Уфа: УГАТУ Вестник УГАТУ 2001. № 1 (3). С. 47–52

НАУЧНЫЕ СТАТЬИ И ДОКЛАДЫ • ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 533

ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

С. В. ХАБИРОВ

Институт механики Уфимского научного центра РАН,
Естественно-научный факультет УГАТУ
Тел: (3472) 23 64 28 E-mail: habirov@anrb.ru

Приводятся сведения об общих свойствах инвариантных подмоделей уравнений газовой динамики всех рангов, полученные за последние 10 лет. Определены две канонические формы: эволюционная и стационарная. Проделан групповой анализ всех подмоделей. Проведена симметризация и найдено условие гиперболичности. Найдены интегралы и указаны интегрируемые случаи. Сделан обзор опубликованных результатов

Газовая динамика; инвариантные решения

ВВЕДЕНИЕ

Система дифференциальных уравнений, описывающая поведение сплошной среды, инвариантна относительно выбора системы отсчета из некоторого класса. Для умеренных скоростей преобразования системы отсчета образуют группу Галилея. Это следует из вывода этих уравнений согласно законам классической механики. Как воспользоваться этой симметрией для обозрения возможных решений?

Важные классы инвариантных решений наиболее полно изучены для уравнений газовой динамики.

1. О ПРОГРАММЕ «ПОДМОДЕЛИ» ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Уравнения газовой динамики

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0,\quad D\rho + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0,\quad DS = 0 \qquad (1.1)$$

с уравнением состояния

$$p = f(\rho, S), \qquad (1.2)$$

где $\vec{u}$ — скорость; ρ — плотность; S — энтропия; p — давление; $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$ — оператор полного дифференцирования, допускает 11-параметрическую группу преобразований. Эта группа симметрий уравнений описывается алгеброй Ли L_{11} операторов с базисом

$$X_i = \partial_{x^i},\ X_{i+3} = t\partial_{x^i} + \partial_{u^i},\quad X_{i+6} = \varepsilon^k_{ij}(x^j\partial_{x^k} + u^j\partial_{u^k}),\ i = 1,2,3,\quad X_{10} = \partial_t,\ X_{11} = t\partial_t + x^i\partial_{x^i},$$

где x^i — декартовы координаты частиц газа; u^i — координаты скорости; ε^k_{ij} — кососимметрический тензор с $\varepsilon^3_{12} = 1$ [1].

Любая подалгебра алгебры L_{11} выделяет из множества решений системы (1.1) подмножество, которое описывается уравнениями меньшего числа переменных. Такие системы уравнений называются подмоделями. Задача программы «Подмодели» [2] состоит в том, чтобы наиболее полно использовать симметрии уравнений газовой динамики для построения подмоделей. Работа по этой программе ведется много лет большой группой ученых под руководством академика *Л.В.Овсянникова*. Некоторые итоги программы подведены в работе [3]. В этой работе приводится полный список результатов по наиболее конструктивно описываемым инвариантным подмоделям для общего уравнения состояния (1.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00523) и Совета поддержки ведущих научных школ (грант 00-15-96163)

Напомним общую процедуру построения инвариантных подмоделей. Пусть H_r — подалгебра алгебры L_{11} размерности r. Вычисляются инварианты подалгебры H_r. Для этого надо решать однородную линейную систему из r уравнений 1-го порядка для одной функции 9 переменных системы (1.1). В полном функционально независимом наборе решений часть будет функциями только от независимых переменных t, x^i (инварианты первого типа x_1^j). Число таких инвариантов называется рангом инвариантного решения. Остальные инварианты $u_1^i, R, S_1, P = f(R, S_1)$ должны определять все газодинамические функции (необходимое условие существования). Если последнее требование не выполнено, то инвариантное решение для рассматриваемой подалгебры построить нельзя, но можно строить частично инвариантные или дифференциально инвариантные подмодели. Число всех инвариантов равно $9 - r$. Ранг равен $4 - r$ в случае выполнения необходимого условия существования. Значит, инвариантные решения могут быть построены на подалгебрах размерностей 1, 2, 3, 4. Инварианты второго типа назначаются инвариантными функциями от инвариантов первого типа, которые называются инвариантными независимыми переменными. Поскольку выражения для старых функций определяются, то получается представление инвариантного решения. Подстановка этого представления в (1.1) приводит к инвариантной подмодели, которая записывается только через инварианты. При $r = 4$ подмоделью будет система алгебраических уравнений. При $r = 3$ получается система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая часто интегрируется. В этих случаях говорят об инвариантных решениях.

Подалгебр различных размерностей бесконечно много. В множестве подалгебр устанавливается подобие с помощью группы внутренних автоморфизмов алгебры L_{11}. Подобным подалгебрам отвечают представления решения и подмодели, связанные заменой переменных. Поэтому существенно различные подмодели строятся для неподобных подалгебр. Неподобные подалгебры алгебры L_{11} образуют оптимальную систему, состоящую из 220 представителей [1. Табл. 6], из них 13 одномерных, 27 двумерных, 46 трехмерных и 48 четырехмерных.

Каждая инвариантная подмодель обладает своими специфическими особенностями, но при их анализе выявляются общие свойства некоторых подмоделей. По этим свойствам они объединяются в подклассы.

Приведем некоторые подклассы и сформулируем общие утверждения для подмоделей из подклассов.

2. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА 3

Инварианты одномерных подалгебр можно выбрать так, что инвариантная подмодель принимает одну из следующих двух форм: эволюционную (E) и стационарную (смешанную) (S) [4, 5]. Единообразная запись канонических форм такова:

$$\begin{aligned} RD_1\vec{u}_1 + B\nabla_1 P &= \vec{a},\\ D_1 R + R\operatorname{div}_1 \vec{u}_1 &= a^4,\\ D_1 S_1 &= 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

с инвариантными скоростями $\vec{u}_1$, плотностью R, давлением P, энтропией S_1, которые являются функциями от независимых инвариантов $x_1^1, x_1^2, x_1^3 = t$ для (E) и x_1^1, x_1^2, x_1^3 для (S); $\vec{a} = (a^1, a^2, a^3)$. Дифференциальные операции имеют вид:

$$\begin{aligned} D_1 &= \partial_t + \vec{u}_1 \cdot \nabla_1,\\ \nabla_1 &= (\partial_{x_1^1}, \partial_{x_1^2}, 0),\\ B &= \operatorname{diag}(b_1, b_2, 0),\\ \operatorname{div}\vec{u}_1 &= u^1_{1x_1^1} + u^2_{1x_1^2},\\ b_i(t, x_1^1, x_1^2) &> 0 \qquad \text{для (E)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= \vec{u}_1 \cdot \nabla_1,\\ \nabla_1 &= (\partial_{x_1^1}, \partial_{x_1^2}, \partial_{x_1^3}),\\ B &= \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3);\\ \operatorname{div}\vec{u}_1 &= u^1_{1x_1^1} + u^2_{1x_1^2} + u^3_{1x_1^3},\\ b_i(x_1^1, x_1^2, x_1^3) &> 0 \qquad \text{для (S)}. \end{aligned}$$

Правые части системы (2.1) есть конкретные для каждой подмодели функции, квадратичные по u_1^i, и не содержат производных от искомых функций.

Система (2.1) приводится к симметрическому виду, так же как общая система (2.1) [6].

Система (2.1) формы (E) всегда гиперболическая.

Теорема 2.1. *Область гиперболичности для системы (2.1) формы (S) определяется неравенством*

$$b_1^{-1}(u_1^1)^2 + b_2^{-1}(u_1^2)^2 + b_3^{-1}(u_1^3)^2 > c^2, \tag{2.2}$$

где $c^2 = f_\rho$ — квадрат скорости звука.

Доказательство. Характеристический вектор (ξ,η,ζ) системы (2.1) формы (S) удовлетворяет уравнению [6]

$$\chi^3[\chi^2 - c^2(b_1\xi^2 + b_2\eta^2 + b_3\zeta^2)] = 0,$$

где $\chi = \xi u_1^1 + \eta u_1^2 + \zeta u_1^3$. Для гиперболичности системы необходимо, чтобы квадратичная форма по переменным ξ,η,ζ в квадратных скобках была знакопеременна. Это возможно, если собственные числа матрицы квадратичной формы имеют разные знаки.

Уравнение для собственных чисел таково:

$$g(\lambda) \equiv \lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0, \qquad (2.3)$$

где

$$J_1 = c^{-2}\left[(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 + (u_1^3)^2 - b_1 - b_2 - b_3\right],$$
$$J_2 = b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - c^{-2}\left[(u_1^1)^2(b_2+b_3) + (u_1^2)^2(b_1+b_3) + (u_1^3)^2(b_1+b_2)\right],$$
$$J_3 = c^{-2}\left[b_1b_2(u_1^3)^2 + b_1b_3(u_1^2)^2 + b_2b_3(u_1^1)^2\right] - b_1b_2b_3.$$

По теореме Раусса [7. С. 475] число k положительных корней многочлена $g(\lambda)$ равно числу перемен знака в ряду выражений, составленных из коэффициентов уравнения (2.3)

$$1,\ -J_1,\ J_2 - J_3J_1^{-1},\ -J_3.$$

При $k=1$ возможны три случая:

1) $J_1 > 0, \quad J_1J_2 \le J_3, \quad J_3 > 0;$
2) $J_1 < 0, \quad J_1J_2 \ge J_3, \quad J_3 > 0;$
3) $J_1 < 0, \quad J_1J_2 < J_3, \quad J_3 > 0.$

При $k=2$ возможны еще три случая:

4) $J_1 < 0, \quad J_1J_2 > J_3, \quad J_3 < 0;$
5) $J_1 > 0, \quad J_1J_2 \le J_3, \quad J_3 < 0;$
6) $J_1 > 0, \quad J_1J_2 > J_3, \quad J_3 < 0.$

Пусть $0 < b_1 \le b_2 \le b_3$, $q^2 = c^{-2}[(u_1^1)^2 + (u_1^2)^2 + (u_1^3)^2]$. В случае 1 из $J_1 > 0$ следует $q^2 > b_1 + b_2 + b_3$ и $J_3 > 0$. Покажем, что неравенство $J_1J_2 < J_3$ выполняется. Действительно, $J_1J_2 < (q^2 - b_1 - b_2 - b_3)[b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 - q^2(b_1+b_2)]$, $b_1b_2(q^2 - b_3) < J_3$ и достаточно доказать неравенство

$$(q^2 - b_1 - b_2 - b_3)[1 + (b_1^{-1} + b_2^{-1})(b_3 - q^2)] < q^2 - b_3,$$

которое равносильно следующему очевидному неравенству:

$$(q^2 - b_3 - b_2)(q^2 - b_3 - b_1) > 0 \quad \text{или} \quad b_1b_2 > 0.$$

Значит, область вне сферы $q^2 = b_1 + b_2 + b_3$ переменных $q_1 = c^{-1}u_1^1$, $q_2 = c^{-1}u_1^2$, $q_3 = c^{-1}u_1^3$ является областью гиперболичности. Из случаев 2, 3 следует, что область между сферой $q^2 = b_1 + b_2 + b_3$ и эллипсоидом $q_1^2b_1^{-1} + q_2^2b_2^{-1} + q_3^2b_3^{-1} = 1$ разбивается на две части поверхностью $J_1J_2 = J_3$ и обе части являются областями гиперболичности.

Таким образом, случаи 1–3 объединяются в одном неравенстве $J_3 > 0$, равносильном (2.2).

Системы неравенств в случаях 4–6 противоречивы.

Подмодель (2.1), построенная по подалгебре H_1, допускает фактор нормализатора H_1 в L_{11} по идеалу H_1 [2]. Но симметрий подмодели может быть больше. Для их нахождения в случае (E) разыскивается оператор, допускаемый системой (2.1):

$$X = \xi^t\partial_t + \xi^{x_1^i}\partial_{x_1^i} + \xi^{u_1^i}\partial_{u_1^i} + \xi^R\partial_R + \xi^P\partial_P,$$

где ξ^μ — функции t, x^i, u^i, R, P.

Условия инвариантности [1] имеют вид квадратичных тождеств по независимым производным. Приравнивание нулю коэффициентов при квадратичных слагаемых дает уравнения, называемые 2-уравнениями, из которых следует, что ξ^t, ξ^{x^j} есть функции от t, x^i [8]. Приравнивание нулю коэффициентов при линейных слагаемых дает уравнения, называемые 1-уравнениями, которые интегрируются в нашем случае по переменным u_1^i. Формулы представления решения приведены в [9]. Там же имеется представление допускаемого оператора для системы (2.1) в форме (S).

Таким образом, условие инвариантности системы (2.1) упрощается до уравнений, не содержащих производных. В этих уравнениях выделена свободная переменная, позволяющая решить определяющие уравнения до конца. Процесс вычисления показал, что системы (2.1) допускают, как правило, лишь фактор нормализатора. Исключения получаются лишь в тех случаях, когда уравнение одной из компонент инвариантной скорости удовлетворяет уравнению для энтропии и эта компонента (u_1^3) не входит в остальные уравнения, т. е. отщепляется от системы. В этом случае допускаемая группа бесконечномерна: $u_1^{3\prime} = \varphi(S, u_1^3)$.

Все 13 инвариантных подмоделей ранга 3 сводятся в таблицу коэффициентов систем

Таблица

Инвариантные подмодели ранга 3

N	Φ	K	x_1^i	$\vec{u}$	b_i	$a^i, i=1,2,3,4$
1.1	S	C	$xt^{-1}-ba^{-1}\ln t,$ $rt^{-1}, \theta-a^{-1}\ln t$	$u_1^1+xt^{-1}+ba^{-1},$ $u_1^2+rt^{-1}, rt^{-1}(u_1^3+a^{-1})$	$1,1,(x_1^2)^{-2}$	$-u_1^1-ba^{-1}, -u_1^2+x_1^2(u_1^3+a^{-1})^2,$ $-(x_1^2)^{-1}(u_1^3+a^{-1})(2u_1^2+x_1^2), -3-(x_1^2)^{-1}u_1^2$
1.2	E	C	$x-at\theta, r$	$a\theta+r^2(r^2+a^2t^2)^{-1}u_1^1+atr^{-1}u_1^3,$ $u_1^2, u_1^3-atr(r^2+a^2t^2)u_1^1$	$1+a^2t^2r^{-2}, 1$	$2ar^{-1}(tr^{-1}u_1^2-1)(u_1^3-atr\alpha u_1^1), r^{-1}(u_1^3-atru_1^1\alpha),$ $(u_1^2(a^2t^2r^{-1}-r)\alpha-2a^2t\alpha)(u_1^3+atru_1^1\alpha), -r^{-1}u_1^2,$ где $\alpha^{-1}=r^2+a^2t^2$
1.3	E	C	x, r	u_1^1, u_1^2, u_1^3	$1,1$	$0, r^{-1}(u_1^3)^2, -r^{-1}u_1^2u_1^3, -r^{-1}u_1^2$
1.4	E	C	$r, x-\theta$	$u_1^2+r^{-1}u_1^3-r^{-2}u_1^1$	$1, 1+r^{-2}$	$r^{-1}(u_1^3-r^{-1}u_1^1)^2, 2r^{-2}u_1^1(u_1^3-r^{-1}u_1^1),$ $-r^{-1}u_1^1u_1^2+r^{-2}(u_1^3-r^{-1}u_1^1)^2, -r^{-1}u_1^1$
1.5	S	C	$x-\frac{1}{2}t^2, r, a\theta-t$	$u_1^1+t, u_1^2, a^{-1}r(1+u_1^3)$	$1,1,a^2r^{-2}$	$-1, a^{-2}r(1+u_1^2)^2, -2r^{-1}u_1^2(1+u_1^3), -r^{-1}u_1^2$
1.6	S	C	$x, r, \theta-t$	$u_1^1, u_1^2, r(1+u_1^3)$	$1,1,r^{-2}$	$0, r(1+u_1^3)^2, -2r^{-1}u_1^2(1+u_1^3), -r^{-1}u_1^2$
1.7	S	D	$xt^{-1}-a\ln t, yt^{-1}, zt^{-1}$	$u_1^1+xt^{-1}+a, u_1^2+yt^{-1}, u_1^3+zt^{-1}$	$1,1,1$	$-u_1^1-a, -u_1^2, -u_1^3, -3$
1.8	S	D	$xt^{-1}, yt^{-1}, zt^{-1}$	$u_1^1+xt^{-1}, u_1^2+yt^{-1}, u_1^3+zt^{-1}$	$1,1,1$	$-u_1^1, -u_1^2, -u_1^3, -3$
1.9	S	D	$x-\frac{1}{2}t^2, y, z$	u_1^1+t, u_1^2, u_1^3	$1,1,1$	$-1,0,0,0$
1.10	S	D	x, y, z	u_1^1, u_1^2, u_1^3	$1,1,1$	$0,0,0,0$
1.11	E	D	$x-tz, y$	$z+(u_1^1+tu_1^3)(1+t^2)^{-1},$ $u_1^2, (u_1^3-tu_1^1)(1+t^2)^{-1}$	$1+t^2, 1$	$2(tu_1^1-u_1^3)(1+t^2)^{-1}, 0, u_1^1, 0$
1.12	E	D	y, z	$xt^{-1}+u_1^3, u_1^1, u_1^2$	$1,1$	$0,0,-t^{-1}u_1^3, -t^{-1}$
1.13	E	D	y, z	u_1^3, u_1^1, u_1^2	$1,1$	$0,0,0,0$

вида (2.1) с указанием инвариантного представления (табл. на с. 50). При этом $p = P(x_1^i)$, $\rho = R(x_1^i)$, $S = S(x_1^i)$. Обозначения в таблице: N — номер подалгебры из [2. Табл. 6]; (E) — эволюционная форма (2.1); (S) — стационарная форма (2.1); a, b — параметры подалгебр; D — декартовы координаты $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$, $\vec{u} = (u^1, u^2, u^3)$; C — цилиндрические координаты $x = x^1$, $\operatorname{tg}\theta = x^3(x^2)^{-1}$, $r^2 = (x^2)^2 + (x^3)^2$, $\vec{u} = (U, V, W)$, $U = u^1$, $V = u^2\cos\theta + u^3\sin\theta$, $W = -u^2\sin\theta + u^3\cos\theta$. Для эволюционных подмоделей независимый инвариант $x_1^3 = t$ и $b_3 = 0$, поэтому в таблице приводятся только x_1^1, x_1^2 и b_1, b_2. Подмодели имеют исторически сложившиеся названия [2], относящиеся к движению газа: 1.1 — квазиконические спиральные; 1.2 — обобщенные вращательно-симметричные; 1.3 — вращательно-симметричные; 1.4 — винтовые; 1.5 — вращательные в однородном поле сил; 1.6 — вращательные; 1.7 — квазиконические; 1.8 — конические; 1.9 — стационарные в постоянном поле; 1.10 — стационарные; 1.11 — сдвиговые; 1.12 — галилеево-инвариантные; 1.13 — двумерные.

Приведем пример пользования таблицей. Подмодель $N = 1.6$ описывает вращательное движение газа. Представление решения системы (1.1)

$$u^1 = u_1^1,\ u^2 = u_1^2,\ u^3 = r(1+u_1^3),\ p = P,\ S = S_1,$$

где u_1^i, p, S_1 являются функциями $x_1^1 = x$, $x_1^2 = r$, $x_1^3 = \theta - t = s$.

Подмодель (2.1) типа (S) в этом случае принимает вид

$$RD_1u_1^1 + P_x = 0,$$

$$RD_1u_1^2 + P_r = r(1+u_1^3)^2,$$

$$RD_1u_1^3 + r^{-2}P_s = -2r^{-1}u_1^2(1+u_1^3),$$

$$D_1R + R(u_{1x}^1 + u_{1r}^2 + u_{1s}^3) = -r^{-1}u_1^2,$$

$$D_1S_1 = 0,$$

где $D_1 = u_1^1\partial_x + u_1^2\partial_r + u_1^3\partial_s$.

Индивидуальные особенности подмоделей выявлены в многочисленных работах [6, 10–16].

3. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА 2

Инварианты двумерных подалгебр можно выбрать так, что инвариантная подмодель принимает одну из следующих форм: эволюционную (E) или стационарную (S) [4, 5, 18].

Имеется 10 подмоделей формы (E), 16 подмоделей формы (S) и для одной подалгебры не выполняются условия существования инвариантного решения. Единая запись имеет вид (2.1), где

$$D_1 = \partial_t + u_1^1\partial_{x_1^1}, \qquad \nabla_1 = (\partial_{x_1^1}, 0, 0),$$

$$B = \operatorname{diag}(b_1, 0, 0), \qquad b_1(t, x_1^1) > 0,$$

$$\operatorname{div}_1\vec{u}_1 = u_{1x_1^1}^1 \qquad \text{для (E)};$$

$$D_1 = u_1^1\partial_{x_1^1} + u_1^2\partial_{x_1^2}, \qquad \nabla_1 = (\partial_{x_1^1}, \partial_{x_1^2}, 0),$$

$$B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, 0), \qquad b_i(x_1^1, x_1^2) > 0,$$

$$\operatorname{div}_1\vec{u}_1 = u_{1x_1^1}^1 + u_{1x_1^2}^2 \qquad \text{для (S)}.$$

Инвариантные системы приводятся к симметрическому гиперболическому виду. Область гиперболичности для формы (S) определяется неравенством

$$b_1^{-1}(u_1^1)^2 + b_2^{-1}(u_1^2)^2 \geq c^2.$$

Здесь также решены 2- и 1-уравнения системы, определяющей допускаемые операторы [17]. Проведена групповая классификация всех подмоделей участниками программы «Подмодели» и результаты окончательно проверены *Е. В. Мамонтовым* с использованием программ аналитических вычислений. Индивидуальные особенности подмоделей выявлены в многочисленных работах [6, 10, 15, 19, 20].

4. ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАНГА 1

Вычисление инвариантов трехмерных подалгебр показывает, что лишь для 37 подалгебр из 47 выполняются условия существования инвариантных решений [21].

Теорема 4.1. *Любая инвариантная подмодель ранга 1 с общим уравнением состояния задается либо точными формулами решения, либо интегралами, достаточными для определения решения, либо сводится к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.*

В последнем случае течение газа обязательно изэнтропическое. В систему входит произвольный элемент — функция, задающая уравнение состояния. Подалгебры, которые порождают эти системы, имеют номера [3. Табл. 6]: 3.1–3.5, 3.7, 3.21, 3.22, 3.25, 3.26. В остальных случаях инвариантные подмодели интегрируются.

Теорема 4.2. *Существуют такие уравнения состояния, что решение инвариантной подмодели задается конечными формулами.*

Полный список формул приведен в работе [21]. Утверждение теоремы следует из того факта, что инвариантная подмодель всегда может быть записана в дивергентной форме [5], а введение функции тока для одного из дивергентных уравнений переводит другое в соотношение для определения функции f в (1.2).

Инвариантные решения ранга ноль являются изобарическими. Подмодель изобарических движений газа проинтегрирована в [22].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

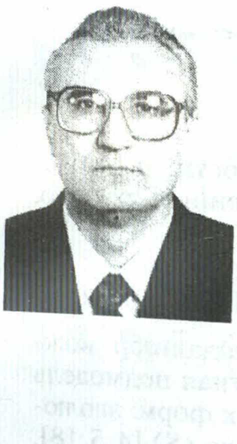
Все инвариантные решения уравнений газовой динамики полностью рассмотрены и классифицированы. Обнаружены общие свойства инвариантных подмоделей: форма, симметричность, гиперболичность, допускаемые группы, интегрируемость.

Индивидуальные особенности рассмотрены не для каждой из подмоделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
2. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
3. **Овсянников Л. В.** Некоторые итоги выполнения программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 3. С. 362–372.
4. **Хабиров С. В.** Приведение инвариантной подмодели газовой динамики к каноническому виду // Математические заметки. 1999. Т. 66. Вып. 3. С. 439–444.
5. **Овсянников Л. В.** Каноническая форма инвариантных подмоделей газовой динамики. Препринт № 3-97. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1997. 41 с.
6. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
7. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
8. **Овсянников Л. В.** О свойстве x-автономии // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 3. С. 559–561.
9. **Хабиров С. В.** К анализу инвариантных подмоделей ранга три уравнений газовой динамики // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 6. С. 764–766.
10. **Хабиров С. В.** Нестационарное инвариантное решение уравнений газовой динамики, описывающее растекание газа до вакуума // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 967–975.
11. **Хабиров С. В.** Подмодель винтовых движений в газовой динамике // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 1. С. 53–65.
12. **Хабиров С. В.** Подмодель вращательных движений газа в однородном поле сил // ПММ. 1998. Т. 62. Вып. 2. С. 263–271.
13. **Khabirov S. V.** Submodel of the spiral stationary motion in gas dynamics // Modern Group Analysis VII. Mars. Publishers, Symmetri Foundation. 1999. Trondheim. Norway. P. 181–187.
14. **Хабиров С. В.** Подмодель вращательных движений в газовой динамике // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 6. С. 37–45.
15. **Хабиров С. В.** Течения газа со спиральными поверхностями уровня // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 34–39.
16. **Мелешко С. В.** Групповая классификация уравнений движения газа в постоянном поле сил // ПМТФ. 1996. Т. 36, № 1. С. 42–47.
17. **Хабиров С. В.** Свойства инвариантных подмоделей ранга два газовой динамики // Актуальные проблемы математики. Математические методы в естествознании. Уфа: УГАТУ, 1999. С. 227–237.
18. **Мамонтов Е. В.** Инвариантные решения ранга два уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 50–55.
19. **Головин С. В.** Об одном инвариантном решении уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 1. С. 3–10.
20. **Мустаев А. Ф.** Подмодели винтовых галилеево-инвариантных течений в газовой динамике: Препринт. Уфа: БГПИ, 1999. 27 с.
21. **Хабиров С. В.** Инвариантные решения ранга 1 в газовой динамике // Моделирование, вычисление, проектирование в условиях неопределенности 2000 // Уфа: УГАТУ, 2000. С. 104–115.
22. **Овсянников Л. В.** Изобарические движения газа // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30. № 10. С. 1792–1799.

ОБ АВТОРЕ



Хабиров Салават Валеевич, профессор, гл. науч. сотр., зав. лабораторией ИМ УНЦ РАН, проф. каф. математики УГАТУ. Дипл. механик (Новосиб. гос. ун-т, 1970). Д-р физ.-мат. наук (защ. в Инте мат. и мех. РАН, Екб., 1991). Исследования в области группового анализа диф. уравнений.