НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 51:681

МЕТОДЫ ВЕРИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В. П. ЖИТНИКОВ, Н. М. ШЕРЫХАЛИНА

Факультет информатики и робототехники УГАТУ
Тел: (3472) 23 32 00 E-mail: zhitnik@ugatu.ac.ru

Обсуждается возможность повышения достоверности численных результатов при наличии различных источников ошибок и искажений неизвестного уровня. Предлагается концептуальная схема проведения численного решения задач, основанная на интерполяции и повторной экстраполяции результатов численного эксперимента, сравнении результатов расчета одной и той же величины разными методами

Достоверность; численный эксперимент; оценка погрешности; доверительный интервал

ВВЕДЕНИЕ

Погрешность результата численного решения математической задачи может быть вызвана следующими причинами:

– ошибками округления (усечения) чисел в машинном представлении;

– погрешностью численного метода (заменой производных конечной разностью, интеграла – конечной суммой, т. е. дискретизацией задачи);

– ошибками программирования или неправильной работой вычислителя.

Для каждой из этих составляющих должны быть разработаны надежные способы учета их вклада в общую погрешность. Однако анализ научной печати показывает, что известные в настоящее время методы оценок погрешности имеют ограниченные возможности и поэтому на практике применяются редко. Зачастую это приводит к заметным ошибкам (можно привести примеры, когда оценки занижались на несколько порядков). Поэтому возникает проблема разработки новых и усовершенствования известных способов оценок с целью создания надежной методики верификации численных результатов.

1. СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ОКРУГЛЕНИЯ

Один из наиболее перспективных подходов к оценке погрешности, связанной с ограниченностью разрядов в машинном представлении чисел, заключается в применении методов интервальной математики, которые позволяют получить численное решение в виде интервала с гарантированными границами. При этом всегда сохраняется два результата (округленные до большего и до меньшего значения). В настоящее время в этой области достигнут значительный успех. Выпускаются процессоры, работающие по правилам интервальной арифметики.

Возможность контроля погрешности округления при отсутствии таких процессоров несколько облегчает то обстоятельство, что эта погрешность, в отличие от остальных типов погрешностей, как правило, ведет себя достаточно хаотично, и по уровню этой хаотической составляющей можно судить, хотя и приближенно, о ее величине.

Ошибки округления резко возрастают в ситуациях, близких к математическим неопределенностям типа $0/0$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$. Поэтому одним из основных способов уменьшения этих погрешностей является аналитическое разрешение этих неопределенностей.

В любом случае более предпочтительной представляется работа в условиях, когда погрешность округления мала по сравнению с погрешностью численного метода, так как в противном случае эта хаотическая составляющая общей погрешности ухудшит качество экстраполяции результатов численного эксперимента.

2. СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

2.1. Точные оценки погрешности

Рассмотрим примеры оценок погрешности известных методов вычислительной математики [1, 2]. Погрешность алгебраического интерполяционного многочлена $P^n(x)$ степени n оценивается следующим образом:

$$|f(x) - P^n(x)| \le \frac{\prod_{i=1}^{n+1} |x - x_i|}{(n+1)!} \max_{\xi\in[a,b]} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|, \quad (1)$$

где $x_i \in [a, b]$ — узлы сетки. Оценки такого типа имеют место также при численном дифференцировании, интегрировании и т. п.

Если производная $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна при $x \in [a, b]$ и ее максимальное значение нетрудно оценить, то неравенство (1) может быть практически использовано для верхней оценки погрешности (например, при интерполяции табличных значений элементарных функций). Если же $f(x)$ является искомой, то производная $f^{(n+1)}(x)$ неизвестна. Точность вычисленного ее значения может оказаться весьма невысокой, и достоверность такой оценки погрешности вызывает сомнения.

При решении уравнений и систем уравнений

$$Ax = b + \Delta_b \quad (2)$$

с возмущенной правой частью справедлива оценка

$$\|\Delta_x\| \le \left\|A^{-1}\right\| \|\Delta_b\|, \quad (3)$$

где Δ_x, Δ_b — погрешности искомых величин и правых частей, $\left\|A^{-1}\right\|$ — норма обратного оператора. Оценка (3), полученная для «худшего случая», часто оказывается слишком завышенной и непригодной для практического использования. В особенности это относится к решению систем уравнений большого порядка.

Решение практических задач связано, как правило, с применением суперпозиции нескольких «элементарных» численных методов, что существенно осложняет оценку погрешности. Видимо, по этой причине вопрос оценки погрешности полученных численных данных в современных научных публикациях часто не освещается, а остается личным делом автора. Но тогда возникают вполне оправданные сомнения в достоверности этих результатов.

Вопрос о достоверности численных результатов иногда подменяется доказательством сходимости приближенного решения к точному или даже неконструктивным доказательством существования решения. Следует отметить, что теоретическая сходимость — свойство асимптотическое и не гарантирует адекватного характера поведения приближенного решения при конечных значениях параметра дискретизации (в (1) это расстояние между соседними узлами $h = |x_i - x_{i-1}|$).

Например, при решении задач для уравнений с частными производными методом конечных разностей обычно ограничиваются установлением факта, что разностное уравнение аппроксимирует дифференциальное, и доказательством устойчивости разностной схемы. Это обеспечивает сходимость приближенного решения к точному как $O(h^k)$ (k — порядок точности метода) [1, 2]. При этом приходится констатировать, что численная оценка погрешности результатов остается неопределенной.

2.2. Оценки погрешности на основе экстраполяции результатов численного эксперимента

Одним из способов оценки погрешности дискретизации, которая возникает при применении численных методов (например, численного интегрирования и дифференцирования, замены бесконечных сумм конечными и т. п.), является правило Рунге [1], заключающееся в последовательном увеличении числа узловых точек n и соответствующем уменьшении шага дискретизации h. Оценка погрешности численных методов по правилу Рунге [1] основана на предположении, что зависимость численного результата от h можно представить в виде

$$z_h = z + c_1 h^k + \delta(h), \quad (4)$$

где z — точное значение, z_h — приближенный результат, полученный при шаге дискретизации, равном h; c_1 — коэффициент, который предполагается не зависящим от h; k — порядок точности метода; $\delta(h)$ — величина, малая по сравнению с $c_1 h^k$. В этом случае, согласно правилу Рунге, уменьшив шаг дискретизации в 2 раза и отбросив малые, можно найти c_1 и тем самым оценку погрешности.

Данное правило используется при условии, если порядок точности известен, а $\delta(h)$ действительно является пренебрежимо малой величиной при используемом значении h. В [3, 4] предложено обобщение этого метода на более сложные случаи. Пусть известны три приближенных значения y_j некоторой расчетной величины z, полученные при изменении h. Запишем это в виде системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} y_1 &= z + c, \\ y_2 &= z + cq_1^k, \\ y_3 &= z + cq_1^k q_2^k, \end{aligned} \tag{5}$$

где $q_1 = h_2/h_1 < 1$, $q_2 = h_3/h_2 < 1$. Из (5) получим

$$q_1^k \frac{1 - q_2^k}{1 - q_1^k} = \frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_2}, \tag{6}$$

причем правая часть (6) больше нуля и существенно меньше единицы, иначе допущение (4), очевидно, теряет смысл. В этом случае решение уравнения (6) существует и единственно. Из этого трансцендентного уравнения определяется k. При $q_1 \neq q_2$ это можно сделать численным методом. Тогда решение системы (5) записывается в виде

$$\begin{aligned} c &= \frac{y_2 - y_3}{q_1^k \left(1 - q_2^k\right)}, \\ z &= y_3 - cq_1^k q_2^k = \frac{y_3 - y_2 q_2^k}{1 - q_2^k}. \end{aligned} \tag{7}$$

Особый интерес представляет величина z как экстраполированное (уточненное) значение искомого параметра. Разность $y_j - z$ между рассчитанным y_j и экстраполированным z значениями дает оценку погрешности.

Такой способ определения неизвестных z, c, k (идентификации математической модели погрешности) назовем по аналогии с [5] методом трехточечной экстраполяции.

Как обобщение этого способа рассматривается возможность применения для экстраполяции метода наименьших квадратов [6] по 4-м и более точкам:

$$\Phi\left(a, k, z\right) = \sum_{j=1}^{m} \left[a + k \ln q_j - \ln \left|z_j - z\right|\right]^2 \to \min. \tag{8}$$

Предлагается следующий прием, позволяющий существенно усилить результаты предложенных способов экстраполяции. Строя экстраполяции для разных h, можно получить последовательность экстраполированных значений z_j. Тогда для этих значений можно повторить процесс экстраполяции (6), (7) или (8). В этом случае, во-первых, мы получаем оценку погрешности оценки погрешности, которую можем использовать в качестве критерия применимости данного способа оценки (если ее доля в погрешности мала, то такой оценке можно верить). Во вторых, мы получаем оценку погрешности экстраполированных чисел z_j, которая придает смысл их использованию в качестве уточненных значений искомого параметра.

Этот прием можно повторить и еще раз, что в совокупности может дать выигрыш в точности результата на несколько порядков.

В качестве примера рассмотрим задачу суммирования плохо сходящегося ряда

$$f_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}, \quad \alpha = 1{,}1. \tag{9}$$

Результаты расчетов и экстраполяции приведены на рис. 1 (где Δ_f — оцененное отличие полученного значения от бесконечной суммы; N используется в (5) как величина, обратно пропорциональная h). Для удобства представления результатов выбрана десятично-логарифмическая шкала.

На рис. 1 показаны четыре системы точек. Нижняя (с номером 0) — это вычисленные значения. Видно, что погрешность Δ_f даже при $N = 10^8$ превышает единицу. Остальные системы точек получены последовательным проведением экстраполяции исходных и экстраполированных значений. В результате первая экстраполяция (1) дает при $N = 10^8$ точность порядка 10^{-6}, а вторая (2) — 10^{-12}. Нетрудно подсчитать, что для получения такой точности путем прямого вычисления сумм потребуется более 10^{50}–10^{100} слагаемых.

В табл. 1 даны результаты второй экстраполяции и их оценки путем сравнения с третьей. Δ_{extr} — оценка погрешности сравнением с экстраполированными значениями; k_Δ — относительная погрешность этой оценки. Тем самым, согласно этим данным, погрешность оценки погрешности составляет 10–25 процентов. По-видимому, такой оценке следует доверять.

Величина Δ_{exact} — это разница между f_N и результатом 10.584448464950849, рассчитанным по более точным формулам [8]. Видно хорошее соответствие оценок Δ_{extr} и Δ_{exact}.

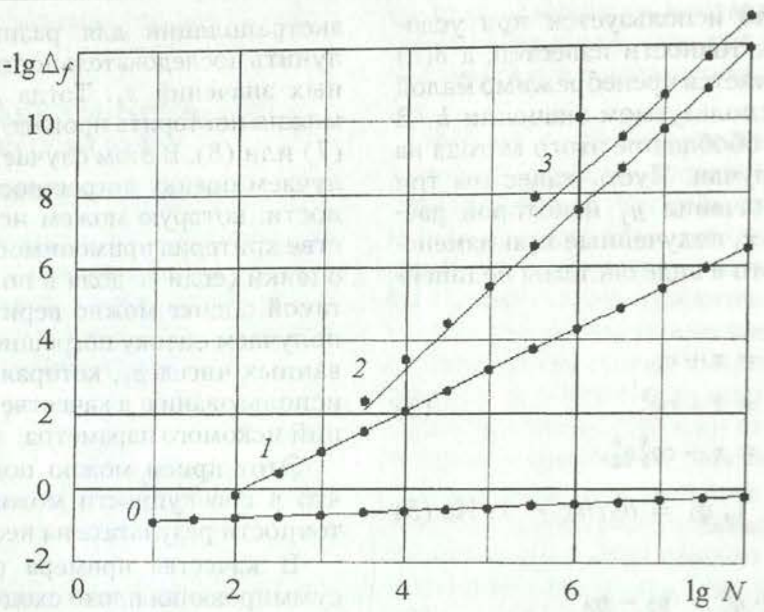

Рис. 1. Применение повторной экстраполяции для уточнения результатов суммирования медленно сходящегося ряда

Третья экстраполяция (табл. 2) оценивается (путем сравнения с четвертой) весьма грубо. Об этом говорят большие значения k_Δ. Это значит, что такую оценку следует отвергнуть. Причиной ухудшения, по-видимому, является то, что начинает сказываться ограниченная разрядность машинного слова.

В качестве второго примера рассмотрим результаты расчетов циркуляции C уединенной волны Стокса [7] в виде зависимости $-\lg \Delta_F$ от $\lg N$, где N — число узловых точек; $\Delta_F = |C_N - z_{N\max}|$, $z_{N\max}$ — экстраполированное значение циркуляции, полученное для максимального значения N. Как видно из рисунка, вычисленные значения, отмеченные точками (0), хорошо ложатся на прямую. Это позволяет по правилам (6), (7) получить величину $z^*_{N\max}$ экстраполяцией экстраполированных значений z_N. Видно, что для достаточно больших N зависимость $-\lg |z_N - z^*_{N\max}|$ достаточно хорошо аппроксимируется прямой (точки 1 на рис. 2). Аналогичная зависимость для z^*_N имеет более сложный вид (точки 2 на рис. 2), так как погрешность z^*_N меняет знак. Рисунок показывает, что экстраполяция позволяет уменьшить погрешность в общем на 2–3 порядка. При решении задачи о солитоне Стокса такое уточнение за счет увеличения N практически невозможно из-за резкого нелинейного роста потребности в машинных ресурсах.

В табл. 3 представлены результаты расчетов циркуляции C для солитона Стокса. В колонках таблицы даны оценки погрешности, аналогичные табл. 1 и 2.

Данные табл. 3 выглядят удовлетворительными с точки зрения малости k_Δ. Это позволяет дать достаточно надежную оценку наиболее точного экстраполированного значения (табл. 3, нижняя строка).

Из сказанного выше следует интересный вывод. Иногда бывает важнее не увеличение скорости сходимости метода, а стабилизация этой скорости при изменении числа узлов. В этом случае с помощью аппроксимации и экстраполяции результатов расчетов можно достичь лучших результатов.

Основные недостатки методов оценки, подобных правилу Рунге, связаны с ограниченностью любого численного эксперимента. На основе численных данных можно построить математическую модель процесса и экстраполировать результат (в сторону увеличения числа узловых точек), тем самым увеличивая точность этих данных. Однако гарантировать, что при дальнейшем увеличении числа узлов закон изменения данных останется неизменным, строго говоря, нельзя. Например, в случае попадания какой-нибудь особенности между узловыми точками при интерполяции есть опасность не заметить эту особенность и получить недостоверные оценки. Правда, проведение повторной экстраполяции позволяет выявить скрытые закономерности и в этом смысле увеличить надежность полученных оценок.

Таблица 1

Результаты второй экстраполяции для ряда (9)

N	f_N	Δ_{exact}	Δ_{extr}	k_Δ
316228	10.5844487348900	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$2.8 \cdot 10^{-7}$	-0.043
1000000	10.5844484923543	$2.7 \cdot 10^{-8}$	$2.7 \cdot 10^{-8}$	0.003
3162278	10.5844484670979	$2.1 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	-0.12
10000000	10.5844484651323	$1.8 \cdot 10^{-10}$	$2.0 \cdot 10^{-10}$	-0.11
31622777	10.5844484649650	$1.4 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	-0.13
100000000	10.5844484649516	$8.3 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	-0.26

Таблица 2

Результаты третьей экстраполяции для ряда (9)

N	f_N	Δ_{exact}	Δ_{extr}	k_Δ
10000000	10.5844484649288	$-2.2 \cdot 10^{-11}$	$-8.0 \cdot 10^{-12}$	1.73
31622777	10.5844484649485	$-2.4 \cdot 10^{-12}$	$-2.3 \cdot 10^{-11}$	-0.90
100000000	10.5844484649504	$-3.6 \cdot 10^{-13}$	$-1.6 \cdot 10^{-13}$	0.91

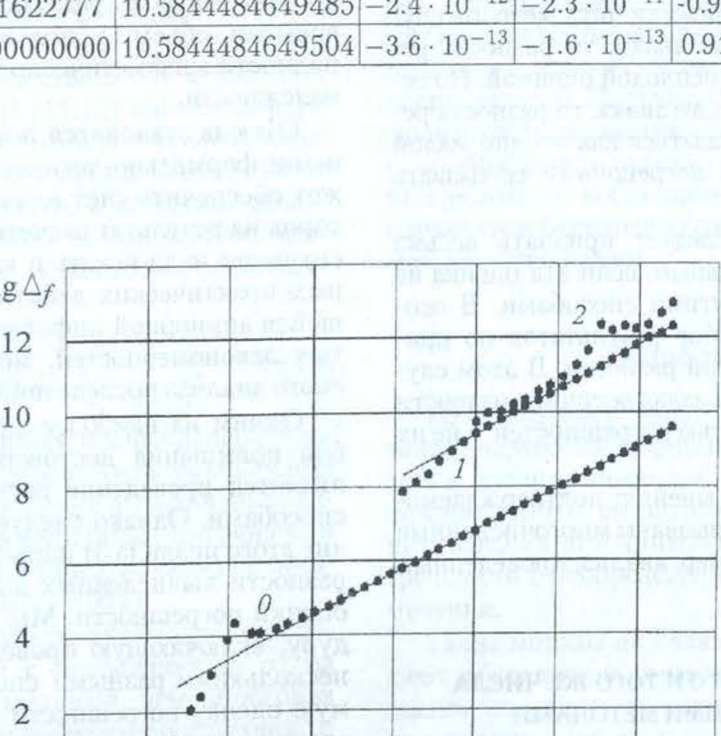

Рис. 2. Применение повторной экстраполяции для уточнения результатов решения задачи о солитоне Стокса

Таблица 3

Результаты экстраполяции расчетов циркуляции для солитона Стокса

N	C_N	Δ_{exact}	Δ_{extr}	k_Δ
1280	1.71456924051974	$-1.4 \cdot 10^{-11}$	$-8.4 \cdot 10^{-12}$	0.40
1522	1.71456924052445	$-9.2 \cdot 10^{-12}$	$-6.9 \cdot 10^{-12}$	0.25
1810	1.71456924052767	$-6.0 \cdot 10^{-12}$	$-5.5 \cdot 10^{-12}$	0.09
2152	1.71456924053000	$-3.7 \cdot 10^{-12}$	$-4.3 \cdot 10^{-12}$	-0.16
2560	1.71456924053105	$-2.6 \cdot 10^{-12}$	$-3.1 \cdot 10^{-12}$	-0.16
3044	1.71456924053216	$-1.5 \cdot 10^{-12}$	$-2.0 \cdot 10^{-12}$	-0.32
3620	1.71456924053271	$-9.9 \cdot 10^{-13}$	$-1.3 \cdot 10^{-12}$	-0.36
4305	1.71456924053300	$-7.0 \cdot 10^{-13}$	$-8.4 \cdot 10^{-13}$	-0.20
5120	1.71456924053325	$-4.5 \cdot 10^{-13}$	$-4.9 \cdot 10^{-13}$	-0.09
z^*_{Nmax}	1.7145692405337	$\pm 10^{-13}$		

2.3. Упрощенные оценки

В некоторых работах ввиду сложности оценки погрешности применяются упрощенные способы оценок. Например, в [9] один и тот же параметр рассчитывался двумя способами и разность двух чисел использовалась в качестве оценки погрешности. Заметим, что если погрешности двух методов случайно имеют разные знаки, то разность результатов является неплохой оценкой. Но если погрешности одного знака, то разность результатов может оказаться как угодно малой и поэтому оценкой погрешности ее назвать нельзя.

Такой подход следует признать весьма рискованным и наивным, если эта оценка не подтверждается другими способами. В особенности опасен отбор результатов по критерию минимума этой разности. В этом случае почти наверняка малая величина разности объясняется близостью погрешностей, а не их малостью.

Этим, по нашему мнению, подтверждаемому расчетами, были вызваны многочисленные ошибки (см., например, анализ, проведенный в работе [10]).

3. РАСЧЕТ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ ЧИСЛА НЕСКОЛЬКИМИ МЕТОДАМИ

Отметим, что в связи со сказанным выше универсального критерия, дающего полную гарантию справедливости и точности полученных оценок, не существует. В частности, этот вывод обусловлен возможностью существования ошибок программирования, учет степени влияния которых на окончательный результат не представляется возможным.

Тем не менее практика вычислений показывает, что можно сформулировать не слишком сложные правила, позволяющие значительно увеличить надежность численных результатов.

Прежде чем это сделать, отметим, что все перечисленные ошибки связаны с ограниченностью ресурсов реального вычислителя по времени, объему используемой памяти, разрядности арифметического сопроцессора и по надежности.

Отсюда становится понятным, что применение формально-логического подхода не может обеспечить учет влияния всех этих факторов на результат расчетов. И выход из этой ситуации надо искать в комбинации некоторых практических действий, анализе имеющейся априорной информации, поиске скрытых закономерностей, методов математического анализа последствий этих действий.

Одним из наиболее эффективных способов повышения достоверности результатов является проведение расчетов несколькими способами. Однако следует указать на отличие этого правила от наивного использования разности вычисленных значений в качестве оценки погрешности. Мы предлагаем процедуру, включающую проведение вычислений несколькими разными способами, независимую оценку погрешности каждого способа и сравнение полученных интервалов неопределенности [11, 12].

В случае непересечения этих интервалов констатируем существование дополнительной (не наблюдаемой без такого сравнения) компоненты погрешности одного или нескольких методов. Тогда необходимо обнаружить и устранить ее источник.

В частности, таким способом можно было бы избежать катастрофических последствий ошибок программистов при расчете параметров коррекции траектории космических аппаратов (которые, к сожалению, имели место неоднократно).

Применение этого способа при решении задачи о солитоне Стокса позволило получить результат [13], который в отличие от многих других решений был подтвержден дальнейшими исследованиями.

В случае отсутствия противоречий остается оценить возможность существования одинаковой (в рамках точности расчетов) ненаблюдаемой погрешности у всех полученных результатов.

В [10] изложен общий подход к построению математической модели ненаблюдаемой погрешности и на основании гипотезы о непреднамеренности ошибок предложено считать погрешности разных методов независимыми случайными величинами. Кроме того, большим ошибкам приписывается меньшая вероятность.

Как оказалось, этих допущений (независимости и унимодальности функций плотности вероятности) достаточно для получения оценок вероятности существования ненаблюдаемой погрешности. В [11,12] найден наихудший закон распределения и получена верхняя оценка вероятности существования ненаблюдаемой погрешности, абсолютное значение которой превышает ε, при условии совпадения результатов m методов с точностью σ в виде

$$P_{error} \le \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^{m-1} \qquad (10)$$

Тем самым есть способ оценки доверительного интервала и возможность уменьшения вероятности неправильных выводов до практически приемлемой величины (при решении теоретических задач в качестве такой величины можно принять 0.01–0.001).

Однако этот способ требует получения реальных результатов с погрешностью σ, на один–два порядка меньшей, чем пороговая величина ε, то есть повышение достоверности достигается за счет избыточной точности.

4. О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Аналитическое решение задачи состоит в выводе формул, удовлетворяющих всем условиям задачи при всех возможных значениях входящих параметров и доказательстве отсутствия других решений.

До настоящего момента непонятно, что можно назвать численным решением задачи, поскольку любой объем численных исследований представляет ничтожно малую выборку всего множества решений.

Можно предложить следующую схему. На области определения (множестве возможных значений исходных параметров задачи) строится сеть. В узловых точках проводится численное решение задачи, а промежуточные значения искомых параметров получаются путем интерполяции. Оценка погрешности интерполяции может быть проведена способами, рассмотренными выше, т. е. увеличением густоты сетки и экстраполяцией результатов.

Однако реализация такой схемы сопряжена с большими трудностями. Проблема заключается не только в большом объеме вычислений, но и в необходимости разработки надежной методики интерполяции в условиях численного эксперимента.

Перспективные подходы к построению такой методики изложены в [14]. В работе [15] предложен один из возможных способов использования априорной информации для оценки погрешности интерполяции и исправления данных, полученных с большой погрешностью. Получены интерполяционные зависимости, позволяющие с высокой точностью определить искомые параметры в трудных условиях, когда один из геометрических параметров бесконечно растет и точность самих расчетов падает.

ВЫВОДЫ

Из сказанного выше следует необходимость выработки неформальных (с обычной точки зрения) подходов и методов для надежной работы вычислителя в условиях существования источников ненаблюдаемой погрешности с неопределенным диапазоном изменения.

Такие методы не являются строгими и не дают абсолютной гарантии справедливости оценок погрешности решения. Тем не менее при наличии методик повышения достоверности этой оценки (наиболее очевидной из которых представляется сравнение результатов работы нескольких исполнителей) такие методы могут быть очень эффективными, а при решении сложных задач единственно возможными.

Это, в частности, подтверждается результатами, приведенными в данной работе.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997–2000 годы».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бахвалов Н. С.** Численные методы. М. :Наука. 1973. 631с.
2. **Волков Е. А.** Численные методы. М.: Наука. 1982. 254с.
3. **Шерыхалина Н. М.** Критерий применимости правила Рунге для оценки погрешности численных результатов // Принятие решений в условиях неопределенности: Межвуз. науч. сб. / Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: УГАТУ. 1999. С. 295–300.
4. **Zhitnikov V. P., Sherykhalina N. M.** Runge rule application for error estimation of numerical methods with indefinite accuracy order // 8-th Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics: Book of abstracts. Bremen (Germany). 1999. P. 51–52.
5. **Маклаков Д. В.** Почти предельные волны на поверхности жидкости конечной глубины // Краевые задачи и их приложения : Материалы Всерос. науч. конф. Казань: Унипресс. 1999. С. 293–294.
6. **Шерыхалина Н. М., Шерыхалин О. И., Гаврилов В. В.** Применение метода наименьших квадратов для оценки погрешности // Моделирование, вычисления, проектирование в условиях неопределенности – 2000: Тр. междунар. науч. конф. Уфа: УГАТУ. 2000. С. 292–298.
7. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Расчет формы уединенных волн с помощью численно-аналитических методов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 1998. Т. 1. № 2–3. С. 103–107.
8. **Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.** Интегралы и ряды. М.: Наука. 1981. 800 с.
9. **Evans W. A. B., Ford M. J.** An exact integral equation for solitary waves (with new numerical results for some internal properties) // Proc. R. Soc. London 1996. A 452. P. 373–390.
10. **Житников В. П.** О проблеме обоснования достоверности результатов численных исследований // Моделирование, вычисления, проектирование в условиях неопределенности – 2000: Тр. междунар. науч. конф. Уфа: УГАТУ. 2000. С. 3–19.
11. **Житников В. П., Шерыхалина Н. М.** Оценка достоверности численных результатов при наличии нескольких методов решения задачи // Вычислительные технологии. 1999. Т. 4, № 6. С. 77–87.
12. **Zhitnikov V. P., Sherykhalina N. M.** Certainty estimation of numerical results in the presence of few methods of problem solution // 8-th Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics: Book of Abstracts. Bremen (Germany). 1999. P. 52–53.
13. **Шерыхалина Н. М.** Разработка численных алгоритмов решения задач гидродинамики с особыми точками на свободной поверхности и экспериментальное исследование скорости их сходимости // Деп. в ВИНИТИ № 2550-В95. 1995. 25 с.
14. **Зверев Г. Н.** Информационные сети, аппроксимация и модели вычислений // Повышение эффективности изучения скважин геофизическими методами: Сб. тр. Уфа: БашНИПИнефть, 1980. Вып. 10. С. 10–18.
15. **Шерыхалина Н. М.** Аппроксимация результатов численного эксперимента // Моделирование, вычисления, проектирование в условиях неопределенности 2000: Тр. междунар. науч. конф. Уфа: УГАТУ, 2000. С. 262–269.

ОБ АВТОРАХ

Житников Владимир Павлович, профессор, зав. каф. проектирования средств информатики УГАТУ. Дипл. инженер-физик (МФТИ, 1973), д-р физ.-мат. наук по механике жидкости и газа (Казанский гос. ун-т, 1993). Исследования в области волновых течений жидкости, расчета электрохимического формообразования, численно-аналитических методов.

Шерыхалина Наталия Михайловна, доцент той же кафедры. Дипл. инж. (УГАТУ, 1993), канд. физ.-мат. наук (БГУ, 1996). Исследования в области волновых течений жидкости, уединенных волн, методов оценки погрешности численных результатов.