

УДК 621.9.047

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО СТРОГАНИЯ КЛИНОВИДНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ-ИНСТРУМЕНТОМ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ РАСТВОРА

А. А. ЗАРИПОВ¹, Н. М. ШЕРЫХАЛИНА²

¹jacud@yandex.ru, ²n_sher@mail.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 20.03.2018

Аннотация. Получены квазистационарные решения двух типов задач электрохимического формообразования: обработки заготовки, имевшей до обработки угловую форму, угловым электрод-инструментом с произвольным углом раствора без изоляции и с изоляцией. Использована ступенчатая функция выхода по току. Электрическое поле считалось потенциальным и соленоидальным. Задачи решались с помощью конформных отображений. Получены точные (в квадратурах) решения этих задач и проведено параметрическое исследование. Найдены формы обрабатываемой поверхности в различные моменты времени при различных углах наклона передней стенки электрода-инструмента.

Ключевые слова: комплексный потенциал; конформное отображение; выход по току; предельная модель; квазистационарное приближение.

ВВЕДЕНИЕ

Как было предложено в [1, 2], для моделирования процессов электрохимической обработки (ЭХО) используется ступенчатая зависимость выхода по току $\eta(j)$ от плотности тока j

$$\eta(j) = \begin{cases} \eta_0, & j > j_1, \\ 0 \leq \eta \leq \eta_0, & j = j_1, \\ 0, & j < j_1 \end{cases} \quad (1)$$

при применении для моделирования процесса ЭХО закона Фарадея

$$V_{\text{ест}} = k\eta \frac{j}{\kappa}, \quad k = \kappa\varepsilon/\rho, \quad (2)$$

где $V_{\text{ест}}$ – скорость электрохимического растворения; ε – электрохимический эквивалент; ρ – плотность растворяемого металла; κ – электропроводность электролита; j_1 – критическое значение плотности тока, ограничивающее зону растворения.

Модель (1) позволяет сформулировать и решить задачи квазистационарного формообразования [3, 4]. При применении модели (1), (2) квазистационарное приближение формируется заданием на участках с большой плотностью тока обычного условия стационарности, а на других – условия $j=j_1$. На участках, где $j < j_1$ растворение отсутствует, сохраняется исходная форма заготовки. Приближение заключается в использовании условия стационарности, поскольку в реальности стационарное решение устанавливается асимптотически. Однако в [5] показано, что точность приближения достаточно высока (до 3–4 значащих цифр). Условие $j=j_1$ в нестационарных процессах выполняется динамически, когда выход по току скачком меняется от нуля до η_0 и наоборот, поэтому не приводит к неточности.

В данной работе для исследования процессов с предельно высокой локализацией рассматривается ситуация, при которой максимальное значение плотности тока на поверхности анода E_0 равно критическому

значению $E_1 = j_1/\kappa$. Далее решаются две задачи: с неизолированной и с изолированной передней стенкой электрода-инструмента (ЭИ). В [6] решены задачи такого типа с прямоугольным клином и пластиной.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 1

Рассмотрим задачу ЭХО при обработке угловым ЭИ $A'CB'$ с углом раствора, равным $\pi/2 - \gamma$, который движется горизонтально вправо с постоянной скоростью V_{et} . Сечение межэлектродного пространства (МЭП) показано на рис. 1. M и N – точки перегиба обрабатываемой поверхности.

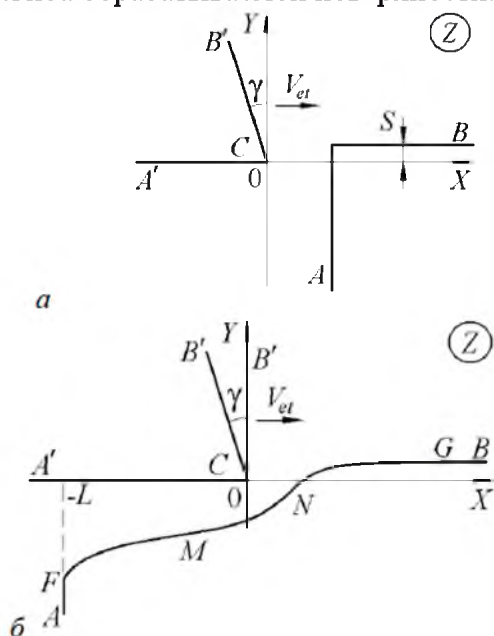


Рис. 1. Формы межэлектродного пространства на физической плоскости:

a – перед началом процесса; *б* – в процессе ЭХО;
 $FMNG$ – зона постоянного (критического) значения напряженности;
 AF, GB – нерастворяемые границы

На плоскости комплексного потенциала образом МЭП является полоса ширины U , равной разности потенциалов между электродами (рис. 2).

При использовании ступенчатой зависимости выхода по току (1) при E_1 , равном максимуму модуля напряженности $|E|$ на обрабатываемой поверхности E_0 , образуются две зоны с двумя типами краевых условий. Первой зоне $FMNG$ с постоянным значением $|E| = E_1$ на плоскости

$\bar{E} = dW/dZ$ соответствует дуга окружности радиуса E_1 с центром в начале координат. Участкам AF ($\theta=0$, θ – угол между вектором напряженности и осью X) и GB ($\theta=-\pi/2$), где отсутствует растворение, на плоскости $\bar{E}$ соответствуют отрезки, соответственно, действительной AF и мнимой GB осей (рис. 3).

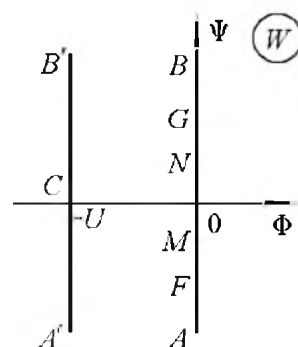


Рис. 2. Форма образа МЭП на плоскости комплексного потенциала

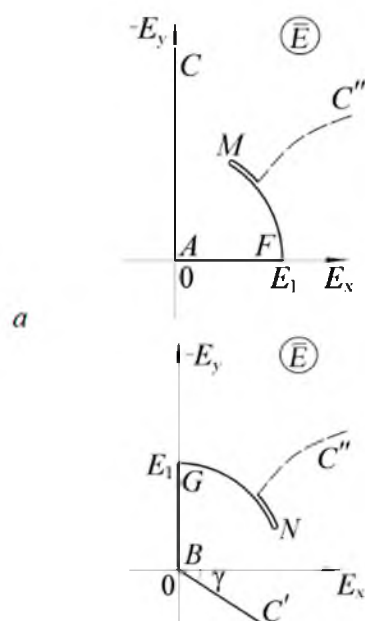


Рис. 3. Формы образа МЭП на плоскостях: годографа: *a* – первый лист; *б* – второй лист

На поверхности ЭИ $A'C$ угол $\theta=-\pi/2$, на $B'C$ $\theta=\gamma$ (вектор напряженности направлен по нормали от границы катода). Поэтому на плоскости годографа $\bar{E}$ имеем, соответственно, вертикальный и наклонный лучи. Область на плоскости годографа размещается на двулистной поверхности. Более удобно изобразить каждый лист отдельно (рис 3, *a, б*). Пунктиром обозначена линия «склейки» двух листов.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 1

Применив преобразование

$$\omega = i \ln \frac{\bar{E}}{E_1} = \theta + i\tau, \quad \tau = \ln \frac{|E|}{E_1}, \quad (2)$$

получим фигуру, граница которой содержит только части прямых, т.е. многоугольник с углами A, B, C, F, G, M, N , равными $0; 0; 0, \pi/2; \pi/2; 2\pi, 2\pi$ соответственно (рис. 4, а, б).

Используя преобразование Шварца-Кристоффеля, получим конформное отображение верхней полуплоскости ζ (рис. 4, в) на этот многоугольник

$$\omega(\zeta) = C_1 \int_{\infty}^{\zeta} \frac{(\zeta + \mu)(\zeta + \nu)d\zeta}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)(\zeta - 1)\zeta^{1/2}}, \quad (3)$$

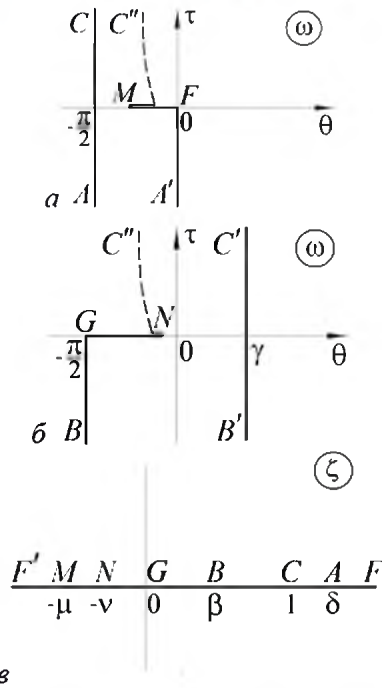


Рис. 4. Формы образа МЭП на плоскостях ω и ζ : а – первый лист поверхности ω ; б – второй лист поверхности ω ; в – плоскость ζ

Интегрируя (3), найдем

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) = & C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}} + \\ & + C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} + \\ & + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку в соответствии с рис. 4

$$\operatorname{Re} \omega \left(\frac{\beta}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} \omega \left(\frac{1 + \beta}{2} \right) = \gamma,$$

$$\operatorname{Re} \omega \left(\frac{1 + \delta}{2} \right) = -\frac{\pi}{2},$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \omega \left(\frac{1 + \delta}{2} \right) &= C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi = -\frac{\pi}{2}, \\ C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} &= \frac{i}{2}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \omega \left(\frac{1 + \beta}{2} \right) &= C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi + \\ &+ C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} i\pi = \gamma, \end{aligned}$$

$$\frac{i}{2} i\pi + C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} i\pi = \gamma,$$

$$C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} = -i \left(\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \omega \left(\frac{\beta}{2} \right) &= C_1 \frac{(\delta + \mu)(\delta + \nu)}{(\delta - \beta)(\delta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi + \\ &+ C_1 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{(1 - \delta)(1 - \beta)} i\pi + C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{i}{2} i\pi - i \left(\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2} \right) i\pi + C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi &= -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$C_1 \frac{(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\beta - \delta)(\beta - 1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = i \left(\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \quad (7)$$

Из (5)–(7) следует, что

$$\frac{\sqrt{\delta}}{2} \frac{(\delta - \beta)(1 + \mu)(1 + \nu)}{(\delta + \mu)(\delta + \nu)(1 - \beta)} = \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad (8)$$

$$\frac{\sqrt{\delta}}{2} \frac{(\delta - 1)(\beta + \mu)(\beta + \nu)}{(\delta + \mu)(\delta + \nu)(\beta - 1)} = - \left(\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2} \right). \quad (9)$$

Если точки перегиба M и N отсутствуют, то параметры μ и ν – комплексно сопряженные, (т.е. $\mu = \mu_1 + i\nu_1$, $\nu = \mu_1 - i\nu_1$). Тогда уравнения (8), (9) примут вид

$$\frac{\sqrt{\delta}(\delta-\beta)\left((1+\mu_1)^2+v_1^2\right)}{2(1-\beta)\left((\delta+\mu_1)^2+v_1^2\right)} = \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$\frac{\sqrt{\delta}(\delta-1)\left((\beta+\mu_1)^2+v_1^2\right)}{2(\beta-1)\left((\delta+\mu_1)^2+v_1^2\right)\sqrt{\beta}} = -\left(\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2}\right). \quad (11)$$

Тем самым, с учетом (5)–(7), выражение (4) окончательно примет вид

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}} + i \left(\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} - i \left(\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}. \quad (12)$$

Согласно (2)

$$\bar{E} = E_1 \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}} \left(\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{\zeta} + 1}{\sqrt{\zeta} - 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2}}. \quad (13)$$

С учетом (13)

$$dZ = \frac{1}{E_1} \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}} \left(\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2}} \times \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (14)$$

Остается найти отображение $W(\zeta)$. Используя преобразование Шварца-Кристоффеля, получим

$$W = \frac{iU}{\pi} \ln \frac{\zeta - \delta}{\zeta - \beta}, \quad \frac{dW}{d\zeta} = \frac{iU}{\pi} \frac{\delta - \beta}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)}. \quad (15)$$

Так как справедлива формула (14), то с учетом (15)

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\zeta} &= \frac{1}{E_1} e^{i\omega} \frac{dW}{d\zeta} = \\ &= \frac{iU}{\pi E_1} \left(\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{2}} \times \\ &\times \frac{\delta - \beta}{(\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta})(\zeta - \delta)^{1/2}(\zeta - \beta)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Интегрируя (16) численно от $\zeta=1$, получим функцию $Z(\zeta)$.

Параметры заглупления кромки ЭИ L и S определяются следующим образом

$$L = -\operatorname{Re} Z(\infty), \quad S = \operatorname{Im} Z(0), \quad (17)$$

безразмерное время $\tau = LE_1/U$. Поскольку L и S заданы, уравнения (17) формируют систему для определения параметров β и δ . После определения этих параметров определяются параметры μ и v при решении системы уравнений (8), (9) (или (10), (11)). При численном интегрировании для решения уравнений (17) применяются замены переменных и фильтрация численных результатов [8, 9] для их уточнения и оценки погрешности.

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 1

На рис. 5 приведены формы обрабатываемой поверхности в подвижной (связанной с кромкой ЭИ) и неподвижной относительно материала заготовки системах координат, соответствующие $s = SE_1/U = 1$, $\gamma = \pi/4$ и $\tau = -1; -0.5; 0; 0.5; 1; 1.5; 2; \dots; 5$.

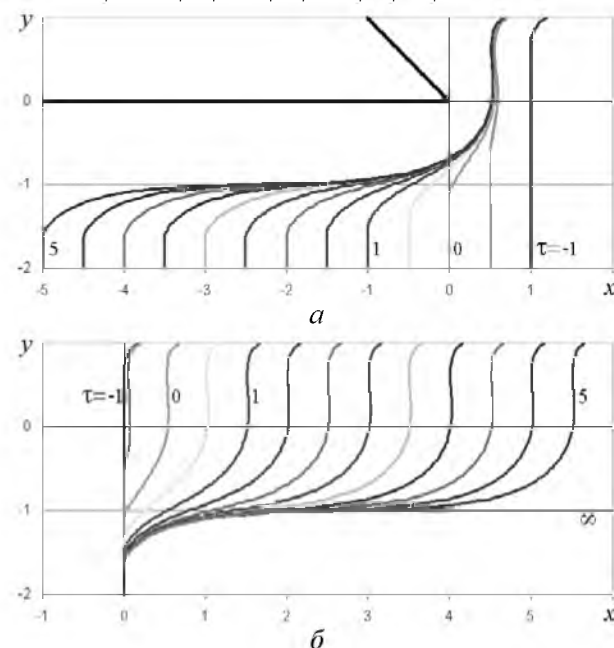


Рис. 5. Формы обрабатываемой поверхности: а – в системе координат, связанной с кромкой ЭИ $S(0,0)$; б – в неподвижной системе координат

На рис. 5, а при $\tau \rightarrow \infty$ видно установление предельно-стационарной конфигурации с $|\bar{E}| = E_1$. Вблизи нерастворяемой зоны AF

при возрастании τ формируется предельная форма, соответствующая решению задачи об истечении из-под щита [7] (рис. 5, б, кривая ∞).

Следует отметить, что при $\tau < \theta$ образы точек перегиба $-\mu$ и $-\nu$ совпадают и при дальнейшем уменьшении τ становятся комплексно сопряженными ($\mu = \mu_1 + i\nu_1$, $\nu = \mu_1 - i\nu_1$). При этом внутри области на плоскости $\bar{E}$ появляется точка ветвления M , являющаяся образом точки $\mu = \mu_1 + i\nu_1$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ 2

Рассмотрим плоскую задачу ЭХО при использовании клиновидного ЭИ $A'CB'$ с углом раствора равным $\pi/2 - \gamma$, с изолированной передней поверхностью (рис. 6). ЭИ движется горизонтально вправо с постоянной скоростью V_{et} .

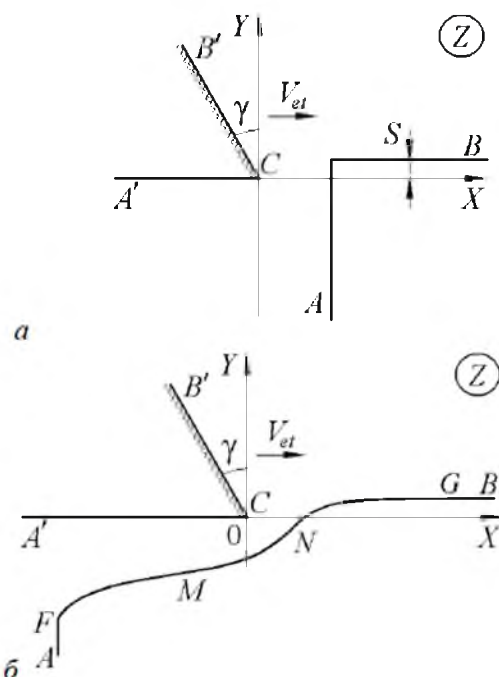


Рис. 6. Формы межэлектродного пространства на физической плоскости при обработке с помощью ЭИ с изоляцией:

а – перед началом процесса; *б* – в процессе ЭХО

Образом МЭП на плоскости комплексного потенциала для этой задачи является полуполоса ширины U (рис. 7).

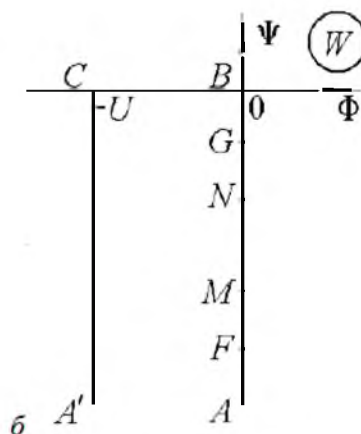


Рис. 7. Форма образа МЭП на плоскости комплексного потенциала

Как и в задаче 1, при использовании зависимости $\eta(j)$ (1) при $E_1 = E_0$ на обрабатываемой поверхности образуются две зоны с двумя типами краевых условий. Первой зоне $FMNG$ с постоянным модулем напряженности на плоскости $\bar{E} = dW/dZ$ соответствует дуга окружности радиуса E_1 с центром в начале координат. Участкам AF ($\theta = \theta$) и GB ($\theta = -\pi/2$), где отсутствует растворение, на плоскости $\bar{E}$ соответствуют отрезки, соответственно, действительной AF и мнимой GB осей.

На поверхности ЭИ $A'C$ угол $\theta = -\pi/2$, на $B'C$ $\theta = \pi/2 + \gamma$ (вектор напряженности направлен по нормали от катода и вдоль изолированной его части). Поэтому на плоскости годографа $\bar{E}$ имеем лучи, направленные, соответственно, вверх и под наклоном. Область на плоскости годографа размещается на двулистной поверхности. Первый лист изображен на рис. 3, б. Второй лист изображен на рис. 8, а).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 2

Применив преобразование (2), получим многоугольник с углами A, B, C, F, G, M, N , равными $0; 0; 0, \pi/2; \pi/2; 2\pi, 2\pi$ соответственно (рис. 8, б). Поскольку углы имеют те же значения, как в задаче 1, справедлива формула (4).

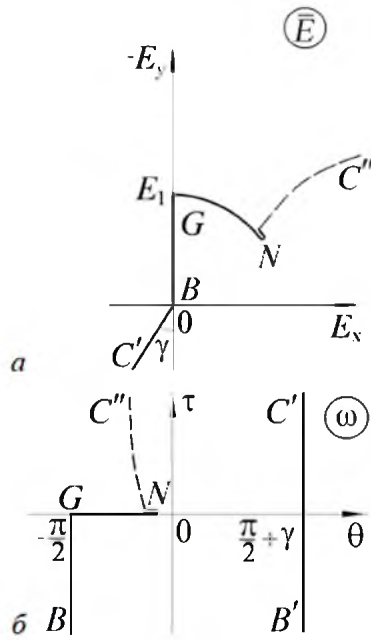


Рис. 8. Формы образа МЭП на плоскостях ω и ζ :
 а – второй лист поверхности $\bar{E}$; б – второй лист
 поверхности ω

Поскольку в соответствии с рис. 8, б

$$\operatorname{Re} \omega \left(\frac{\beta}{2} \right) = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Re} \omega \left(\frac{1+\beta}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$

$$\operatorname{Re} \omega \left(\frac{1+\delta}{2} \right) = -\frac{\pi}{2},$$

то

$$\operatorname{Re} \omega \left(\frac{1+\delta}{2} \right) = C_1 \frac{(\delta+\mu)(\delta+\nu)}{(\delta-\beta)(\delta-1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi = -\frac{\pi}{2},$$

$$C_1 \frac{(\delta+\mu)(\delta+\nu)}{(\delta-\beta)(\delta-1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{i}{2}, \quad (18)$$

$$\operatorname{Re} \omega \left(\frac{1+\beta}{2} \right) = C_1 \frac{(\delta+\mu)(\delta+\nu)}{(\delta-\beta)(\delta-1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi +$$

$$+ C_1 \frac{(1+\mu)(1+\nu)}{(1-\delta)(1-\beta)} i\pi = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$

$$\frac{i}{2} i\pi + C_1 \frac{(1+\mu)(1+\nu)}{(1-\delta)(1-\beta)} i\pi = \frac{\pi}{2} + \gamma,$$

$$C_1 \frac{(1+\mu)(1+\nu)}{(1-\delta)(1-\beta)} = -i \left(1 + \frac{\gamma}{\pi} \right), \quad (19)$$

$$\operatorname{Re} \omega \left(\frac{\beta}{2} \right) = C_1 \frac{(\delta+\mu)(\delta+\nu)}{(\delta-\beta)(\delta-1)} \frac{1}{\sqrt{\delta}} i\pi +$$

$$+ C_1 \frac{(1+\mu)(1+\nu)}{(1-\delta)(1-\beta)} i\pi +$$

$$+ C_1 \frac{(\beta+\mu)(\beta+\nu)}{(\beta-\delta)(\beta-1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi = -\frac{\pi}{2},$$

$$\frac{i}{2} i\pi - i \left(1 + \frac{\gamma}{\pi} \right) i\pi + C_1 \frac{(\beta+\mu)(\beta+\nu)}{(\beta-\delta)(\beta-1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} i\pi = -\frac{\pi}{2},$$

$$C_1 \frac{(\beta+\mu)(\beta+\nu)}{(\beta-\delta)(\beta-1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = i \left(1 + \frac{\gamma}{\pi} \right) \quad (20)$$

Из (18)–(20) следует, что

$$C_1 = i \frac{\sqrt{\delta} (\delta-\beta)(\delta-1)}{2 (\delta+\mu)(\delta+\nu)}, \quad (21)$$

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta-\beta)(\delta-1)}{2 (\delta+\mu)(\delta+\nu)} \frac{(1+\mu)(1+\nu)}{(1-\delta)(1-\beta)} = - \left(1 + \frac{\gamma}{\pi} \right),$$

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta-\beta)(1+\mu)(1+\nu)}{2 (\delta+\mu)(\delta+\nu)(1-\beta)} = 1 + \frac{\gamma}{\pi}, \quad (22)$$

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta-\beta)(\delta-1)}{2 (\delta+\mu)(\delta+\nu)} \frac{(\beta+\mu)(\beta+\nu)}{(\beta-\delta)(\beta-1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \left(1 + \frac{\gamma}{\pi} \right),$$

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta-1)(\beta+\mu)(\beta+\nu)}{2 (\delta+\mu)(\delta+\nu)(\beta-1)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = - \left(1 + \frac{\gamma}{\pi} \right). \quad (23)$$

Если точки перегиба M и N отсутствуют, то параметры μ и ν – комплексно сопряженные, (т.е. $\mu = \mu_1 + i\nu_1$, $\nu = \mu_1 - i\nu_1$). Тогда уравнения (22), (23), примут вид

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta-\beta)((1+\mu_1)^2 + \nu_1^2)}{2 (1-\beta)((\delta+\mu_1)^2 + \nu_1^2)} = 1 + \frac{\gamma}{\pi}, \quad (24)$$

$$\frac{\sqrt{\delta} (\delta-1)((\beta+\mu_1)^2 + \nu_1^2)}{2 (\beta-1)((\delta+\mu_1)^2 + \nu_1^2)} \frac{1}{\sqrt{\beta}} = - \left(1 + \frac{\gamma}{\pi} \right). \quad (25)$$

Тем самым с учетом (18)–(20), окончательно

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{2} \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}} +$$

$$+ i \left(\frac{\gamma}{\pi} + 1 \right) \ln \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} - i \left(\frac{\gamma}{\pi} + 1 \right) \ln \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1}. \quad (26)$$

Согласно (2) $\bar{E} = \frac{dW}{dZ} = E_1 e^{-i\omega} =$

$$= E_1 \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}} \left(\frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{\zeta} + 1}{\sqrt{\zeta} - 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi} + 1} \quad (27)$$

С учетом (26)

$$dZ = \frac{1}{E_1} e^{i\omega} dW =$$

$$= \frac{1}{E_1} \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}} \left(\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi} + 1} \frac{dW}{d\zeta} d\zeta. \quad (28)$$

Теперь с помощью преобразования Шварца-Кристоффеля найдем функцию $W(\zeta)$

$$W(\zeta) = C_2 \int_{\beta}^{\zeta} \frac{d\zeta}{(\zeta - \delta)(\zeta - \beta)^{1/2}(\zeta - 1)^{1/2}} =$$

$$= C_2 \frac{1}{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}} \times$$

$$\times \ln \frac{(1 - \beta)(\zeta - \delta)}{[\sqrt{(\delta - 1)(\zeta - \beta)} + \sqrt{(\delta - \beta)(\zeta - 1)}]}. \quad (29)$$

При обходе точки $\zeta = \delta$ по полуокружности малого радиуса против часовой стрелки W получает приращение действительной части, равное $-U$, логарифм – приращение мнимой части $i\pi$. Отсюда

$$C_2 = i \frac{U}{\pi} \sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}.$$

Тем самым, окончательно

$$W(\zeta) = i \frac{U}{\pi} \ln \frac{(1 - \beta)(\zeta - \delta)}{[\sqrt{(\delta - 1)(\zeta - \beta)} + \sqrt{(\delta - \beta)(\zeta - 1)}]}.$$

Производная

$$\frac{dW}{d\zeta} = i \frac{U}{\pi} \frac{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}}{(\zeta - \delta)\sqrt{(\zeta - \beta)(\zeta - 1)}}. \quad (30)$$

Из (28) и (30)

$$dZ = \frac{1}{E_1} e^{i\omega} dW =$$

$$= i \frac{U}{\pi E_1} \sqrt{\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\delta}}} \left(\frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\beta}} \frac{\sqrt{\zeta} - 1}{\sqrt{\zeta} + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\pi} + 1} \times$$

$$\times \frac{\sqrt{(\delta - \beta)(\delta - 1)}(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\delta})}{(\zeta - \delta)^{3/2} \sqrt{(\zeta - \beta)(\zeta - 1)}} d\zeta \quad (31)$$

Интегрируя (31) численно от $\zeta=1$, получим функцию $Z(\zeta)$.

Параметры заглубления кромки ЭИ L и S и безразмерное время определяются согласно (17).

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ 2

На рис. 9 приведены формы обрабатываемой поверхности в неподвижной относительно материала заготовки и подвижной (связанной с кромкой ЭИ) системах координат, соответствующие $\gamma=\pi/4$, $s=0,3$ и $\tau=-1$; $-0,5$; 0 ; $0,5$; 1 ; $1,5$; 2 ; ...; 5 .

На рис. 9, а при $\tau \rightarrow \infty$ видно установление предельно-стационарной конфигурации с $|E| = E_1$. Вблизи нерастворяемой зоны AF при возрастании τ образуется предельная форма, соответствующая решению гидродинамической задачи об истечении из-под щита (рис. 9, б, кривая ∞).

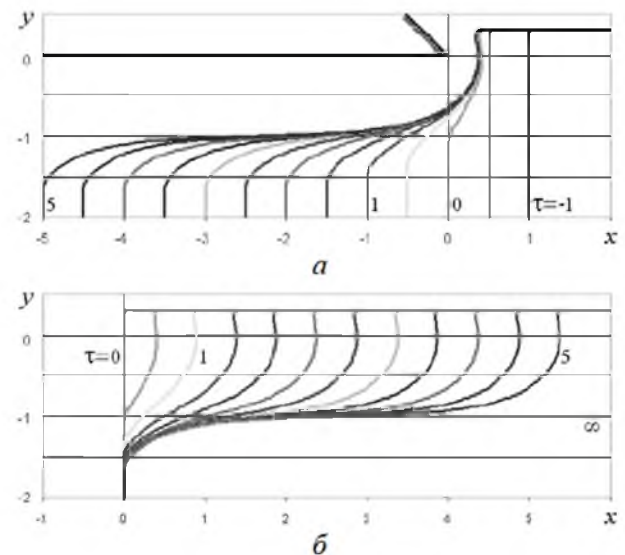


Рис. 9. Формы обрабатываемой поверхности для $\gamma=\pi/4$, $s=0,3$: а – в системе координат, связанной с кромкой ЭИ С; б – в неподвижной системе координат

На рис. 10 приведены формы обрабатываемой поверхности, соответствующие

$\gamma = -\pi/2$, $s=0$ (режим касания поверхности заготовки изолированной частью ЭИ для ограничения зоны обработки).

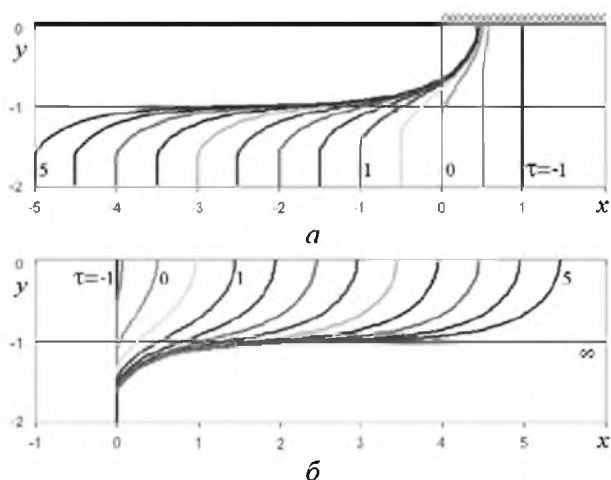


Рис. 10. Формы обрабатываемой поверхности для $s=0$:

a – в системе координат, связанной с кромкой ЭИ $S(0,0)$; b – в неподвижной системе координат

На рис. 11 приведены формы поверхности, соответствующие $\tau=1$, $s=0$, $\gamma=\pi/2$, $\pi/4$, 0 , $-\pi/4$, $-\pi/2$ (кривые 1, 2, 3, 4, 5).

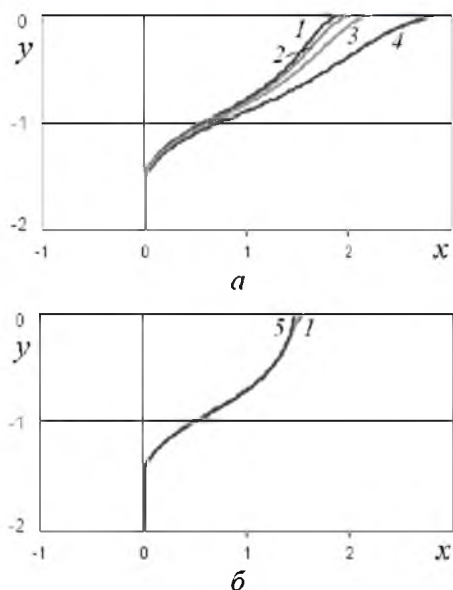


Рис. 11. Формы обрабатываемой поверхности для $s=0$, $\tau=1$: a – для ЭИ без изоляции; b – для ЭИ с изоляцией

Видно, что изменение угла наклона изолированной поверхности клина мало влияет на форму обрабатываемой поверхности (рис. 11, б).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в квазистационарном приближении решены два типа задач обработки различными ЭИ заготовки, имевшей до обработки угловую форму.

Квазистационарное приближение позволило получить точные (в квадратурах) решения задач ЭХО обработки ЭИ с изоляцией и без изоляции.

Проведено параметрическое исследование этих задач. Одной из главных задач было выяснить, какую форму приобретают участки вблизи начала заглабления ЭИ за фронтальную поверхность заготовки. Как было выяснено, форма поверхности описывается известной в гидродинамике задачей истечения из-под щита. Если рассмотреть не предельные нестационарные процессы ($E_0 > E_1$), то вывод остается справедливым, так как участок обрабатываемой поверхности вблизи точки начала нерастворяемой зоны F соответствует вертикальному участку зависимости выхода по току от плотности тока.

В предельных случаях ($E_0 = E_1$) квазистационарная модель дает точное решение нестационарной задачи. При этом квазистационарное решение требует существенно меньших затрат вычислительных ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моделирование электрохимического формообразования при ограничениях на растворение / В. П. Житников и др. // Научно-технические ведомости СПбГПУ. СПб. 2009. №4 (82). С. 221–224. [V. P. Zhitnikov et al., "Modeling of electrochemical shaping at the restriction of dissolution", (in Russian), in *Nauchno-Tekhnicheskie vedomosti Saint-Petersburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*, no. 4 (82), pp. 221–224, 2009.]
2. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании // Изв. Вузов. Математика. 2010, № 10. С. 77–81. [V. P. Zhitnikov, E. M. Oshmarina, G. I. Feforova, "The use of discontinuous functions for modeling the dissolution process of steady-state electrochemical shaping", in *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*: Alerton Press, Inc., vol. 54, no.10, pp. 67–70, 2010.]
3. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Федорова Г. И. Точные решения двух задач предельного квазистационарного электрохимического формообразования // Известия вузов. Математика, 2011. №12. С. 21–29. [V. P. Zhitnikov, E. M. Oshmarina, G. I. Feforova, "Exact solutions of two limiting quasistationary electrochemical shaping problems", in

Russian Mathematics (Iz. VUZ): Alerton Press, Inc., vol. 55, no.12, pp. 16-22, 2011.]

4. Житников В. П., Ошмарина Е. М., Поречный С. С., Федорова Г. И. Предельная модель электрохимической размерной обработки металлов // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 4. С. 193–201. [V. P. Zhitnikov, E. M. Oshmarina, S. S. Porechny, G. I. Feforova, "Limit model of electrochemical dimensional machining of metals", in *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*: Alerton Press, Inc., vol. 55, no.4, pp. 718-725, 2014.]

5. Житников В. П., Муксимова Р. Р., Ошмарина Е. М. Моделирование процессов нестационарного электрохимического формообразования применительно к прецизионным технологиям // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского. 2010, т. 42. С. 99–122. [V. P. Zhitnikov, R. R. Muksimova, E. M. Oshmarina, "Modeling of nonstationary electrochemical shaping processes applying to precision technologies", (in Russian), in *Trudy matematicheskogo tsentra im. N. I. Lobachevskogo*, Kazan, vol. 42, pp. 99-122, 2010.]

6. Житников В. П., Зарипов А. А., Шерыхалина Н. М. Исследование нестационарного электрохимического формообразования с помощью квазистационарной модели // Вестник УГАТУ. 2014. Т. 18, №3 (64). С. 80–86. [V. P. Zhitnikov, A. A. Zaripov, N. M. Sherykhalina, "Investigation of nonstationary electrochemical shaping with the aid of quasistationary model" (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 16, no.3 (64), pp. 80-86, 2014.]

7. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с. [M. I. Gurevich, "The theory of flows of ideal fluid" (in Russian), M.: Nauka, 1979.]

8. Житников В. П., Шерыхалина Н. М. Методы верификации математических моделей в условиях неопределенности // Вестник УГАТУ. 2000. № 2. С. 53–60. [V. P. Zhitnikov, N. M. Sherykhalina, "Methods of verification of mathematical models in conditions of inconfidence" (in Russian), in *Vestnik UGATU*, no.2, pp. 53-60, 2000.]

9. Шерыхалина Н. М. Методы обработки результатов численного эксперимента для увеличения их точности и надежности // Вестник УГАТУ, 2007. Т. 9, №2 (20). С. 127–137. [N. M. Sherykhalina, "Methods of processing of numerical experiment results for its accuracy and reliability increase" (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 9, no.2 (20), pp. 127-137, 2007.]

ОБ АВТОРАХ

ШЕРЫХАЛИНА Наталия Михайловна, проф. каф. ВМиК. Дипл. инж.-системотехн. (УГАТУ, 1993). Д-р техн. наук по мат. моделированию, числ. методам и комплексам программ (УГАТУ 2012). Иссл. в обл. волновых течений жидкости, разработки числ.-аналит. методов, методов оценки погрешности и достоверности числ. результатов.

ЗАРИПОВ Аскар Александрович, науч. сотр. каф. выч. мат. и кибернетики. Дипл. магистр по прикладн. математике и информатике (УГАТУ, 2013). Иссл. в обл. решения задач матем. моделирования физ. процессов.

METADATA

Title: Modeling of electrochemical planning by wedge electrode-tool with arbitrary internal angle.

Authors: A. A. Zaripov¹, N. M. Sherykhalina²

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: ¹jacud@yandex.ru, ²n_sher@mail.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 22, no. 1 (79), pp. 74-82, 2018. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: Two types of problems of the quasistationary electrochemical shaping are solved: by a wedge electrode-tool with arbitrary internal angle with isolation and without isolation. The machining surface before the process starting had a rectangular form. The stepwise function of current efficiency was used. The exact solutions are obtained and parametric investigation was carried out.

Key words: Complex potential; conformal mapping; current efficiency; limiting model; quasi-stationary approximation.

About authors:

ZARIPOV, Askar Alexandrovich, lower scientist, Dept. of computer science and robotics. Master's degree (UGATU, 2013).

SHERYKHALINA, Nataliya Mikhailovna, Prof., Dept. of computer science and robotics. Dipl. Engineer-system master (UGATU, 1993). Cand. of Phys.-Math. Sci. (BashGU, 1996), Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2012).