, h = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{3.14}$$

В формуле (3.14) верхние знаки соответствуют частоте $\theta_0$ (3.10), а нижние знаки – частоте $\theta_0^*$ (3.11). Здесь $\sigma_{2s-1} > 0$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ приведены в формулах (3.8) и (3.9). На основании формул (3.13) и (3.14), учитывая, что $\rho(\mu) > 0$ и $g > 0$, для симметрической матрицы $G_1(\theta t)$ в случае частот $\theta_0$ и $\theta_0^*$ (3.10) и (3.11) приходим к теореме:

**Теорема 2.** Если в системе (3.12) класса М с положительно определенными диагональными матрицами $A$, $B$ и кососимметрической матрицей $G$ имеем симметрическую матрицу $G_1(\theta t)$, то частоты $\theta_0$ (3.10) и $\theta_0^*$ (3.11) не могут быть сильно устойчивыми.

В случае кососимметрической матрицы $G_1(\theta t)$ формула для вычисления $g$ в случае частот $\theta_0$ и $\theta_0^*$ имеет вид

$$g = -\omega_l\omega_m\sigma_{2j-1}\sigma_{2h-1}\rho(\mu), \tag{3.15}$$

т.е. $g < 0$, и отличается от (3.13) только знаком. Поэтому справедлива теорема:

**Теорема 3.** Если в системе класса М с положительно определёнными диагональными матрицами $A$, $B$ и кососимметрической матрицей $G$ имеем кососимметрическую матрицу $G_1(\theta t)$, то частоты $\theta_0$ и $\theta_0^*$ (3.10) и (3.11) не могут быть сильно неустойчивыми.

Теоремы 2 и 3 представляют собой обобщение теоремы К. Г. *Валеева* [1] для систем с гироскопическим членом $GX$.

## 4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЧЕТЫРЕХГИРОСКОПНОЙ ВЕРТИКАЛИ ПРИ ВИБРАЦИИ ОСНОВАНИЯ

Рассмотрим устойчивость четырехгироскопной вертикали, основание которой испытывает линейные вибрации в вертикальном направлении. Пусть вибрации происходят по гармоническому закону

$$\zeta(t) = N\cos\ \theta t, \tag{4.1}$$

где $N$, $\theta$ – амплитуды и частота вибрации. Тогда уравнения малых колебаний четырехгироскопной вертикали можно записать в виде [5]

$$\begin{aligned}
&A_0\ddot{\alpha} + H\dot{\gamma} + m_0 g_0 h_0 \alpha = M_0 h_0 N\theta^2 \alpha\cos\theta t\cdot\alpha;\\
&C_0\ddot{\gamma} - H\dot{\alpha} + c\gamma = 0;\\
&B_0\ddot{\beta} + H\dot{\delta} + m_0 g_0 h_0 \beta = M_0 h_0 N\theta^2 \cos\theta t\cdot\beta;\\
&C_0\ddot{\delta} - H\dot{\beta} + c\delta = 0,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\alpha$ — угол поворота наружной рамы подвеса, $\beta$ — угол поворота платформы относительно рамы подвеса, $\gamma$ — угол поворота первого и второго гиромоторов (связанных антипараллелограммным устройством) относительно осей вращения их кожухов; $A_0, B_0, C_0$ — моменты инерции; параметр $H$ равен удвоенному значению кинетического момента одного гироскопа; $m_0$ — масса системы; $g_0$ — ускорение свободного падения; $h_0$ — расстояние оси точки подвеса тела до центра тяжести системы (центр тяжести системы расположен ниже ее точки опоры); $c$ — постоянная, характеризующая жесткость пружины.

Представим систему (4.2) в векторно-матричной форме (1.1):

$$A\ddot{X} + G\dot{X} + BX = \varepsilon A_1(\theta t)X; \tag{4.3}$$

здесь $X = \{x_1, ..., x_4\}$ — вектор, проекции $x_1, ..., x_4$ которого выражаются через исходные переменные, а именно: $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \beta$, $x_4 = \delta$. Матрицы $A$, $B$, $G$, $A_1(\theta t)$ записываются в виде

$$A = \mathrm{diag}(a_1, ..., a_4),\quad B = \mathrm{diag}(b_1, ..., b_4),$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & H & 0 & 0\\ -H & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & H\\ 0 & 0 & -H & 0 \end{pmatrix},$$

$$A(\theta t) = \begin{pmatrix} \kappa_{11}(\theta t) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \kappa_{33}(\theta t) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

причем элементы этих матриц имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} &a_1 = A_0,\ a_2 = C_0,\ a_3 = B_0, a_4 = C_0,\\ &b_1 = b_3 = m_0 g_0 h_0,\quad b_2 = b_4 = c, \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} &\kappa_{ss}(\theta t) = \kappa_{ss}^{(-1)} e^{-i\theta t} + \kappa_{ss}^{(1)} e^{i\theta t}\ \ (k = 1,\ 3),\\ &\kappa_{ss}^{(-1)} = \kappa_{ss}^{(1)} = \tfrac{M_0 h_0 g_0}{2};\quad \varepsilon = \tfrac{N\theta R}{g_0}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Система (4.3) относится к типу уравнений (3.1). Квадраты собственных частот системы (4.3) при $\varepsilon = 0$ находим по формуле (3.2)

$$\omega^2_{2s-1,2s} = \frac{H^2}{2a_{2s-1}a_{2s}}\Big(1 + \mu_{2s-1} + \mu_{2s} \pm \pm\sqrt{(1 + \mu_{2s-1} + \mu_{2s})^2 - 4\mu_{2s-1}\mu_{2s}}\Big) \quad (s = 1, 2), \tag{4.7}$$

где безразмерные величины $\mu_1, ..., \mu_4$, выраженные через параметры гироскопа, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\mu_1 = \mu_3 = H^{-2}C_0 m_0 g_0 h_0,\\ &\mu_2 = H^{-2}CA_0,\\ &\mu_4 = H^{-2}CB_0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Из результатов п. 3 следует, что для данной матрицы возмущения $A_1(\theta t)$ (4.4), на плоскости параметров $\varepsilon, \theta$ области неустойчивости примыкают лишь к точкам $(0, \theta_0)$, где $\theta_0 = (\omega_l + \omega_m)$ $(l, m = 1, .., 4;\ \gamma = 1)$ — частоты комбинационного резонанса и $\theta_0 = 2\omega_k$ $(k = 1, .., 4;\ \gamma = 1)$ — частоты простого резонанса.

Найдем уравнения границ $\theta_\pm$ из области неустойчивости $\theta_- < \theta < \theta_+$ с точностью до $\varepsilon^2$ включительно:

$$\theta_\pm = \theta_0 \pm \lambda_\pm \varepsilon, \tag{4.9}$$

где

$$\lambda_{\pm} = \pm\sqrt{g}. \tag{4.10}$$

Выражении для $g$ найдем из (3.7) для различных резонансных частот $\theta_0$.

**а) Комбинационный резонанс** В случае комбинационных частот

$$\theta_0 = \omega_1 + \omega_2,\ \theta_0 = \omega_1 + \omega_3,\ \theta_0 = \omega_1 + \omega_4,$$
$$\theta_0 = \omega_2 + \omega_3,\ \theta_0 = \omega_2 + \omega_4,\ \theta_0 = \omega_3 + \omega_4 \tag{4.11}$$

на основании формулы (3.7), учитывая, что

$$\kappa_{11}^{(1)} = \kappa_{33}^{(1)} = \frac{M_0 h_0 g_0}{2},\ \kappa_{22}^{(1)} = \kappa_{44}^{(1)} = 0,$$
$$\kappa_{ks}^{(1)} = 0, \quad k \neq s,\ (k, s = 1, ..4),$$

для $g$ получим следующее представление:

$$g = G_{2j-1} G_{2h-1} C_2^2(l, m) \left(\frac{m_0 h_0 g_0}{2}\right)^2 > 0, \tag{4.12}$$

где

$$C_2^2(l, m) = \frac{\lambda_{2j-1}\lambda_{2h-1}}{\beta_l \beta_m a_{2j-1} a_{2h-1}},$$
$$(l = 2j-1,\, 2j;\ m = 2h-1,\, 2h;\ j, h = 1, 2)$$

а величины $G_{2s-1}, \lambda_{2s-1}, \beta_{2s-1}, \beta_{2s}$, выраженные через параметры гировертикали, имеют вид

$$G_{2s-1} = (\omega_{2s-1}^2 - \omega_{2s}^2)^{-1} > 0,$$
$$\lambda_1 = \frac{H}{A_0}, \quad \lambda_3 = \frac{H}{B_0},$$
$$\beta_{2s} = \frac{\omega_{2s}\lambda_{2s-1}}{C \cdot C_0^{-1} - \omega_{2s}^2} > 0,\ \beta_{2s} = \frac{\omega_{2s-1}\lambda_{2s-1}}{\omega_{2s-1}^2 - C \cdot C_0^{-1}} > 0$$
$$(s = 1, 2), \tag{4.13}$$

причем $\omega_1, \omega_3$ и $\omega_2, \omega_4$ – соответственно частоты нутационных и прецессионных колебаний четырехгироскопной гировертикали.

**б) Простой резонанс** В случае простых резонансных частот

$$\theta_0 = 2\omega_l\ (l = 1, ..., 4;\ \gamma = 1) \tag{4.14}$$

выражение для $g$ получим из (4.12), полагая $l = m, j = h = s\ (l, m = 1, .., 4;\ s = 1, 2)$:

$$g = G_{2s-1}^2 \frac{\lambda_{2s-1}^2}{\beta_l^2 a_{2s-1}^2} \left(\frac{m_0 h_0 g_0}{2}\right)^2 > 0, \tag{4.15}$$
$$(l = 2s-1,\, 2s;\ s = 1, 2),$$

где значения для $G_{2s-1}, \lambda_{2s-1}, \beta_{2s}, \beta_{2s-1}$ приведены выше (4.13).

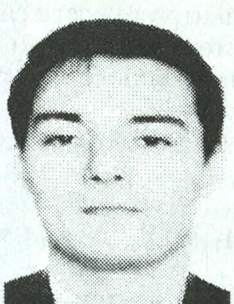
Итак, на основании результатов п. 3, показано, что при линейных вибрациях основания в четырехгироскопной вертикали может наступить простой и комбинационный резонанс. Получены формулы, определяющие границы области неустойчивости, выраженные через параметры гировертикали.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Валеев К. Г.** Об опасности комбинационных резонансов // Прикл. мат. и мех. 1963. Т. XXVII, вып. 6.
2. **Крейн М. Г.** Основные положения зон устойчивости канонических линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Сб. памяти А. А. Андронова. М.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 413–498.
3. **Малкин И. Г.** Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. Гостехтеоретиздат, 1958.
4. **Исламов Р. Р., Исламов Р. Р. (мл.)** Исследование параметрического резонанса в гироскопических системах // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 1 (12). С. 41–45.
5. **Ройтенберг Я. Н.** Многогироскопная вертикаль // ПММ. 1946. Т. 10, вып. 1. С. 32–37.


## ОБ АВТОРАХ


**Исламов Роберт Рахимович,** доцент каф. математики. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1966). Канд. физ.-мат. наук по диф. и интегр. уравнениям (защ. в Ин-те мат. АН УССР, 1973). Иссл. в обл. устойчивости решений обыкн. диф. уравнений.



**Исламов Ринат Робертович,** аспирант. Дипл. инж. по выч. машинам, комплексам, системам и сетям (УГАТУ, 2004). Обл. науч. интересов – нейронные сети и нейроматематика.