

УДК 531

## МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

И. Н. БУДИЛОВ, В. С. ЖЕРНАКОВ

УГАТУ, факультет авиационных двигателей

Тел: (3472) 22 42 84 Fax: (3472) 23 90 47 E-mail: root@admin.ugatu.ac.ru

**Аннотация:** В этой работе на основе численного нелинейного моделирования определены зависимости упругопластического коэффициента интенсивности напряжений, учитывающие особенности конструкции высоконагруженных соединений. Были определены упругопластическое напряжение и поля деформаций для реальной кривой траектории трещины во впадине первого нагруженного витка резьбы и под головкой болта. Расчёт был выполнен численно методом конечных элементов в плоской и объемной постановке с использованием компьютерной системы FEM/FEA ANSYS 5.1 с учётом контактного взаимодействия в соединении

**Ключевые слова:** механика разрушения; коэффициент интенсивности напряжений; метод конечных элементов; пластические деформации

### ВВЕДЕНИЕ

Большое число отказов в узлах разъемных соединений авиационной техники и относительно малый налет на отказ объясняются тяжелыми условиями эксплуатации и повышенным уровнем переменных нагрузок в процессе эксплуатации (особенно при взлете, посадке и рулении).

В высоконагруженных узлах и соединениях ГТД, таких как резьбовые и замковые соединения, трещины распространяются преимущественно в областях с объёмным напряжённым состоянием [1-3], при этом рост трещин приводит, как правило, к преждевременному разрушению конструкции.

Большинство работ в исследуемой области сосредоточено на изучении трещин при упругом нагружении без учёта пластичности.

В данной статье анализируется поведение пластической области в вершине произвольно расположенной трещины методом конечных элементов на примере высоконагруженных резьбовых и замковых соединений компрессора ГТД с учётом условий их нагружения. При решении задачи за пределами упругости были использованы гипотезы теории малых пластических деформаций [4,5]. Теория метода численного расчёта подробно описана в работе [6].

### СОДЕРЖАНИЕ

В работе применена интегральная формулировка соответствующих краевых задач механики деформированного твердого тела, а для решения задач механики разрушения наиболее целесообразным является асимптотический метод конечных элементов (МКЭ) в форме перемещений, где напряжённое состояние в области вершины трещины определяется как

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} f_1(\theta) \\ f_3(\theta) \\ f_5(\theta) \end{bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} f_2(\theta) \\ f_4(\theta) \\ f_6(\theta) \end{bmatrix} + O, \quad (1)$$

где  $K_I$ ,  $K_{II}$  — коэффициенты напряжений первого и второго рода. Значения коэффициента интенсивности напряжений вычисляем по формуле

$$K_i = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{\pi}{2L}} \Delta U_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $\Delta U_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  — функция перемещений в вершине трещины.

В этом случае разрешающее уравнение получается путем минимизации полной потенциальной энергии рассматриваемой системы, выраженной через поле перемещений.

Связь между напряжениями и деформациями в матричном виде определяется уравнением [7]

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} + \{\sigma^T\}, \quad (2)$$

где  $[D]$  — матрица упругости материала, элементы которой через константы материала  $E_{ij}, \nu_{ij}, G_i$  определяются по известным формулам [4];  $\sigma^T$  — температурные напряжения.

Решение упругопластических задач осуществлялось итерационными методами (метод касательной жесткости Ньютона-Рафсона (НР)), описанными в работах [7,8]. Так, если уравнение механического состояния можно представить в виде (2), а матрица упругости зависит от уровня деформаций

$$[D] = [D(\{\varepsilon\})] = [[\{U\}]], \quad (3)$$

то разрешающее уравнение в методе НР будет иметь вид

$$\{\Psi\} = [K(\{U\})] \{U\} - \{R\} = 0. \quad (4)$$

Решение нелинейной задачи сводится к последовательному решению упругих задач, где на каждой итерации для всех элементов определяются новые матрицы жесткости (упругости)  $[D]$ , по значениям которых строят касательные матрицы жесткости.

Так, если основное разрешающее уравнение МКЭ записать в виде

$$[K] \{u\} = \{F^a\}, \quad (5)$$

где  $[K]$  — матрица жесткости;  $\{u\}$  — вектор перемещений;  $\{F^a\}$  — вектор нагрузки, то итерационный процесс в методе Ньютона-Рафсона можно представить [8] как

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^n\}, \quad (6)$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\}, \quad (7)$$

где  $[K_i^T]$  — касательная матрица жесткости;  $\{F_i^n\}$  — вектор нагрузки на  $i$ -м шаге нагружения.

Если результирующую нагрузку  $\{F^a\}$  разбить на  $n$  временных шагов, тогда уравнение (5) переписывается как

$$[K_{n,i}^T] \{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_{n,i}^n\}, \quad (8)$$

где  $[K_{n,i}]$  — матрица жесткости для времени  $n$  и  $i$ -й итерации;  $\{F_{n,i}\}$  — вектор нагрузки для времени  $n$  и  $i$ -й итерации;  $\{F_n^a\}$  — суммарный вектор нагрузки для временного шага  $n$ .

Расчет повторяется в соответствии с формулой

$$\{\Delta u_i\} = [K]_{n-1}^{-1} \{F\} \quad (9)$$

до тех пор, пока перемещения не перестанут изменяться.

Сходимость процесса достигается, когда

$$\begin{aligned} \|\{R\}\| &< \varepsilon_R R^{sum} \quad \text{или} \\ \|\{\Delta u_i\}\| &< \varepsilon_u R^{sum}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\{R\} = \{F^a\} - \{F^n\}$  — вектор невязки.

Сходимость метода переменных параметров упругости (метод переменной жесткости) показана на рис. 1, а.

Существенным развитием применяемого в работе метода НР является «метод длины дуги» [6], показанный в виде графика на рис. 1, б, основное разрешающее уравнение которого будет иметь вид

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} = \lambda^* \{F^a\} - \{F_i^n\}, \quad (11)$$

где  $\lambda^*$  — коэффициент нагрузки.

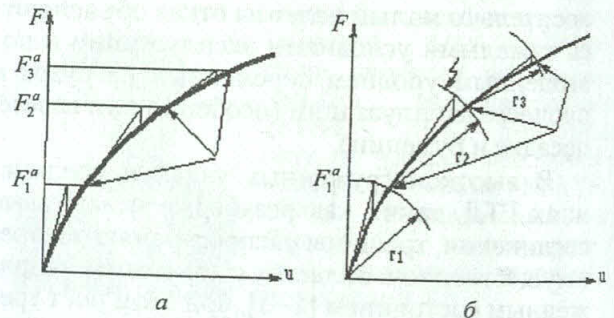


Рис.1. Метод переменных параметров упругости (метод Ньютона-Рафсона)

Согласно рис. 1, б для  $n$ -го шага по нагрузке и  $i$ -й итерации уравнение (11) примет вид

$$\begin{aligned} [K_i^T] \{\Delta u_i\} - \Delta \lambda^* \{F^a\} &= \\ &= (\lambda_n - \lambda_i) \{F^a\} - \{F_i^n\} = -\{R_i\}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\Delta \lambda^*$  — коэффициент приращения нагрузки; а приращение перемещений будет вычисляться по формуле

$$\{\Delta u_i\} = \Delta \lambda^* \{\Delta u_i^I\} + \{\Delta u_i^{II}\}, \quad (13)$$

где  $\{\Delta u_i^I\}$ ,  $\{\Delta u_i^{II}\}$  — соответственно определяются как

$$\begin{aligned} \{\Delta u_i^I\} &= [K_i^T]^{-1} \{F^a\}, \\ \{\Delta u_i^{II}\} &= [K_i^T]^{-1} \{F^a\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Радиус длины дуги на  $i$ -й итерации находится из условия

$$l_i^2 = \lambda_i^2 + \beta^{*2} \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_n\}, \quad (15)$$

где  $\beta^*$  — масштабный фактор;  $\Delta u_n$  — суммарные перемещения всех  $\Delta u_i$ .

Коэффициент нагрузки определяется по формуле

$$\Delta \lambda = \frac{r_i - \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_i^{II}\}}{\beta^2 \lambda_i^* + \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_i^I\}}, \quad (16)$$

где

$$\{u_{i+1}\} = \{u_n\} + \{\Delta u_n\} + \{\Delta u_i\},$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_n + \lambda_i + \Delta \lambda.$$

Сходимость итерационного процесса будет достигаться в пределах некоторой дуги, пересекающей кривую «нагрузка-перемещение» в определенных точках, что устраняет сингулярность матрицы жесткости в этих точках. При этом вычислением радиуса в начале каждого очередного шага контролируется сходимость и осуществляется движение по равновесной кривой вида  $F = f(u)$  (см. рис. 1, б). Автоматическая коррекция радиуса с учетом кривизны зависимости «нагрузка-перемещение» позволяет получать решения для пути нагружения, имеющего участки, когда модуль пластичности равен нулю или имеет отрицательное значение. Использование при упругопластическом анализе напряжённо-деформированного состояния (НДС) в области вершины трещины «метода ограничивающих дуг» [6] существенно расширяет устойчивость и точность решения.

При численных исследованиях трехмерных КЭ-моделей соединений ГТД, для которых характерно наличие больших разреженных матриц, наибольшее распространение нашли итерационные методы [4], которые предварительно модифицируют матрицы для получения приближенного решения системы однородных линейных уравнений, что повышает скорость вычислений и минимизирует объем требуемой дисковой памяти.

В работе для решения больших разреженных матриц использовали разновидность итерационных методов — метод обусловленных

сопряженных градиентов, подробно описанный в работах [4,5,6].

В отличие от фронтального метода, который решает систему уравнений (5) непосредственно, метод обусловленных сопряженных градиентов вначале преобразует систему уравнений к виду

$$\{P\} = \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T [F]$$

путем умножения каждой части матричного равенства на  $\{u\}^T$  и переноса слагаемых в одну сторону. Для получения решения минимизируется невязка решения  $\{R\}$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Распределение напряжений в форме изополос  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  показано на рис. 2. Учитывались нагрузки от действия газодинамических и центробежных сил, действующих на перо лопатки компрессора, что соответствует частоте вращения диска 9600 об/мин. Контактная задача решалась с учетом трения, действующего по боковым граням замкового соединения. Было установлено, что усталостная трещина берет свое начало в зоне впадины первого наиболее нагруженного выступа замкового соединения и распространяется в виде угловой трещины.

На рис. 3 представлены рассчитанные контуры пластической зоны в области вершины трещины, расположенной во впадине первого нагруженного витка резьбового профиля М10 × 1,5 из материала 30ХГСА с ростом нагрузки с  $\sigma_n/\sigma_T = 0,48$  до  $\sigma_n/\sigma_T = 0,81$ .

Установлено, что начальное направление развития усталостной трещины во впадине наиболее нагруженного витка резьбы совпадает с направлением действия максимальных касательных напряжений. Расчёты показали, что происходит эволюция зон пластических деформаций по мере продвижения трещины. Развитие пластической области в вершине трещины при росте приведенной нагрузки на резьбовое соединение в пределах  $\sigma_n/\sigma_T = 0,24 \dots 0,48$  наиболее интенсивно идёт в направлении её роста. Особенно эта тенденция наблюдается в начальной стадии, когда ширина пластической области превосходит её длину.

На рис. 4 также приведены результаты исследования изменения сдвиговых пластических деформаций  $\epsilon_{xy}^{pl}$  в области вершины трещины, расположенной в первом нагруженном витке резьбы, для трещины глубиной 0,2 мм.

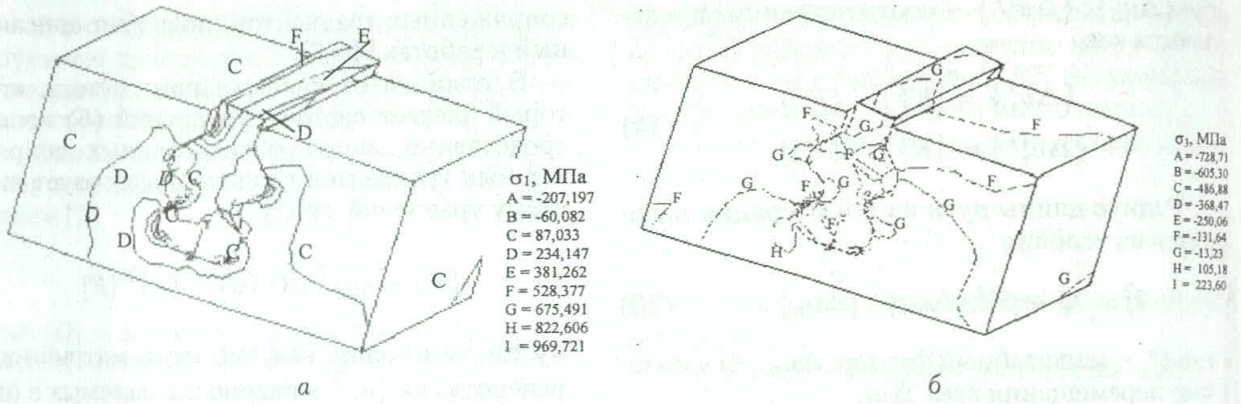


Рис. 2. Распределение изолиний напряжений  $\sigma_1$  (а) и  $\sigma_3$  (б) в объемной модели замкового соединения с учетом трения

Установлено, что при выходе трещины глубиной 0,2 мм на поверхность впадины резьбового профиля зона пластичности увеличивается в 1,2 раза, что делает эти трещины более опасными по сравнению с подповерхностными. В том случае, когда действие сдвиговых напряжений совпадает с направлением роста трещины, т.е. имеет место начальная стадия распространения трещины  $h/d < 0,2$ , пластическая область преимущественно развивается в направлении, перпендикулярном направлению роста трещины. При этом начальное направление развития усталостной трещины во впадине наиболее нагруженного витка резьбы совпадает с направлением действия максимальных касательных пластических напряжений. Длина пластической области  $a_p$  опре-

делялась как расстояние от вершины трещины до конца пластической области в направлении ее роста. С увеличением нагрузки  $\bar{\sigma}_H$  происходило одновременное увеличение зон пластичности как в глубину  $a_p$ , так и по ширине  $b_p$  пластической зоны (см. рис. 4, б). Для уровня нагружения  $\bar{\sigma}_H = 0,3$  характерно примерное равенство параметров зон пластичности по длине  $a_p$  и высоте  $b_p$  соответственно.

Результаты упругопластического расчета и для случая подповерхностной трещины представлены на рис. 5. Характерно взаимное влияние зон концентрации в вершине трещины и радиуса в первом нагруженном витке на изменение поведения изополос напряжений в сечении детали (см. рис. 5, б, г).

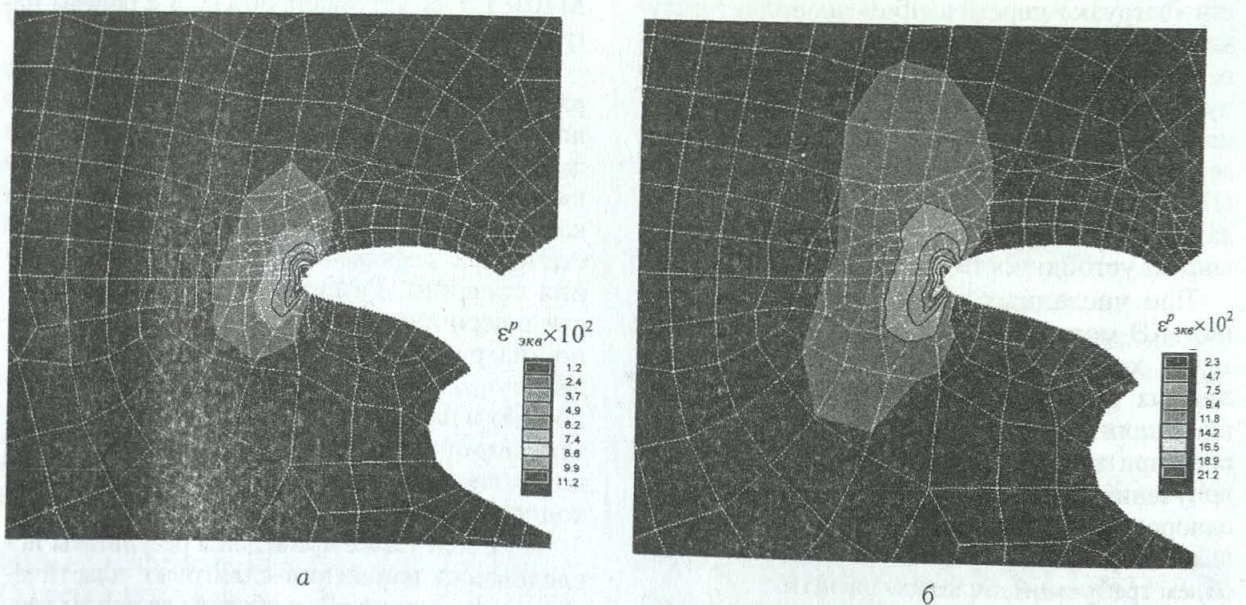


Рис. 3. Развитие пластических деформаций  $\varepsilon_{\text{экв}}^p$  в вершине произвольно расположенной трещины в зависимости от действующей нагрузки: а —  $\sigma_H/\sigma_T = 0,48$ ; б —  $\sigma_H/\sigma_T = 0,81$

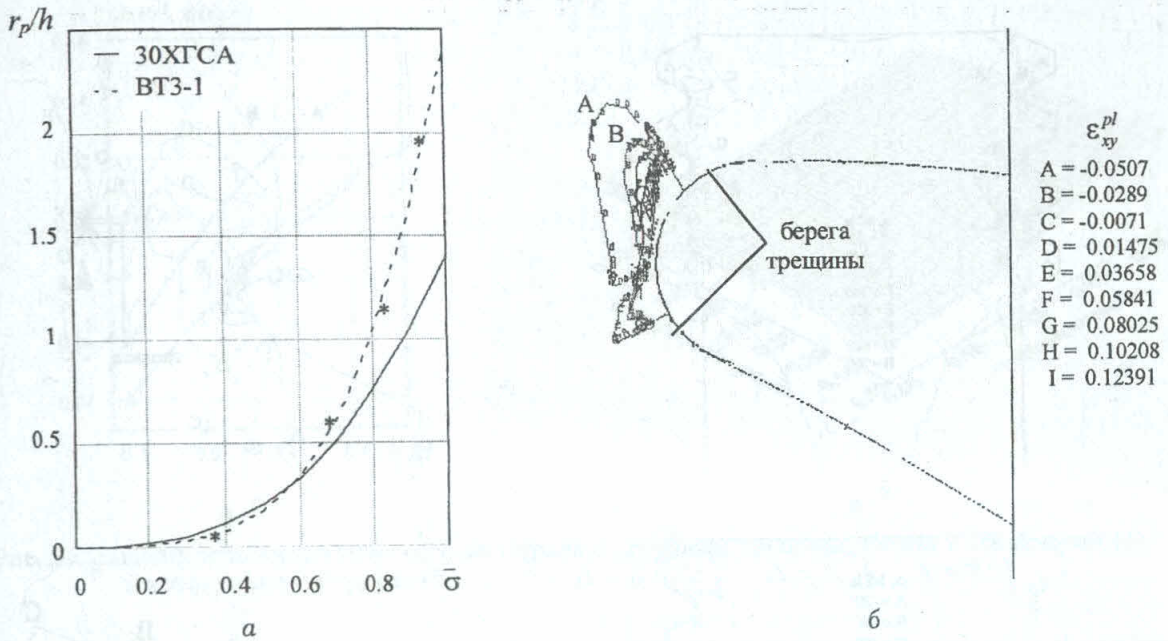


Рис. 4. Величина пластической зоны (а) и сдвиговые пластические деформации  $\epsilon_{xy}^{pl}$  (б) в области вершины трещины

Одним из важных параметров, определяющих процессы разрушения конструкций в условиях малоциклового нагружения в области концентратора, является энергетический интеграл [10].

Для нелинейно-упругого материала, находящегося под действием монотонной нагрузки, энергетический интеграл характеризует изменение потенциальной энергии, а также является параметром, отражающим особенности НДС у вершины трещины [10]. Определение значений  $J$ -интеграла применительно к реальным креплениям ГТД осуществлялось по формуле

$$J_{\bar{a}} = \int_{\Gamma} (w n_{\bar{a}} - p_i u_{i,\bar{a}}) d\Gamma + \iint_A [\sigma_{ij} (\epsilon_{ij,\bar{a}}^p + \alpha \Delta T \delta_{ij,\bar{a}}) - (\sigma_{ie} u_{i,\bar{a},e})] dA, \quad (17)$$

где  $w = (1/2)\sigma_{ij}\epsilon_{ij}$ . Оценку  $J$ -интеграла выполняли с помощью метода виртуального роста трещины, подробно описанного в соответствующей литературе [11,12] и реализованного в виде прикладных программ на встроенном языке APDL вычислительного комплекса ANSYS 5.3 [9].

При этом узловые значения напряжений, перемещений и деформаций определялись из решения соответствующей упругопластической задачи.

Расчеты проводились для шпилек М6 и М10, изготовленных из титанового сплава

ВТЗ-1, имеющего следующие характеристики: предел текучести  $\sigma_T = 1040$  МПа, модуль упругости  $E = 1,12 \times 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,32$ .

$J$ -интеграл определялся для каждого типоразмера болта при различных длинах трещины. Для резьбы М6×1 и М10×1,5 длина трещины принималась соответственно равной 1 мм, 1,5 мм, 2 мм и 1,5 мм, 2,5 мм, 3,5 мм. Зависимости  $J$ -интеграла от приведенной глубины трещины  $h/d$  показаны на рис. 6. Кривые 1–4, показанные на рис. 6, а, соответствуют значениям  $J$ -интеграла для резьбы М6 для различных уровней номинальных напряжений.

Установлено также (см. рис. 6, б), что значение  $J$ -интеграла для резьбы М6 выше, чем для резьбы М10×1,5. Так, например, при отношении  $h/d = 0,3$  для резьбы М6  $J$ -интеграл в 1,11 раза выше, чем для резьбы М10×1,5.

На рис. 7 приводятся результаты расчетов  $J$ -интеграла на плоских образцах с заполненным отверстием при осевом растяжении и различных значениях натяга  $\Delta$  и коэффициента трения в соединении между поверхностью болта и отверстия.

Анализ этих данных показывает, что наиболее опасным является случай, когда параметр натяга в соединении болт-пластина  $\Delta = 0,025$ .

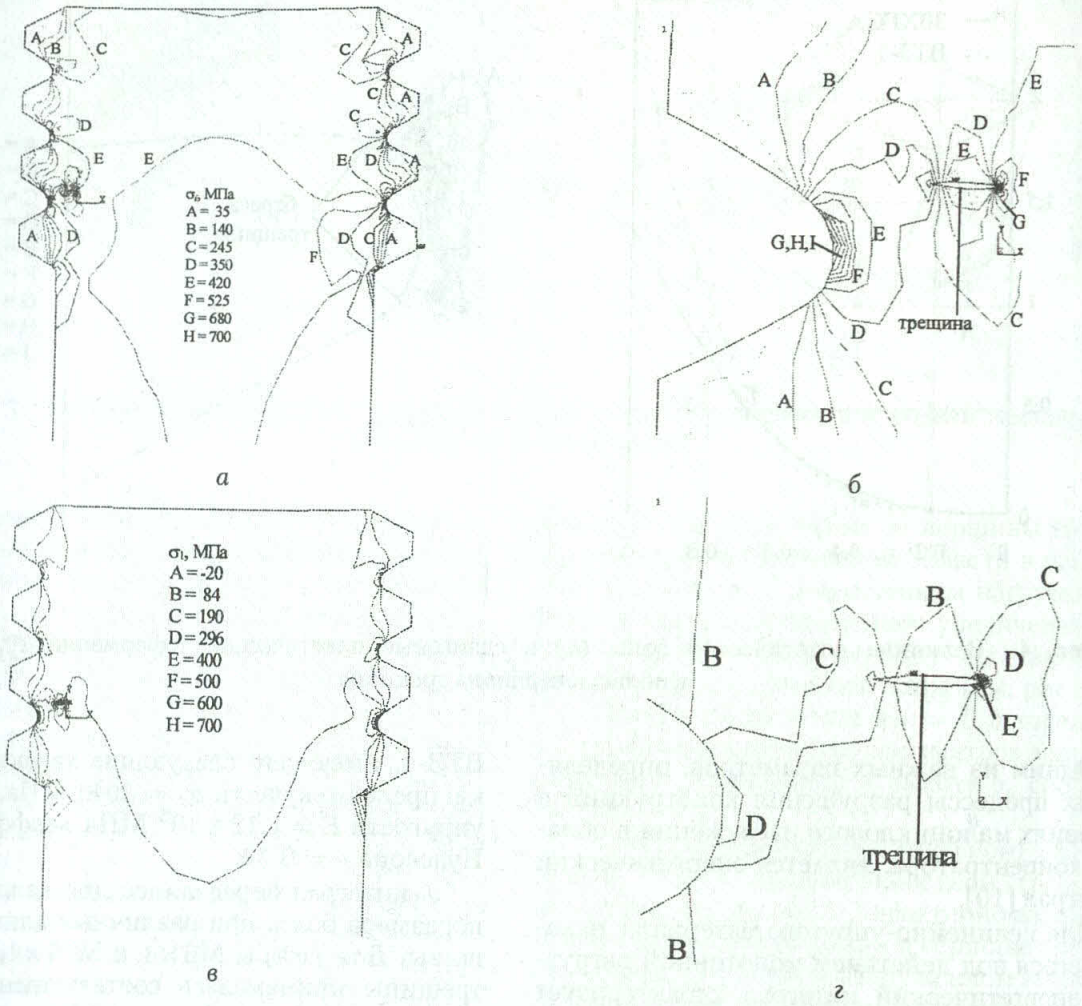


Рис. 5. Упругопластическая область в вершине подповерхностной трещины: а, б —  $\sigma_i^p$ ; в, г —  $\sigma_i^p$

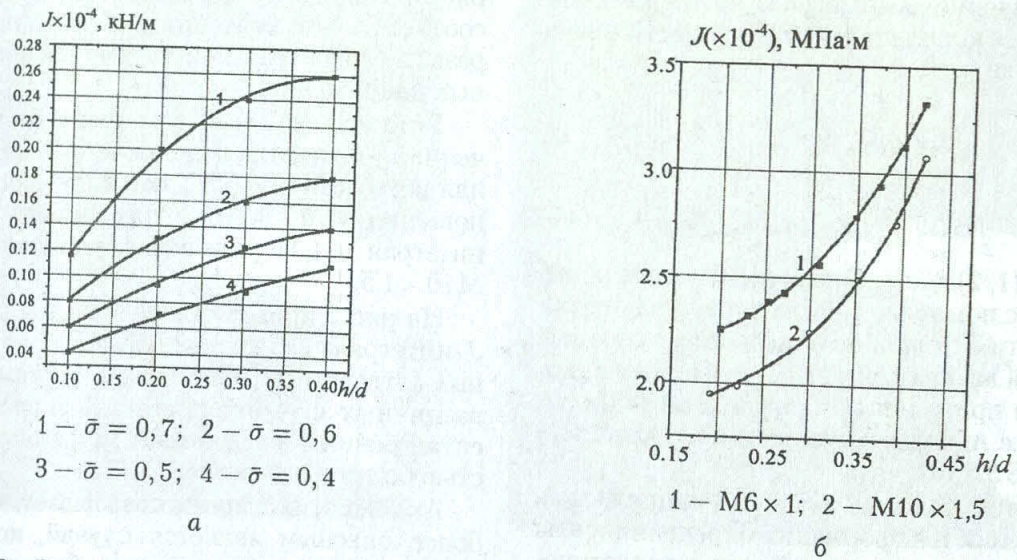


Рис. 6. Зависимость энергетического интеграла от уровня приведённой нагрузки (а) и типа-размера резьбы (б)

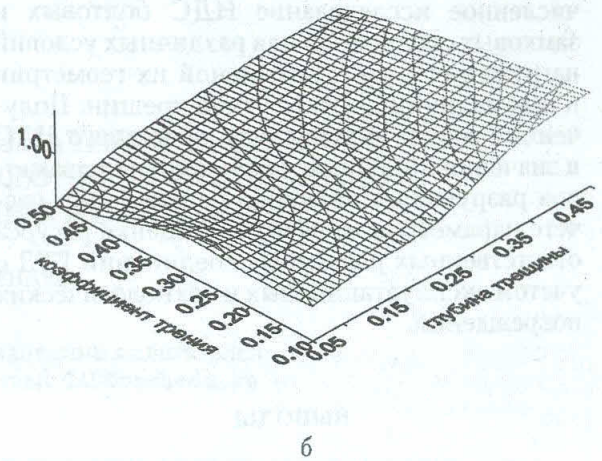
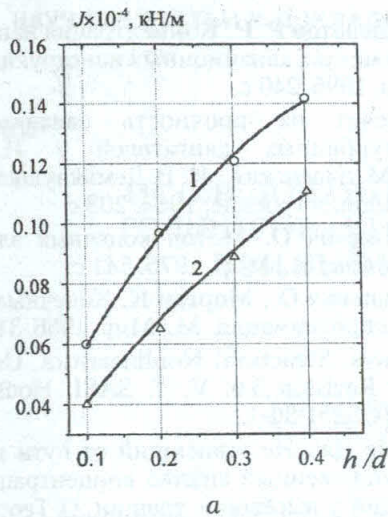


Рис. 7. Зависимость энергетического интеграла от глубины трещины, натяга в соединении (а) и коэффициента трения (б): а: 1 -  $\Delta = 0,025$ ; 2 -  $\Delta = 0$ ; б -  $\Delta = 0,01$

Значения упругопластического коэффициента интенсивности напряжений  $K_\sigma$ , являющегося одним из определяющих параметров в нелинейной механике разрушения, с учетом конструктивных особенностей высоконагруженных резьбовых соединений определялись по формуле

$$K_\sigma = [EJ_a / \sigma_T^2 I_n]^{1/(n+1)} \quad (18)$$

Для наиболее типичного вида нагружения и конструктивного исполнения резьбы М10×1,5 из стали 30ХГСА получены зависимости упругопластического коэффициента интенсивности напряжений  $K_\sigma$  от приведен-

ной глубины трещины с учетом вида реальной диаграммы деформирования.

Все расчеты упругопластического коэффициента интенсивности напряжений  $K_\sigma$  получены для конструктивного исполнения резьбовой пары (высота гайки  $1,0d$ , резьба М10×1,5, материал болта и гайки — сталь 30ХГСА) и уровня нагрузки  $\bar{\sigma}_H = 0,5$ .

Установлено (рис. 8), что с ростом модуля пластичности (показателя степени  $n$  в уравнении  $\sigma = f(\epsilon^n)$ ) и глубины трещины упругопластический КИН  $K_\sigma$  существенно изменяется. Так, для  $d/h = 0,3$  и соответственно  $n = 1, 3, 8, 16$   $K_\sigma$  равен 1,75; 2,0; 2,25; 3,2.

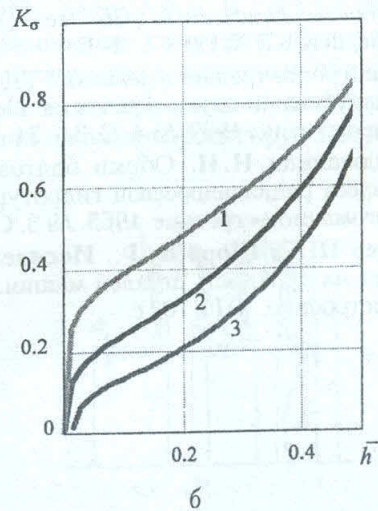
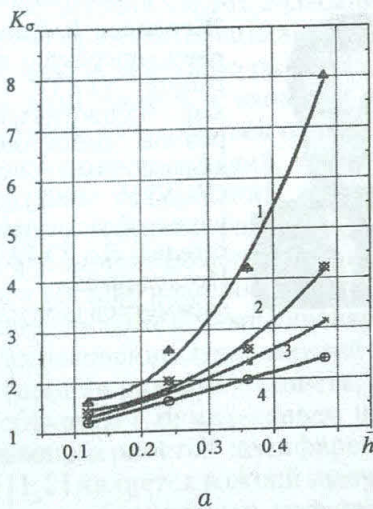


Рис. 8. Зависимость упругопластического коэффициента интенсивности напряжений от глубины трещины: а — первый опорный виток резьбы; б — под головкой болта; 1 -  $n = 1$ ; 2 -  $n = 3$ ; 3 -  $n = 8$ ; 4 -  $n = 16$

Таким образом, проведено комплексное численное исследование НДС болтовых и замковых соединений для различных условий нагружения с учетом реальной их геометрии и при наличии дефектов типа трещин. Полученные результаты анализа локального НДС и значения линейных и нелинейных параметров разрушения являются основой при расчете параметров живучести и оценке ресурса ответственных разъёмных соединений ГТД с учетом эксплуатационных и технологических повреждений.

### ВЫВОДЫ

1. В работе получил дальнейшее развитие и апробацию метод Ньютона-Рафсона в форме метода «ограничивающих дуг» для решения упругопластических задач в области конструктивного концентратора напряжений.

2. Получены упругопластические поля напряжений и деформаций в области вершины развивающейся трещины и определены закономерности их изменения с учетом роста нагрузки и глубины трещины.

3. Выявлены зависимости изменения энергетического интеграла Черепанова-Райса для реальных резьбовых соединений с учетом геометрии и натяга в соединении.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аксянов В. У., Бакланов В. С., Прошин В. М. Диагностика состояния газозооного тракта СУ с помощью тензометрии узлов крепления ГТД // Конструкционная прочность двигателей: Сб. тез. докладов. Куйбышев: КПИ, 1988. С. 5-6.
2. Анализ роста трещин в деталях ГТД // Новости зарубежной науки и техники. Серия двигателестроение. 1989. № 4. С. 31-34.
3. Бабаджаниди Н. И. Обрыв болтов рабочего колеса радиальноосевой гидротурбины // Энергомашиностроение. 1965. № 3. С. 22.
4. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.

5. Мавлютов Р. Р. Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. М.: Наука, 1996. 240 с.
6. Расчет на прочность авиационных газотурбинных двигателей / И. А. Биргер, З. М. Даревский, И. В. Демьянушко и др. М.: Машиностроение, 1984. 208 с.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
8. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986. 318 с.
9. Ansys. Structural Nonlinearities. User's Guide for Revision 5.0. V. 1. SASI, Houston. 1994. DNOS201:50-1.
10. Райс Дж. Не зависящий от пути интеграл и приближенный анализ концентрации деформаций у вырезов и трещин // Теоретические основы инженерных расчетов: Тр. американского общества инженеров-механиков. Сер. Е. 1968. Т. 35, № 4. С. 340-349.
11. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1980. 256 с.
12. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упругопластического разрушения. М.: Наука. 1985. 504 с.

### ОБ АВТОРАХ



**Будилов Игорь Николаевич**, профессор каф. сопротивления материалов УГАТУ. Дипл. инженер по технологии сварочного производства (УГАТУ, 1978), д-р техн. наук в области тепловых двигателей ЛА (УГАТУ, 1998). Исследования прочности разъёмных соединений.



**Жернаков Владимир Сергеевич**, проректор по научной работе УГАТУ, профессор каф. сопротивления материалов. Дипл. инженер по авиационным двигателям (УГАТУ, 1967), д-р техн. наук в области тепловых двигателей ЛА (УГАТУ, 1992). Исследования силовых параметров разрушения.