Уфа: УГАТУ Вестник УГАТУ 2001. № 1 (3). С. 40–46

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.9

УСРЕДНЕНИЕ ОДНОЧАСТОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Л. А. КАЛЯКИН

Институт математики с вычислительным центром УНЦ РАН
Тел: (3472) 23 33 42 E-mail: klen@imat.rb.ru

Обсуждается проблема единственности в асимптотических конструкциях, возникающих при усреднении быстро осциллирующих нелинейных колебаний

Периодическое решение; малый параметр; усреднение; асимптотика

ВВЕДЕНИЕ

Усреднение представляет собой один из популярных подходов при исследовании математических моделей для колебательных систем разной природы. Суть его заключается в замене сложной «точной» модели на более простую «приближенную» для некоторых средних характеристик. Основанием для такой замены является наличие малого параметра, который характеризует отношение медленных и быстрых процессов в системе. Искусство асимптотики состоит в эффективном использовании малого параметра для упрощения модели, чему посвящено огромное число работ. В этом потоке публикаций суть идеи усреднения зачастую скрывается за разнообразием задач и методов их решения, что, в частности, отражается в многообразии названий: двухмасштабные разложения, метод ВКБ, высокочастотные асимптотики, метод Уизема, метод Крылова–Боголюбова, [1–13]. Следует подчеркнуть, что за разными названиями стоят разные подходы, которые в применении к одной и той же задаче обычно дают разные ответы. Такая неединственность, часто замалчиваемая, крайне удручает и наводит на мысль о непригодности приближенных решений. В данной работе эта проблема обсуждается для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В случае слабонелинейной системы вопрос единственности решается при обосновании: разные приближения асимптотически совпадают и представляют асимптотику точного решения, которое единственно для корректно поставленной задачи. Разнообразие асимптотик обусловлено допущением зависимости от малого параметра ε в коэффициентах разложений: $U(t;\varepsilon) = \sum_n \varepsilon^n U_n(t;\varepsilon)$. Мы акцентируем внимание на сильно нелинейной системе, для которой обоснование асимптотики представляет собой отдельную сложную математическую задачу; см., например, [9, 14–16]. Асимптотическое совпадение различных приближенных решений будет здесь доказано без обращения к теореме существования и единственности точного решения. В основу доказательства положена конструкция формального асимптотического решения в наиболее общей форме, которая соответствует подходу Крылова–Боголюбова–Кузмака.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с малым параметром ε:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \Omega(\mathbf{u};\tau) = \varepsilon\mathbf{F}(\mathbf{u};\tau);\quad (\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2,\ t\in\mathbb{R},\ \tau=\varepsilon t,\ 0<\varepsilon\ll 1). \tag{1}$$

Здесь $\Omega(\mathbf{u};\tau)$, $\mathbf{F}(\mathbf{u};\tau) \in \mathbb{R}^2$ – гладкие вектор-функции; система является слабо неавтономной в том смысле, что зависимость от t, если и входит, то в виде медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Предполагается, что невозмущенное уравнение (при $\varepsilon F \equiv 0$ и $\tau = \text{const}$) имеет двухпараметрическое семейство периодических по t решений $\mathbf{u}^0(t+s, E, \tau)$,

Работа выполнена при поддержке РФФИ 00-01-00663, 00-15-96038, INTAS 1068-99

$(s, E \in \mathbb{R}, |E - e_0| < \delta)$. Эти решения могут зависеть еще и от параметра τ, если такая зависимость имеется в Ω. В общем случае период $T = T(E, \tau)$ зависит от параметров E и τ; в дальнейшем для частоты $\omega = 2\pi/T(E, \tau)$ предполагается, что либо $\partial_E \omega(E, \tau) \neq 0$, либо $\partial_E \omega(E, \tau) \equiv 0$. Следует подчеркнуть, что решения $\mathbf{u}^0(t + s, E; \tau)$ при учете зависимости от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ удовлетворяют уравнению (1) лишь асимптотически с невязкой порядка $\mathcal{O}(\varepsilon t)$.

Начальные данные для возмущенного решения задаются на одной из траекторий этого семейства

$$\mathbf{u}(t; \varepsilon)|_{t=0} = \mathbf{u}^0(s_0, e_0, 0). \qquad (2)$$

Задача о возмущении периодических решений для ОДУ имеет давнюю историю. Асимптотические приближения при $\varepsilon \to 0$ хорошо исследованы для одночастотных колебаний, [2, 9, 10, 15]. Известно, что в общем случае возмущенное решение не будет периодическим. Однако на временах, не слишком больших $t \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$, картина фазового портрета в рассматриваемой области меняется незначительно: траектории мало отличаются от невозмущенных и «почти» замкнуты. Это отражается в структуре асимптотик, которые строятся в виде периодических функций, параметры которых, в частности период, медленно деформируются; деформации описываются зависимостью от медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Цель данной работы — проверка единственности асимптотических конструкций при $\varepsilon \to 0$.

2. СХЕМА ПОСТРОЕНИЯ ФАР

В основе обсуждаемого подхода лежит простое соображение, что главный член асимптотики можно представить в виде решения невозмущенного уравнения $\mathbf{u}^0(\sigma, E, \tau)$ при подходящем выборе фазы σ и параметра E. На формальном уровне речь идет о замене переменных в исходной задаче. Решение ищется в виде вектор-функции трех независимых переменных:

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}(t; \varepsilon) = \mathbf{U}(\sigma, E, \tau; \varepsilon), \\ &\sigma = \varepsilon^{-1} S(\tau; \varepsilon)/\omega(E, \tau), \\ &E = E(\tau; \varepsilon), \ (\tau = \varepsilon t). \end{aligned} \qquad (3)$$

Неизвестными являются также переменные E, S как функции медленного времени τ и параметра ε. В случае, когда исходная система (1) – автономная, можно опустить явную зависимость от τ в анзатце $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\sigma, E; \varepsilon)$ и ограничиться одной медленной переменной E.

Класс функций $\mathbf{U}(\sigma, E, \tau; \varepsilon)$, в котором строится решение, выделяется требованием периодичности по быстрой переменной σ. Период берется соответствующим невозмущенному решению $T = 2\pi/\omega(E, \tau)$. Рассматриваемые функции будут 2π-периодическими по перенормированной быстрой переменной $\varepsilon^{-1} S$, которая зачастую используется явно в анзатце [2, 9, 10]. Использование нами быстрой переменной σ не меняет существа дела и представляет лишь некоторое удобство в формулах с участием невозмущенного решения. Преимущество этого подхода, в частности, проявляется при решении линеаризованного уравнения.

В соответствии с подходом Крылова–Боголюбова формальное асимптотическое решение (ФАР) строится в виде рядов по степеням малого параметра:

$$\mathbf{U}(\sigma, E, \tau; \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathbf{U}_n(\sigma, E, \tau), \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} S(\tau; \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n S_n(\tau), \\ E(\tau; \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n E_n(\tau). \end{aligned} \qquad (5)$$

Следует сразу отметить, что коэффициенты этих рядов определяются неоднозначно; лишь первые слагаемые $\mathbf{U}_0, S_0, S_1, E_0$, которые определяют главный член асимптотики, находятся единственным образом. Причиной неоднозначности старших коэффициентов является зависимость $S, E(\tau; \varepsilon)$ от параметра ε. Путем переразложения функций $\mathbf{U}_n(\varepsilon^{-1} S/\omega(E, \tau), E, \tau)$ из одного представления (4), (5) можно получить сколько угодно представлений такого же типа.

Произволом в ФАР можно распорядиться по-разному. Например, можно оборвать ряд для $\mathbf{U}$, используя решение невозмущенного уравнения $\mathbf{U} \equiv \mathbf{u}^0(\varepsilon_{-1} S/\omega, E, \tau)$. Такой способ фактически представляет собой метод вариации произвольных постоянных и приводит к специальной системе уравнений для E, S: невозмущенная система имеет треугольную структуру, а E, S принято называть переменными типа действие–угол.

Мы рассмотрим более общую конструкцию. Суть предлагаемого подхода состоит в замене ОДУ на уравнения в частных производных с тремя независимыми переменными σ, E, τ. Возвращение к решению ОДУ производится после нахождения функций $S, E(\tau;\varepsilon)$. Идеи эти не новы, см. [1–5], но для рассматриваемого класса задач детально не анализировались.

Процедура разделения задач для быстрых и медленных функций основана на анализе уравнения, которое получается для вектор-функции $\mathbf{U}(\sigma, E, \tau; \varepsilon)$ после замены. В нем содержатся производные $\partial_\tau S$, $\partial_\tau E$ в виде коэффициентов. Эти коэффициенты являются неопределенными параметрами постольку, поскольку не определены функции $S, E(\tau,\varepsilon)$. Введем обозначения:

$$\partial_\tau E = A, \quad \frac{1}{\omega}\partial_\tau S = R. \tag{6}$$

Эти соотношения дополняются начальными условиями на функции E, S в соответствии с исходной задачей:

$$E|_{\tau=0} = e_0, \quad S|_{\tau=0} = \varepsilon s_0 \omega(e_0, 0). \tag{7}$$

Уравнение для $\mathbf{U}$ содержит частные производные $\partial_E \mathbf{U}$, $\partial_\tau \mathbf{U}$, которые, ввиду зависимости периода от параметров E, τ, оказываются непериодическими по σ. В дальнейших построениях удобно полностью отделить производные по быстрой переменной σ, используя так называемые усеченные производные [12, 13]:

$$\hat\partial_E \mathbf{U} = \partial_E \mathbf{U} - \sigma\frac{\partial_E \omega}{\omega}\partial_\sigma \mathbf{U} = \\ = \partial_E \mathbf{U} - \varepsilon^{-1} S\frac{\partial_E \omega}{\omega^2}\partial_\sigma \mathbf{U},$$

$$\hat\partial_\tau \mathbf{U} = \partial_\tau \mathbf{U} - \sigma\frac{\partial_\tau \omega}{\omega}\partial_\sigma \mathbf{U} = \\ = \partial_\tau \mathbf{U} - \varepsilon^{-1} S\frac{\partial_\tau \omega}{\omega^2}\partial_\sigma \mathbf{U},$$

для которых сохраняется свойство периодичности. В разложении Фурье такая производная соответствует дифференцированию по E (либо по τ) только коэффициентов ряда, например:

$$\hat\partial_E \mathbf{U}(\sigma, E, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(in\sigma\omega)\partial_E \mathbf{u}_n(E)$$

при $\omega = \omega(E, \tau)$. Отметим формулу перестановки производных: $\hat\partial_E \partial_\sigma = \partial_\sigma \hat\partial_E + \partial_E\omega/\omega\partial_\sigma$.

Использование усеченных производных компенсируется изменением коэффициента при $\partial_\sigma \mathbf{U}$, так что в обозначениях (6) исходные уравнения принимают вид

$$R\partial_\sigma \mathbf{U} + \Omega(\mathbf{U}, \tau) = \\ = \varepsilon[F(\mathbf{U}, \tau) - A\hat\partial_E \mathbf{U} - \hat\partial_\tau \mathbf{U}]. \tag{8}$$

С этого этапа переменные σ, E, τ считаются независимыми, и (8) рассматривается как уравнение в частных производных. Начальные условия для продолженного уравнения можно поставить путем продолжения исходных данных (2) на значения E, τ в окрестности начальной точки $(E_0, 0)$:

$$\mathbf{U}(\sigma, E, \tau; \varepsilon)|_{\sigma=0} = \mathbf{U}^0(E, \tau; \varepsilon), \\ |E - e_0| < \delta, \quad 0 \le \tau < \tau_0. \tag{9}$$

Естественно, что ФАР, которое строится таким способом, зависит от способа продолжения. Для согласования с исходной задачей требуется лишь согласование в одной точке $\mathbf{U}^0(e_0, 0; \varepsilon) = \mathbf{u}^0(s_0, e_0, 0)$. В остальном нет каких-либо ограничений на выбор того или иного продолжения начальных данных. Оказывается, что, независимо от способа продолжения, все ФАР асимптотически эквивалентны и получаются одно из другого путем переразложения коэффициентов[1]. В выборе продолжений $\mathbf{U}^0(E, \tau; \varepsilon)$ мы ограничимся классом гладких функций с асимптотикой $\mathbf{U}^0(E, \tau; \varepsilon) = \sum_n \varepsilon^n \mathbf{U}^0_n(E, \tau)$ при $\varepsilon \to 0$ и с условием согласования $\mathbf{U}^0_0(e_0, 0) = \mathbf{u}^0(s_0, e_0, 0)$; $\mathbf{U}^0_n(e_0, 0) = 0$, $n > 0$.

Чтобы окончательно отделить задачу (8), (9) от уравнений для медленно меняющихся функций E, S, можно использовать параметры A, R как самостоятельные элементы задачи, подлежащие определению. Поскольку эти функции зависят от медленной переменной, то их можно строить как функции $A, R(E, \tau; \varepsilon)$ от переменных E, τ. Условие периодичности по σ является дополнительным требованием в задаче (8), (9). Оно обеспечивает определение параметров A, R и заодно гарантирует отсутствие секулярных членов в $\mathbf{U}$. Таким образом, задача (8), (9) замкнута.

[1] Обычно эта проблема игнорируется в формальных построениях. Между тем в этом месте находится один из источников различий приближенных решений, получаемых разными способами.

ФАР для нее строится в виде ряда (4), который дополняется асимптотическими рядами для параметров A, R:

$$A(E,\tau;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A_n(E,\tau), \qquad (10)$$
$$R(E,\tau;\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n R_n(E,\tau).$$

В принципе, два дополнительных к (8) уравнения для параметров A, R можно выписать сразу как следствие требования периодичности, усреднив равенство (8):

$$\int_0^T \Big(\Omega(\mathbf{U},\tau) - \varepsilon\big[F(\mathbf{U},\tau) - \hat{\partial}_\tau \mathbf{U} - A\hat{\partial}_E \mathbf{U}\big]\Big)\, d\sigma = 0.$$

В этом по сути дела состоит подход Уизема. Однако эти уравнения неэффективны. Для определения отсюда параметров A, R требуется знание периодического решения уравнения (8) $\mathbf{U} = U(\sigma, A, R; E, \tau)$ в его зависимости от A, R либо его асимптотического приближения. Известные способы асимптотического интегрирования уравнения (8) в классе периодических функций неизбежно приводят к определению параметров A, R. После этого усредненные уравнения оказываются бесполезными следствиями.

Задача (6), (7) для функций $E, S(\tau;\varepsilon)$ решается на заключительном этапе после определения правых частей $A, R(E,\tau;\varepsilon)$. Уравнения (6) соответствуют уравнениям переноса и эйконала в методе ВКБ. Зависимость эйконала S от «амплитуды» E обязана сильной нелинейности исходной задачи.

3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ ФАР

Теорема. *Коэффициенты ФАР (4), (5) определяются из рекуррентной системы задач. Если след матрицы $\partial_u \Omega(\mathbf{u};\tau)$ равен нулю, то главный член ФАР в форме*

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}^0(\sigma_0, E_0(\tau);\tau) + \mathcal{O}(\varepsilon) \qquad (11)$$

с быстрой фазой $\sigma_0 = [\varepsilon^{-1}S_0(\tau) + S_1(\tau)]/\omega(E,\tau)$ определяется однозначно. Главный член в (11) представляет собой 2π-периодическую функцию по быстрой переменной $\varepsilon^{-1}S_0(\tau) + S_1(\tau)$, которая не зависит от частоты $\omega(E,\tau)$.

Доказательство. Главный член асимптотики берется в виде решения невозмущенного уравнения $\mathbf{U}_0(\sigma,E,\tau) = \mathbf{u}^0(\sigma,E,\tau)$. В таком случае параметр R в главном равен единице: $R_0 \equiv 1$. Поправки следующих порядков определяются из неоднородных линеаризованных уравнений:

$$\partial_\sigma \mathbf{U}_n + \partial_u \Omega(\mathbf{U}_0)\mathbf{U}_n = \mathbf{G}_n(\sigma,E,\tau), \qquad (12)$$
$$\mathbf{U}_n|_{\sigma=0} = \mathbf{U}_n^0(E,\tau).$$

Для фундаментальной системы решений однородного уравнения удобно использовать пару периодических вектор-функций, составленных из производных: $\mathbf{V}_0(\sigma,E,\tau) = \hat{\partial}_E \mathbf{U}_0(\sigma,E,\tau)$, $\mathbf{V}_1(\sigma,E) = \partial_\sigma \mathbf{U}_0(\sigma,E,\tau)$. При этом одним из решений является $\mathbf{V}_1$, а второе выписывается через комбинацию $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_0 + (\partial_E\omega/\omega)\sigma\mathbf{V}_1$ и не будет периодическим, если $\partial_E\omega \neq 0$. Вронскиан выражается через кососкалярное произведение $W(E,\tau) = [\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_0]$ и не зависит от σ при $\mathrm{Sp}\,\partial_u\Omega = 0$.

Правые части в (12) определяются через предыдущие приближения с участием коэффициентов Тейлора вектор-функций $\mathbf{F}, \Omega(\mathbf{u};\tau)$ в точке $\mathbf{u} = \mathbf{U}_0$, например,

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{U}_0;\tau) - R_1\mathbf{V}_1 - A_0\mathbf{V}_0 - \hat{\partial}_\tau\mathbf{U}_0,$$
$$\mathbf{G}_2 = \Big(\partial_u\mathbf{F}(\mathbf{U}_0;\tau) - \frac{1}{2}\partial_u^2\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\mathbf{U}_1 - R_1\partial_\sigma - A_0\hat{\partial}_E - \hat{\partial}_\tau\Big)\mathbf{U}_1 - R_2\mathbf{V}_1 - A_1\mathbf{V}_0.$$

На каждом шаге решение выписывается через интегралы от кососкалярных произведений

$$\mathbf{U}_n = C_n\mathbf{V}_0 + D_n\mathbf{V}_1 + \frac{1}{W}\mathbf{V}_0\int_0^\sigma [\mathbf{V}_1, \mathbf{G}_n]\, d\sigma + \frac{1}{W}\mathbf{V}_1\bigg(\int_0^\sigma [\tilde{\mathbf{G}}_n, \mathbf{V}_0]\, d\sigma + \frac{\partial_E\omega}{\omega}\int_0^\sigma\int_0^\sigma [\mathbf{V}_1, \mathbf{G}_n]\, d\sigma\, d\sigma\bigg).$$

Здесь $\tilde{\mathbf{G}}_n = \mathbf{G}_n + (\partial_E\omega/\omega)C_n\mathbf{V}_1$. Коэффициенты $C_n, D_n(E,\tau)$ определяются из начальных условий и произвольны настолько, насколько произвольны начальные продолжения (при условии согласования $C_n, D_n(e_0, 0) = 0$).

Требование периодичности по σ приводит к ограничениям на правые части $\mathbf{G}$ в виде двух условий ортогональности.

$$\langle[\mathbf{V}_1, \mathbf{G}]\rangle = 0,$$
$$\langle[\tilde{\mathbf{G}}, \mathbf{V}_0]\rangle + \frac{\partial_E\omega}{\omega}\bigg\langle\int_0^\sigma [\mathbf{V}_1, \mathbf{G}]\, d\sigma\bigg\rangle = 0. \qquad (13)$$

Здесь и далее угольные скобки используются для обозначения среднего по периоду:

$$\langle f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(\sigma)\,d\sigma, \quad T = T(E,\tau).$$

Выполнение условий (13) обеспечивается за счет выбора параметров A_{n-1}, R_n, для которых, таким образом, получается алгебраическая система уравнений с треугольной матрицей. В частности, на первом шаге определяются $A_0, R_1(E,\tau)$:

$$A_0 W = \langle [\mathbf{V}_1, \mathbf{F}(\mathbf{U}_0;\tau) - \hat{\partial}_\tau \mathbf{U}_0]\rangle,$$

$$(R_1 - \frac{\partial_E\omega}{\omega}C_1)W = \langle [\mathbf{F}(\mathbf{U}_0;\tau) - \hat{\partial}_\tau \mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0]\rangle +$$
$$+\frac{\partial_E\omega}{\omega}\Big\langle \int_0^\sigma \Big([\mathbf{V}_1, \mathbf{F}(\mathbf{U}_0;\tau) - \hat{\partial}_\tau \mathbf{U}_0] - A_0 W\Big)\,d\sigma\Big\rangle. \tag{14}$$

Аналогично строятся дальнейшие приближения. Асимптотическое решение задачи (6), (7) для медленных параметров $E, S(\tau;\varepsilon)$ заканчивает процедуру построения ФАР.

Приведенная конструкция ФАР неединственна, поскольку неединственно продолжение начальных данных на значения $E \neq E_0$, $\tau > 0$. Эти произволы содержатся в коэффициентах $C_n, D_n(E,\tau)$. Легко понять, что от этих произволов зависят и параметры $A_n, R_n(E,\tau)$ с номерами $n \geq 1$. Между тем вопрос об однозначности параметров $A_1, R_1(E,\tau)$ является критическим для единственности главного члена ФАР, если $\partial_E\omega \neq 0$. В самом деле, для идентификации главного члена в форме (11) используются два члена разложения фазовой переменной σ при $\varepsilon \to 0$. Из уравнений (6), (7) видно, что для определения фазы с такой точностью требуются функции $A_1, R_1(E,\tau)$ из разложения правых частей.

Параметр R_1 содержит произвол в виде слагаемого $(\partial_E\omega/\omega)C_1(E,\tau)$, как это видно из (14). Параметр A_1 находится из анализа второй поправки $\mathbf{U}_2(\sigma, E, \tau)$. Поскольку правая часть на этом шаге $\mathbf{G}_2$ зависит от первой поправки $\mathbf{U}_1$, которая содержит C_1, D_1, то произвол обнаруживается и в A_1. Таким образом, под вопросом оказывается однозначность главного члена ФАР.

Как правило, на эти обстоятельства не обращается внимание, поскольку для обсуждаемой задачи после перехода к переменным действие–угол имеется обоснование асимптотики. Более того, в этих переменных проблема неединственности не проявляется вовсе, [14–16]; она скрыта в неоднозначности выбора новых переменных.

Оказывается, что неоднозначности в параметрах $A_1, R_1(E,\tau)$ согласованы так, что не проявляются в первой поправке разложения фазы σ, а следовательно, и в главном члене ФАР.

Лемма 1. *Параметр* A_1 *не зависит от коэффициента* D_1.

Для доказательства надо учесть, что $A_1(E,\tau)$ определяется из требования ортогональности $\mathbf{G}_2$ к $\mathbf{V}_1$. Поэтому достаточно проверить, что хотя правая часть $\mathbf{G}_2$ зависит от произвола D_1, но ее проекция на функцию $\mathbf{V}_1$ от такого произвола не зависит. Таким образом, надо проверить тождество ортогональности $\langle[\mathbf{V}_1, \mathbf{H}]\rangle = 0$. Здесь вектор $\mathbf{H}$ составлен из тех слагаемых правой части $\mathbf{G}_2$, которые зависят от $D_1\mathbf{V}_1$ (индексы у C_1, D_1 далее опускаются):

$$\mathbf{H} = D\Big(\partial_u \mathbf{F}(\mathbf{U}_0;\tau) - \widetilde{R}_1\partial_\sigma - \hat{d}_\tau -$$
$$- \partial_u^2\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\widetilde{\mathbf{U}}_1\Big)\mathbf{V}_1 -$$
$$-\frac{1}{2}D^2\partial_u^2\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1 -$$
$$- CD\Big(\partial_u^2\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\mathbf{V}_0 + \frac{\omega'}{\omega}\partial_\sigma\Big)\mathbf{V}_1. \tag{15}$$

Здесь $\hat{d}_\tau = A_0\hat{\partial}_E + \hat{\partial}_\tau$. Проверка опирается на тождества, которые имеют место для вектор-функций $\mathbf{V}_1, \widetilde{\mathbf{U}}_1$ как решений соответственно однородного и неоднородного линеаризованных уравнений:

$$\partial_\sigma \mathbf{V}_1 + \partial_u\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\mathbf{V}_1 = 0,$$

$$\partial_\sigma \widetilde{\mathbf{U}}_1 + \partial_u\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\widetilde{\mathbf{U}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{U}_0;\tau) - \widetilde{R}_1\mathbf{V}_1 - \hat{d}_\tau\mathbf{U}_0.$$

Здесь $\widetilde{R}_1 = R_1 - (\omega'/\omega)C$. Интегральная часть первой поправки $\widetilde{\mathbf{U}}_1$ удовлетворяет уравнению (12) при $\mathbf{G}_1 = \widetilde{\mathbf{G}}_1$ и так же, как $\widetilde{R}_1, \widetilde{\mathbf{G}}_1$, не зависит от произволов. Эти уравнения умножаются кососкалярно на $\partial_\sigma\mathbf{U}_1$, $\partial_\sigma\mathbf{V}_1$, и после сложения полученное соотношение интегрируется по периоду. Затем интегралы берутся по частям. Учитывается также формула для перестановки производных в форме $[\mathbf{V}_1, \partial_\sigma\hat{d}_\tau\mathbf{U}_0] = [\mathbf{V}_1, \hat{d}_\tau\partial_\sigma\mathbf{U}_0] = [\mathbf{V}_1, \hat{d}_\tau\mathbf{V}_1]$. В силу полученного таким образом интегрального тождества выражение для рассматриваемого функционала приобретает вид

$$\int_0^T [\mathbf{V}_1, \mathbf{H}]\,d\sigma = D\int_0^T \Big([\mathbf{V}_1, \partial_u\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\partial_\sigma\widetilde{\mathbf{U}}_1] -$$

$$-[\partial_\sigma\widetilde{\mathbf{U}}_1, \partial_u\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\mathbf{V}_1]\Big)\,d\sigma-$$
$$-\frac{1}{2}D^2\int_0^T[\mathbf{V}_1, \partial_u^2\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\mathbf{V}_1\mathbf{V}_1]\,d\sigma-$$
$$-CD\int_0^T[\mathbf{V}_1, \Big(\partial_u^2\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\mathbf{V}_0+\frac{\omega'}{\omega}\partial_\sigma\Big)\mathbf{V}_1]\,d\sigma. \tag{16}$$

Если здесь учесть свойство антисимметрии матрицы с нулевым следом в кососкалярном произведении $[\mathbf{V}, \partial_u\Omega\mathbf{U}] = [\mathbf{U}, \partial_u\Omega\mathbf{V}]$, то первый интеграл в правой части (16) обращается в нуль. После взятия по частям оставшихся интегралов в каждом из них надо еще раз использовать свойство антисимметрии, учесть линеаризованные уравнения для $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1$ и тождество $[\mathbf{V},\mathbf{V}] = 0$. В итоге получаются нули. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Зависимость от коэффициента C_1 проявляется в параметре A_1 в виде слагаемого $a(E,\tau) = C_1\partial_E A_0 - \hat{d}_\tau C_1$.*

Для доказательства следует вычислить проекцию на $\mathbf{V}_1$ тех слагаемых правой части $\mathbf{G}_2$, которые зависят от C_1. Аналогично (15), (16) получается выражение через интегралы среднего:

$$Wa = C_1\Big\langle\Big[\mathbf{V}_1, \Big(\partial_u\mathbf{F}(\mathbf{U}_0;\tau) - \widetilde{R}_1\partial_\sigma - \hat{d}_\tau -$$
$$-\partial_u^2\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\widetilde{\mathbf{U}}_1\Big)\mathbf{V}_0 - \frac{\partial_E\omega}{\omega}\partial_\sigma\widetilde{\mathbf{U}}_1\Big]\Big\rangle - W\hat{d}_\tau C_1-$$
$$-C_1^2\Big\langle\Big[\mathbf{V}_1, \Big(\frac{1}{2}\partial_u^2\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\mathbf{V}_0 + \frac{\partial_E\omega}{\omega}\partial_\sigma\Big)\mathbf{V}_0\Big]\Big\rangle. \tag{17}$$

Выражение при C_1^2 в (17) обращается в нуль в силу уравнения

$$\partial_\sigma\mathbf{V}_0 + \partial_u\Omega(\mathbf{U}_0;\tau)\mathbf{V}_0 + \frac{\partial_E\omega}{\omega}\mathbf{V}_1 = 0. \tag{18}$$

Для проверки применяем оператор усеченной производной $\hat{\partial}_E$ к равенству (18). При этом используется свойство $\hat{\partial}_E\partial_\sigma = \partial_\sigma[\hat{\partial}_E + \partial_E\omega/\omega]$. Затем после кососкалярного умножения на $\mathbf{V}_1$ вычисляется среднее. С учетом свойств матрицы $\delta\Omega$ и в силу уравнений для $\mathbf{V}_0, \mathbf{V}_1$ приходим к требуемому тождеству.

Для вычисления в (17) выражения при C_1 используется неоднородное линеаризованное уравнение для $\widetilde{\mathbf{U}}_1$, с которым проделывается такая же операция. В отличие от предыдущей леммы здесь остается слагаемое $WC_1\partial_E A_0$. В итоге приходим к требуемой формуле. Лемма 2 доказана.

Для окончания доказательства теоремы следует рассмотреть уравнения (6), (7) в асимптотическом приближении при $\varepsilon \to 0$ и выделить влияние произволов C_1, D_1 на первую поправку фазовой функции S (в членах порядка $\mathcal{O}(\varepsilon)$). Обозначим через b, S те части первых поправок в разложении E, S, которые зависят от произволов. Для них получаются неоднородные линеаризованные уравнения, которые с учетом предыдущих результатов о произволах в параметрах A_1, R_1 имеют вид:

$$\partial_\tau b = b\partial_E A_0 + C_1\partial_E A_0 - \hat{d}_\tau C_1,$$
$$\partial_\tau S = C_1\partial_E\omega + b\partial_E\omega, \quad b, S|_{\tau=0} = 0.$$

Здесь $A_0, \omega, C_1(E_0,\tau)$ зависят от $E_0 = E_0(\tau)$ – главного члена асимптотики; последний определяется из уравнения $\partial_\tau E_0 = A_0(E_0,\tau)$, $E_0|_{\tau=0} = e_0$. Поскольку произвол обладает свойством $C_1(E_0(\tau),\tau))|_{\tau=0} = C_1(e_0, 0) = 0$, то выписывается решение $b = -C_1(E_0(\tau),\tau)$. При этом второе уравнение оказывается однородным и, следовательно, $S \equiv 0$. Тем самым первая поправка $S_1(\tau)$ в разложении фазовой функции $S(\tau;\varepsilon)$ не зависит от произволов и определяется однозначно. Теорема доказана.

Замечание. *При условиях теоремы ФАР в виде (4), (5) определяется однозначно с точностью до переразложения коэффициентов.*

Доказательство асимптотического совпадения формальных решений, представленных разными рядами (4), (5), схоже с приведенным выше.

ВЫВОДЫ

Исходная задача (1), (2) заменена усредненными уравнениями (6), (7) для медленно меняющихся функций. При асимптотическом решении усредненной задачи нелинейности встречаются лишь на первом шаге в виде уравнения $W(E,\tau)d_\tau E = \langle[\partial_t\mathbf{u}^0, F(\mathbf{u}^0;\tau) - \partial_\tau\mathbf{u}^0]\rangle$ для функции $E = E_0(\tau)$. Это уравнение содержит оператор усреднения по быстрой переменной t и определяется решением невозмущенного уравнения $\mathbf{u}^0(t,E,\tau)$. В частном случае $F \equiv 0$ это уравнение интегрируется, и главный член $E = E_0(\tau)$ определяется из адиабатического инварианта $\langle[\partial_t\mathbf{u}^0(t,E,\tau), \mathbf{u}^0(t,E,\tau)]\rangle = \mathrm{const}$, который представляет собой площадь, охватываемую фазовой кривой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н.** Исследование продольной устойчивости аэроплана. М.–Л.: Гос. авиац. и автотракт. из-во, 1932.
2. **Кузмак Г. Е.** Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, № 3. С. 515–526.
3. **Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 501 с.
4. **Найфэ А.** Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
5. **Маслов В. П.** Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977. 384 с.
6. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
7. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981. 400 с.
8. **Акуленко Л. Д.** Асимптотические методы оптимального управления. М.: Наука, 1987. 365 с.
9. **Федорюк М. В.** Метод ВКБ для нелинейного уравнения 2-го порядка // ЖВММФ. 1986. Т. 26, № 2. С. 198–210.
10. **Bourland F. J., Haberman R.** The modulated phase shift for strongly nonlinear, slowly varying and weakly damped oscillators // SIAM J. Appl. Math. 1988. Vol. 48, No 4. P. 737–748.
11. **Dobrohotov S. Yu., Maslov V. P.** Multiphase asymptotics of nonlinear partial differential equations with a small parameter // Sov. Sci. Rev. 1988. Vol. 3. P. 221–311.
12. **Кричевер И. М.** Гессианы интегралов уравнения Кортевега–де Фриза и возмущение конечнозонных решений // ДАН АН СССР. 1983. Т. 270, 6. С. 1312–1316.
13. **Кричевер И. М.** Метод усреднения для двумерных интегрируемых уравнений // Функц. анализ и его приложения. 1988. Т. 22, вып. 3. С. 37–52.
14. **Митропольский Ю. А., Хома Г. П.** Математическое обоснование асимптотических методов нелинейной механики. Киев: Наукова Думка, 1983. 215 с.
15. **Ажоткин В. Д., Бабич В. М.** О применении метода двухмасштабных разложений к одночастотной задаче теории нелинейных колебаний // ПММ. 1985. Т. 49, № 3. С. 377–383.
16. **Акуленко Л. Д.** Усреднение в квазилинейной системе с сильным изменением частоты // ПММ. 1987. Т. 51, № 2. С. 244–252.

ОБ АВТОРЕ

Калякин Леонид Анатольевич, профессор, зав. отделом дифф. уравнений ИМ с ВЦ РАН. Дипл. математик (Уральский гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук (защ. в Ин-те мат. и мех. УрО РАН, 1989). Соросовский профессор (2000). Исследования в области асимптотических методов и нелинейных задач математической физики.