

ВЫВОДЫ

Предложена методика и алгоритм исследования методом конечных элементов напряженно-деформированного состояния многослойных матриц, содержащих произвольное число слоев и собранных с предварительным натягом. Будучи включенной в состав систем автоматизированного проектирования, методика позволяет повысить точность и достоверность получаемых результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузьминых А. А., Газизов Х. Ш., Якупов Р. Г., Шевелев А. А. Исследование напряженного состояния составного цилиндра с шестиугольным контуром полости // Изв. вузов. Черная металлургия. 1994. № 5. С. 38–40.
2. Галлагер Р. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1984. 428 с.
3. Газизов Х. Ш., Кузьминых А. А. Расчет соединений с натягом методом конечных элементов // Изв. вузов. Машиностроение. 1994. № 7–9. С. 58–61.
4. Кузьминых А. А., Газизов Х. Ш., Закиров Д. М. Оптимальное проектирование трехслойных матриц для штамповки шестигранных деталей // Теория и технология процессов пластической деформации. М.: МИСиС, 1997. С. 380–389.

5. Канторович З. Б. Основы расчета химических машин и аппаратов. М.: Машгиз, 1960. 743 с.
6. Кузьминых А. А., Газизов Х. Ш. Оптимизация геометрических параметров многослойных матриц с твердосплавной вставкой // Изв. вузов. Черная металлургия. 1999. № 3. С. 48–51.
7. Адельгильдин А. Х., Закиров Д. М., Кузьминых А. А. Расчет параметров бандажированных матриц для штамповки шестигранных деталей методом конечных элементов // Прогрессивные технологические процессы в обработке металлов давлением. Магнитогорск: МДП, 1997. С. 231–236.

ОБ АВТОРЕ



Кузьминых Александр Андреевич, доцент, гл. науч. сотр. отраслевой лаборатории РТИИ УГАТУ. Дипл. инж.-механик (Челяб. политехн. ин-т, 1966). Канд. техн. наук по обработке металлов давлением (заш. в МИСиС, 1975). Исследования в области технологии производства инструментов для обработки металлов давлением.

УДК 571.95

ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

А. В. ГЛАДКОВ

Естественно-научный факультет УГАТУ
Тел: (3472) 23 77 35 E-mail: gladkov@math.ugatu.ac.ru

Рассматриваются гамильтоновы системы с малым параметром. На основе приближенных симметрий этих систем строятся соответствующие им отображения (за период, сепаратрисные). Полученные отображения могут быть использованы для анализа локальной неустойчивости и оценки стохастических слоев близи сепаратрис невозмущенной задачи. В качестве примеров разобраны два случая периодического возмущения нелинейного маятника и возмущенная система волчка Эйлера

Гамильтоновы системы с малым параметром; приближенные симметрии; отображение за период; сепаратрисное отображение

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются гамильтоновы системы с гамильтонианом

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \varphi, t). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{I} = (I_1, I_2, \dots, I_m)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$ – канонически сопряженные переменные «углодействие», t – время, ε – малый параметр.

Случай $\varepsilon = 0$ соответствует невозмущенной задаче, которая представляет собой интегрируемую систему с достаточным набором точных симметрий. Наличие же возмущения ($\varepsilon \neq 0$) часто приводит к нарушению симметричных свойств системы и, вообще говоря, к ее неинтегрируемости [4].

В [3] была доказана теорема о наследовании всех точных симметрий невозмущенной системы в виде приближенных симметрий системы с возмущением. Для класса гамильтоновых симметрий, связанных с первыми интегралами системы, доказана теорема о сохранении свойства гамильтоновости при наследовании симметрии и предельно явлены формулы для коэффициентов разложения приближенных первых интегралов, также исследован вопрос устойчивости симметрий относительно возмущения.

В данной работе рассмотрены два случая периодического возмущения нелинейного маятника. При помощи приближенных гамильтоновых симметрий построены приближенно инвариантные решения в виде приближенных первых ин-

тегралов. Из условия приближенного сохранения первых интегралов во времени получены отображения за период. Дальнейший анализ этих отображений позволяет выявить появление локальной неустойчивости, а значит, возникновение хаоса [5]. В качестве другого примера рассмотрена возмущенная система волчка Эйлера, которая описывает свободные колебания тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки с небольшим сдвигом точки подвеса из центра тяжести фигуры.

1. ПРИБЛИЖЕННЫЕ СИММЕТРИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим гамильтонову систему, заданную дифференциальными уравнениями

$$\dot{\mathbf{I}} = -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \omega(\mathbf{I}) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{I}}, \quad (2)$$

где

$$\frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}} = \omega(\mathbf{I}), \quad \omega(\mathbf{I}) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m). \quad (3)$$

Генератор приближенной группы симметрий системы (2), следуя [2], ищется в виде

$$X = \sum_{i=1}^m \left(\mu_i(\mathbf{I}, \varphi, t, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} + \nu_i(\mathbf{I}, \varphi, t, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial I_i} \right)$$

с координатами

$$\begin{aligned} \mu_i &= \mu_i^0 + \varepsilon \mu_i^1 + \varepsilon^2 \mu_i^2 + \dots; \\ \nu_i &= \nu_i^0 + \varepsilon \nu_i^1 + \varepsilon^2 \nu_i^2 + \dots \end{aligned}$$

и находится из определяющей системы уравнений

$$\begin{aligned} \overline{X} \left(\dot{\mathbf{I}} + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} \right) \Big|_{(2)} &\approx 0; \\ \overline{X} \left(\dot{\varphi} - \omega(\mathbf{I}) - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \mathbf{I}} \right) \Big|_{(2)} &\approx 0. \end{aligned}$$

Здесь \overline{X} — генератор, продолженный на первые производные. Система уравнений (4) после расщепления по степеням ε может быть решена методом характеристик [3].

Если генератор группы симметрий порожден первым интегралом гамильтоновой системы, то такие симметрии обычно называются гамильтоновыми.

Например, если в системе (2) $\varepsilon = 0$, то общий вид интеграла этой системы есть $F^0 = F^0(\varphi - \omega t, \mathbf{I})$, F^0 — произвольная функция и соответствующая ему гамильтонова симметрия имеет вид

$$X^0 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F^0}{\partial I_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial F^0}{\partial \varphi_i} \frac{\partial}{\partial I_i} \right). \quad (4)$$

Верна следующая

Теорема 1. Гамильтонова симметрия (4) невозмущенной системы (2) ($\varepsilon = 0$) с соответствующим интегралом $F^0 = F^0(\varphi - \omega t, \mathbf{I})$ наследуется в гамильтонову симметрию возмущенной системы (2) вида

$$X = X^0 + \varepsilon X^1 + \dots = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial I_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} \frac{\partial}{\partial I_i} \right),$$

где F — приближенный первый интеграл возмущенной системы и

$$F = F^0 + \varepsilon F^1 + \varepsilon^2 F^2 + \dots, \quad (5)$$

$$F^{k+1} = \int \left(\sum_j \left(\frac{\partial F^k}{\partial I_j} \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_j} - \frac{\partial F^k}{\partial \varphi_j} \frac{\partial H_1}{\partial I_j} \right) \right) dt; \quad *$$

$$k \geq 0. \quad (6)$$

Здесь и далее (*) означает, что интегралы вычисляются на торе, т.е. $\varphi = \xi + \omega(I)t$, где $\xi = \text{const}$, а после интегрирования делается обратная замена $\xi = \varphi - \omega(I)t$. Другими словами, интегрирование происходит на траекториях невозмущенной системы.

2. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИБЛИЖЕННЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИММЕТРИЙ

2.1. Нелинейный маятник с толчками. Приближенно-инвариантные решения и универсальное отображение

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H &= H_0(I) + \varepsilon V(x) T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \\ H_0 &= \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \cos(x), \end{aligned}$$

где невозмущенный гамильтониан H_0 описывает нелинейный осциллятор, возмущение же соответствует действию на осциллятор малых периодических толчков с периодом T .

Невозмущенная система обладает следующими гамильтоновыми симметриями:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad X_2 = -\frac{d\omega}{dI} t \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial I},$$

которые согласно Теореме 1 наследуются в виде приближенных гамильтоновых симметрий

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1^0 + \varepsilon X_1^1 + o(\varepsilon) = \frac{\partial F_1^\varepsilon}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_1^\varepsilon}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial I}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= X_2^0 + \varepsilon X_2^1 + o(\varepsilon) = \frac{\partial F_2^\varepsilon}{\partial I} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_2^\varepsilon}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial I} \end{aligned} \quad (8)$$

с соответствующими приближенными первыми интегралами

$$F_1^\varepsilon = I + \varepsilon \int^t (TV_\varphi S(t))_* d\tau + o(\varepsilon),$$

$$F_2^\varepsilon = \varphi - \omega(I)t - \varepsilon \int^t \left(T \left(V_I + \frac{d\omega}{dI} \tau V_\varphi \right) S(t) \right)_* d\tau + o(\varepsilon),$$

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT).$$

Приближенно-инвариантное решение относительно приближенных симметрий (7), (8) имеет вид

$$F_1^\varepsilon = \text{const}_1 + o(\varepsilon), \quad F_2^\varepsilon = \text{const}_2 + o(\varepsilon).$$

Если теперь рассмотреть два момента времени t_1, t_2 и вычислить изменение F_i , то очевидно, что $\Delta F_i = F_i(t_2) - F_i(t_1) = o(\varepsilon)$. Пусть в момент времени t_0 система претерпевает толчок. Выбрав $t_1 = t_0 - 0$, $t_2 = t_0 - 0 + T$ и учитывая переобозначения

$$I = I(t_0 - 0), \quad \varphi = \varphi(t_0 - 0),$$

$$\bar{I} = I(t_0 - 0 + T), \quad \bar{\varphi} = \varphi(t_0 - 0 + T),$$

рассмотрим изменение F_i за период

$$\Delta_T F_i = F_i(t_0 - 0 + T) - F_i(t_0 - 0), \quad i = 1, 2,$$

так что

$$\Delta_T F_1 = \bar{I} - I + \varepsilon TV_\varphi + o(\varepsilon) = o(\varepsilon), \quad (9)$$

$$\Delta_T F_2 = \bar{\varphi} - \varphi - \omega(\bar{I})(t_0 + T) + \omega(I)t_0 - \varepsilon \left(V_I + \frac{d\omega}{dI} t_0 V_\varphi \right) + o(\varepsilon) = o(\varepsilon).$$

Далее, воспользовавшись разложением частоты $\omega(\bar{I})$ и выразив \bar{I} из (9)

$$\omega(\bar{I}) = \omega(I) + \frac{d\omega(I)}{dI} (\bar{I} - I) + o(\varepsilon)$$

$$= \omega(I) - \varepsilon TV_\varphi \frac{d\omega(I)}{dI} + o(\varepsilon),$$

окончательно, опуская члены $o(\varepsilon)$, будем иметь

$$\bar{I} = I + \varepsilon TV_\varphi, \quad (10)$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + \omega(I)T + \varepsilon \left(V_I - T^2 V_\varphi \frac{d\omega(I)}{dI} \right).$$

Замечательным оказывается то, что явная зависимость от t_0 пропадает. Полученная система (10) является универсальным отображением. Анализ собственных чисел якобиевой матрицы этого отображения показывает возникновение в системе локальной неустойчивости (см. например [5]).

2.2. Периодическое возмущение нелинейного маятника. Приближенная инвариантность и сепаратрисное отображение

Рассмотрим другой пример периодического возмущения нелинейного осциллятора, когда $H_1 = V(x) \cos(\nu t)$. Вводя две новые канонически сопряженные переменные $J, \theta = \nu t$ и переписав гамильтониан в виде

$$H = H_0(I) + \nu J + \varepsilon H_1(I, \varphi, \theta),$$

будем рассматривать уже автономную систему с двумя степенями свободы, обладающую следующими приближенными законами сохранения:

$$F_1 = I + \varepsilon \int^t (V_\varphi \cos \theta)_* d\tau + o(\varepsilon);$$

$$F_2 = \varphi - \omega(I)t - \varepsilon \int \left(\left(V_I + \frac{d\omega}{dI} V_\varphi \right) \cos \theta \right)_* d\tau + o(\varepsilon);$$

$$F_3 = \theta - \nu t.$$

Вблизи сепаратрисы невозмущенной задачи скорость \dot{x} приближается к последовательности солитоноподобных импульсов, где $T = \frac{\pi}{\omega(\bar{I})}$ - время, прошедшее между двумя последовательными импульсами. Используя это свойство и соотношение

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \dot{x} \frac{1}{\omega(I)} \frac{d}{dx} V(x),$$

можно вычислить изменение первых интегралов F_1 и F_3 при переходе от одного импульса скорости к другому

$$\Delta_T F_1 = \bar{I} - I + \varepsilon \int_{\Omega} \dot{x} \frac{1}{\omega(I)} \frac{d}{dx} V(x) \cos \theta d\tau + o(\varepsilon); \quad (11)$$

$$\Delta_T F_3 = \bar{\theta} - \theta - \nu T,$$

где область Ω определяет ширину импульса и выполняется условие $\frac{\Omega}{T} \ll 1$. Приравняв оба выражения к нулю, получим отображение вблизи сепаратрисы. Воспользовавшись разложением частоты и выражая \bar{I} из вариации $\Delta_T F_1$, получим

$$\bar{\theta} \approx \theta + \frac{\pi\nu}{\omega(I)} - \frac{\pi\nu\omega'}{\omega^2(I)} (\bar{I} - I) =$$

$$= \theta + \frac{\pi\nu}{\omega(I)} - \frac{\pi\nu\varepsilon\omega'}{\omega^3(I)} C,$$

где

$$C = \int_{\Omega} \dot{x} \frac{d}{dx} V(x) \cos \theta d\tau.$$

Вычислим параметр

$$K = \left| \frac{\delta\bar{\theta}}{\delta\theta} - 1 \right| = \frac{\pi\nu\varepsilon|\omega'|}{\omega^3} \left| \frac{\partial C}{\partial \theta} \right|,$$

характеризующий растяжение по фазе θ . При $K \ll 1$ оно мало, и в этом случае можно говорить об устойчивости движения. При $K \gg 1$ возникает локальная неустойчивость, приводящая к перемешиванию траекторий в фазовом пространстве; другими словами, образуется стохастический слой. Оценка ширины стохастического слоя сводится к оценке интеграла $\frac{\partial C}{\partial \theta}$ (см., например, [5]).

2.3. Сепаратрисное отображение для возмущенного уравнения волчка Эйлера

В качестве другого примера рассмотрим задачу о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки с функцией Гамильтона

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad (12)$$

где $H_0 = T$ — кинетическая энергия тела, а $\varepsilon H_1 = -U$ — его потенциальная энергия, которую можно представить в виде

$$\begin{aligned} -U &= M g \rho_G (x'_G \gamma + y'_G \gamma' + z'_G \gamma''); \quad (13) \\ x'_G &= \frac{x_G}{\rho_G}; \quad y'_G = \frac{y_G}{\rho_G}; \\ z'_G &= \frac{z_G}{\rho_G}; \quad \rho_G = \sqrt{(x_G^2 + y_G^2 + z_G^2)}; \end{aligned}$$

здесь M — масса тела, g — величина ускорения силы тяжести, (x'_G, y'_G, z'_G) — координаты центра тяжести тела в подвижной системе координат, $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ — направляющие косинусы, ρ_G — расстояние центра масс от точки закрепления.

Сравнивая формулы (12) и (13), замечаем, что за ε можно принять постоянный множитель, равный произведению веса тела на расстояние от центра тяжести до точки закрепления:

$$\varepsilon = M g \rho_G \quad \text{и} \quad H_1 = x'_G \gamma + y'_G \gamma' + z'_G \gamma'',$$

где H_0, H_1 выражены в соответствующих переменных Депри (см., например, [1]): углах l, φ_2, φ_3 и соответствующих им обобщенных импульсах L, I_2, I_3 .

При $\varepsilon = 0$ мы приходим к случаю Эйлера ($x_G = 0, y_G = 0, z_G = 0$), и

$$H_0 = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C}, \quad (14)$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела.

Заметим, что для возмущенной задачи положение центра тяжести тела относительно неподвижной точки описывается тремя константами x_G, y_G, z_G . Рассмотрим случай, когда $x_G = 0, z_G = 0, y_G \neq 0$. В этом случае $\varepsilon = M g y_G$ и $H_1 = \gamma'$ или в переменных Депри

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{I_3}{I_2} \sqrt{1 - \frac{L^2}{I_2^2}} \cos l + \quad (15) \\ &+ \frac{L}{I_2} \sqrt{1 - \frac{I_3^2}{I_2^2}} \cos l \cos \varphi_2 - \\ &- \sqrt{1 - \frac{I_3^2}{I_2^2}} \sin l \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Таким образом, невозмущенная задача представляет собой задачу свободных колебаний тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. А возмущение получается путем относительно небольшого сдвига точки подвеса из центра тяжести фигуры. Причем даже при самых малых нетривиальных возмущениях движение тела может принять локально неустойчивый характер, что будет показано путем вариации приближенных первых интегралов системы.

Приближенные первые интегралы, соответствующие действию I_2 и углу φ_2 , имеют вид

$$F_2 = I_2 - \varepsilon \int^t \left(\frac{L}{I_2} R \right) dt + o(\varepsilon), \quad (16)$$

$$F_4 = \varphi_2 - \omega_2(I_1, I_2)t, \quad (17)$$

где

$$R = \sqrt{1 - \left(\frac{I_2}{I_3} \right)^2} \left(\cos l \sin \varphi_2 + \frac{\sin l \cos \varphi_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{L}{I_2} \right)^2}} \right).$$

В интеграле F_4 не учтены члены порядка ε . Это можно сделать, так как при дальнейшем анализе локальной неустойчивости главный вклад в параметр K (параметр растяжения фаз) будут давать поправки, возникающие при разложении частоты ω_2 .

Функция $\frac{L}{I_2}$ вблизи сепаратрисы невозмущенной задачи на фазовой плоскости (L, l) ведет себя как последовательность солитоноподобных импульсов с периодом

$$T = \frac{\pi}{\omega_1(I_2)},$$

поэтому мы можем аналогично, как в примере 2.2, проварьировать оба интеграла по периоду T и получить параметр растяжения фазы φ_2

$$K = \left| \frac{\delta \varphi}{\delta \varphi} - 1 \right| = \frac{\pi \varepsilon |\omega'_1| \omega_2}{\omega_1^2} |W|,$$

где

$$W = \int_{\Omega} \left(\frac{L}{I_2} \frac{\partial R}{\partial \varphi_2} \right) dt.$$

Из условия $K \gg 1$ и асимптотически вычисляя интеграл W по области Ω , где подынтегральная функция отлична от нуля с экспоненциальной точностью, можно оценить ширину стохастического слоя.

Автор выражает благодарность В.А.Байкову за постановку задачи и плодотворные дискуссии, а также Р.А.Хабибуллину за совместные исследования примера 2.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

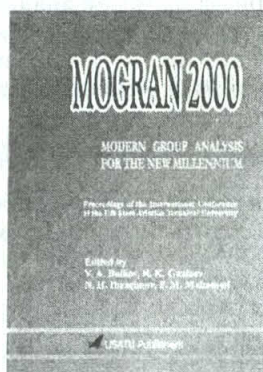
1. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
2. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Приближенные симметрии // Матем. сб. 1988. 136, В. 4. С. 435-450.
3. Байков В. А., Гладков А. В. Приближенные симметрии гамильтоновых систем с малым параметром // Актуальные проблемы математики. Мат. методы в естествознании: Межвуз. науч. сб. Уфа: УГАТУ, 1999. С. 27-31.
4. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: УГУ, 1995. 432 с.
5. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.

ОБ АВТОРЕ



Гладков Андрей Валерьевич, аспирант кафедры математики УГАТУ. Дипл. инженер в области прикладной математики (УГАТУ, 1998). Работает над диссертацией в области группового анализа дифференциальных уравнений.

Информация



MOGRAN 2000

Modern Group Analysis for the
New Millennium

Proceedings of the International Conference at
Ufa State Aviation Technical University

Edited by

V. A. Baikov, R. K. Gazizov,
N. H. Ibragimov, F. M. Mahomed

USATU Publishers, 2001

Вышел в свет сборник трудов очередной восьмой международной конференции «MOGRAN 2000. Современный групповой анализ для нового тысячелетия», проходившей в Уфе в период с 27 сентября по 3 октября 2000 года. В сборнике представлено 38 статей исследователей из Москвы, Санкт-Петербурга, Екатеринбурга, Казани, Уфы, Киева, а также Йоханнесбурга, Ммабато (ЮАР), Ульма (Германия), отражающих современные направления в развитии группового анализа дифференциальных уравнений и математического моделирования проблем естествознания. Издание на английском языке осуществлено в Уфимском государственном авиационном техническом университете под редакцией профессоров В. А. Байкова, Р. К. Газизова (Россия), Н. Х. Ибрагимова и Ф. А. Махомеда (Южная Африка).