

УДК 539.0

КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В. С. ЖЕРНАКОВ, Х. Ш. ГАЗИЗОВ, Р. И. ТЕРЕГУЛОВ

Факультет авиационных двигателей УГАТУ
Тел: (3472) 23 06 76

Получены соотношения для деформаций тонких оболочек вращения, не содержащие производных геометрических параметров срединной поверхности и составляющих перемещений порядка выше первого. Это позволяет избежать влияния погрешности конечноэлементной аппроксимации на результаты численного решения нелинейных задач теории оболочек. Для частного случая «среднего» изгиба приводятся упрощенные зависимости. Получены уравнения для решения линейных задач начальной устойчивости, статического и динамического нагружения предварительно напряженных оболочек

Конечный элемент; тонкая оболочка; начальные несовершенства; оболочка вращения; срединная поверхность; координатный вектор; перемещения; тензор деформаций; характерный размер; предел пропорциональности; «средний» изгиб

ВВЕДЕНИЕ

В книге [1] предложен конечный элемент произвольной оболочки для решения задач линейной теории тонких оболочек. В отличие от известных, здесь осуществлена независимая аппроксимация перемещений и углов поворота в пределах элемента по их узловым значениям. Такой подход позволяет избежать операции дифференцирования геометрических параметров оболочки (для вычисления кривизн и кручения срединной поверхности), аппроксимируемых в пределах конечного элемента теми же функциями (изопараметрические элементы), что и перемещения и повороты.

Общеизвестен тот факт, что на решение нелинейных уравнений оболочек существенным образом влияют начальные несовершенства [2], а неточность (возрастающая при дифференцировании) в описании геометрии срединной поверхности — погрешность математической модели — может трактоваться именно таким образом. Вопросам адекватного описания поверхностей при численном решении нелинейных задач тонких оболочек посвящена монография [3].

В данной статье подход [1] используется для решения нелинейных задач теории тонких оболочек вращения. Предполагается, что

деформации малы (в пределах упругости материала оболочки).

1. ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Применительно к поверхностям вращения более естественными являются цилиндрические координаты x, r, α_2 (рис. 1); α_2 — угол, отсчитываемый от некоторого фиксированного меридиана.

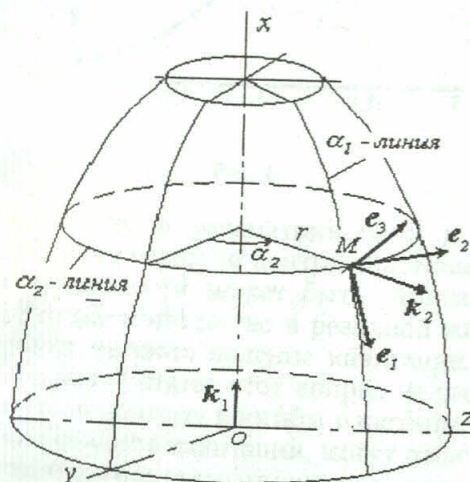


Рис. 1

Уравнение меридиана срединной поверхности оболочки вращения считается заданной в параметрической форме

$$x = x(\alpha_1), \quad r = r(\alpha_1), \quad (1)$$

где α_1 — безразмерная координата, измеряемая по меридиану, например, отношение расстояния от края оболочки — параллели $x = 0$ — до текущей точки M (см. рис. 1) к какому-либо линейному размеру оболочки. Так что α_1 - и α_2 -линии образуют семейство ортогональных кривых, направленных по линиям главных кривизн (меридианы и параллели).

Радиус-вектор точки M поверхности в базисе $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{e}_2$ цилиндрической системы координат может быть записан как

$$\mathbf{R} = x\mathbf{k}_1 + r\mathbf{k}_2. \quad (2)$$

Здесь \mathbf{k}_2 — единичный вектор, направленный вдоль радиуса точки M , зависит от окружной координаты α_2 [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{k}_2(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} &= \mathbf{k}_{2,2} = \mathbf{e}_2(\alpha_2), \\ \frac{\partial \mathbf{e}_2(\alpha_2)}{\partial \alpha_2} &= \mathbf{e}_{2,2} = -\mathbf{k}_2(\alpha_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Единичный координатный вектор \mathbf{e}_1 , направленный по касательной к меридиану в точке M , определяется обычным образом:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{r_{,1}}{A_1} = \lambda_{1x}\mathbf{k}_1 + \lambda_{1r}\mathbf{k}_2, \quad (4)$$

где направляющие косинусы координатного вектора \mathbf{e}_1

$$\lambda_{1x} = \frac{\partial x}{A_1 \partial \alpha_1}, \quad \lambda_{1r} = \frac{\partial r}{A_1 \partial \alpha_1}, \quad (5)$$

$$A_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \alpha_1}\right)^2, \quad A_2^2 = r^2 \quad (6)$$

суть коэффициенты первой квадратичной формы поверхности вращения, определяющей длину элементарной дуги на поверхности [5]:

$$dl_0^2 = A_1^2 d\alpha_1^2 + A_2^2 d\alpha_2^2. \quad (7)$$

Единичный вектор нормали к поверхности определяется как

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = \lambda_{3x}\mathbf{k}_1 + \lambda_{3r}\mathbf{k}_2 \quad (8)$$

и имеет направляющие косинусы

$$\lambda_{3x} = -\lambda_{1r}, \quad \lambda_{3r} = \lambda_{1x}. \quad (9)$$

Для описания геометрии оболочки вводится еще одна координата — α_3 , ортогональная к α_1 - и α_2 -линиям, определяющая кратчайшее расстояние от текущей точки оболочки до ее срединной поверхности. Поверхность, образованную совокупностью точек с координатами $\alpha_3 = \text{const}$, будем называть поверхностью или слоем α_3 .

Радиус-вектор любой частицы слоя α_3 определяется как

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^\alpha &= \mathbf{R} + \alpha_3 \mathbf{e}_3 = \\ &= (x + \lambda_{3x}\alpha_3)\mathbf{k}_1 + (r + \lambda_{3r}\alpha_3)\mathbf{k}_2, \end{aligned} \quad (10)$$

а квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими друг к другу частицами оболочки

$$dl_0^2 = \mathbf{R}_{,i}^\alpha \cdot \mathbf{R}_{,j}^\alpha d\alpha_i d\alpha_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Здесь и далее, если не оговорено особо, по повторяющимся индексам производится суммирование.

В результате деформации осевая x , радиальная r и угловая α_2 координаты частицы слоя α_3 получают конечные приращения (перемещения) u^α, v^α и ψ^α , так что радиус-вектор этой частицы после деформации может быть представлен формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{*\alpha} &= (x + u^\alpha + \lambda_{3x}\alpha_3)\mathbf{k}_1 + \\ &+ (r + v^\alpha + \lambda_{3r}\alpha_3)\mathbf{k}_2(\alpha_2 + \psi^\alpha), \end{aligned} \quad (12)$$

а длина бесконечно малого отрезка станет

$$dl^{*2} = \mathbf{R}_{,i}^{*\alpha} \cdot \mathbf{R}_{,j}^{*\alpha} d\alpha_i d\alpha_j, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Инвариант $dl^{*2} - dl_0^2$ определяет физические [6] компоненты тензора деформаций Грина-Сен-Венана \mathbf{e}_{ij}

$$dl^{*2} - dl_0^2 = 2\mathbf{e}_{ij} A_i^\alpha A_j^\alpha d\alpha_i d\alpha_j, \quad (14)$$

$$2\mathbf{e}_{ij}^\alpha = \frac{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}_{,j}^\alpha}{A_j^\alpha} + \frac{\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{u}_{,i}^\alpha}{A_i^\alpha} + \frac{\mathbf{u}_{,i}^\alpha \cdot \mathbf{u}_{,j}^\alpha}{A_i^\alpha A_j^\alpha}, \quad (15)$$

(суммирования нет). Коэффициенты Ламэ $A_i^\alpha = |\mathbf{R}_{,i}^\alpha|$ выражаются через параметры срединной поверхности как [2]

$$\begin{aligned} A_1^\alpha &= A_1(1 + \mathbf{k}_{11}\alpha_3), \\ A_2^\alpha &= A_2(1 + \mathbf{k}_{22}\alpha_3) = r(1 + \mathbf{k}_{22}\alpha_3), \\ A_3^\alpha &= A_3 = 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь k_{11} и k_{22} — главные кривизны срединной поверхности: меридиана и параллели.

Ввиду ограниченного объема статьи развернутые выражения для e_{ij} здесь не приводятся.

Можно показать [2], что при малых деформациях величины e_{ii} характеризуют изменение длин бесконечно малых отрезков в направлении единичных координатных векторов e_i (относительные линейные деформации), а e_{ij} ($i \neq j$) — угла между векторами e_i и e_j .

2. ТОНКИЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ. «СРЕДНИЙ» ИЗГИБ

Для тонких (по классификации [2]) оболочек вращения отношение толщины h к характерному размеру L (ширина или наименьший радиус кривизны) есть малая величина

$$\frac{h}{L} \leq \varepsilon_p, \quad (17)$$

где ε_p — малая по сравнению с единицей величина, которой можно пренебречь (например, относительная линейная деформация, соответствующая пределу пропорциональности материала).

Если выполняется условие (17), выражения для деформаций (15) значительно упрощаются. Кроме того, если перемещения не столь велики (не превышают толщины или составляют несколько толщин [7]; такой случай деформации принято называть «средним» изгибом [2]), то в формулах (15) можно принять

$$1 + \frac{v^\alpha}{r} \approx 1 \quad (18)$$

и записать их в виде

$$\begin{aligned} e_{11} &= \lambda_{1x} \frac{u_{,1}^\alpha}{A_1} + \lambda_{1r} \frac{v_{,1}^\alpha}{A_1} + \\ &+ \frac{1}{2A_1^2} (u_{,1}^{\alpha 2} + v_{,1}^{\alpha 2} + r^2 \psi_{,1}^{\alpha 2}), \\ e_{22} &= \psi_{,2}^\alpha + \frac{v^\alpha}{r} + \frac{1}{2r^2} (u_{,2}^{\alpha 2} + v_{,2}^{\alpha 2} + r^2 \psi_{,2}^{\alpha 2}), \\ e_{33} &= \lambda_{3x} u_{,3}^\alpha + \lambda_{3r} v_{,3}^\alpha + \frac{1}{2} (u_{,3}^{\alpha 2} + v_{,3}^{\alpha 2} + r^2 \psi_{,3}^{\alpha 2}), \\ 2e_{12} &= \lambda_{1x} \frac{u_{,2}^\alpha}{r} + \lambda_{1r} \frac{v_{,2}^\alpha}{r} + \frac{r\psi_{,1}^\alpha}{A_1} + \\ &+ \frac{1}{A_1 r} (u_{,1}^\alpha u_{,2}^\alpha + v_{,1}^\alpha v_{,2}^\alpha + r^2 \psi_{,1}^\alpha \psi_{,2}^\alpha), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2e_{13} &= \lambda_{1x} u_{,3}^\alpha + \lambda_{1r} v_{,3}^\alpha + \lambda_{3x} \frac{u_{,1}^\alpha}{A_1} + \lambda_{3r} \frac{v_{,1}^\alpha}{A_1} + \\ &+ \frac{1}{A_1} (u_{,1}^\alpha u_{,3}^\alpha + v_{,1}^\alpha v_{,3}^\alpha + r^2 \psi_{,1}^\alpha \psi_{,3}^\alpha), \\ 2e_{23} &= \lambda_{3x} \frac{u_{,2}^\alpha}{r} + \lambda_{3r} \frac{v_{,2}^\alpha}{r} + r\psi_{,3}^\alpha + \\ &+ \frac{1}{r} (u_{,2}^\alpha u_{,3}^\alpha + v_{,2}^\alpha v_{,3}^\alpha + r^2 \psi_{,2}^\alpha \psi_{,3}^\alpha). \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно методу Коши–Пуассона [8] (в линейной теории тонких оболочек этот метод успешно применяется в известной монографии [9]), компоненты перемещения u^α , v^α и ψ^α можно представить в виде рядов Тейлора по степеням координаты α_3 . Удерживая в этих рядах только линейные слагаемые, будем иметь

$$\begin{aligned} u^\alpha &= u + \alpha_3 s_1, \\ v^\alpha &= v + \alpha_3 s_2, \\ \psi^\alpha &= \psi + \alpha_3 s_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь обозначено: $s_1 = u_{,3}^\alpha$, $s_2 = v_{,3}^\alpha$, $s_3 = \psi_{,3}^\alpha$, а u , v , ψ — значения u^α , v^α и ψ^α при $\alpha_3 = 0$, т. е. на срединной поверхности.

Для тонких оболочек представление (20) эквивалентно принятию гипотезы о прямой нормали (подход Лява в линейной теории оболочек [8]). Если подходить с точки зрения Коши–Пуассона, предположение (20) справедливо лишь при условии, что производные приращений координат в результате деформации u , v , ψ не сильно возрастают при дифференцировании по координате α_3 . Очевидно, что вышесказанное не относится к первым производным приращений координат s_k ($k = 1, 2, 3$), т. е. сами повороты не обязательно должны быть малыми величинами.

Вследствие того, что ψ^α есть угол, гипотезы (20) не обеспечивают (точно) прямолинейность нормали к срединной поверхности оболочки вращения после деформации, по крайней мере, в поперечном сечении оболочки $x = \text{const}$. Последнее из допущений (20) по существу означает, что деформация поперечного сдвига $2e_{23}$ по толщине оболочки не изменяется, что вполне допустимо, ибо в теории тонких оболочек считается, что деформации поперечного сдвига практически не влияют на напряженно-деформированное состояние оболочек.

Вариации деформаций (19)

$$\delta \{e\}^T = \delta \begin{vmatrix} e_{11} & e_{22} & 2e_{12} & e_{33} & 2e_{13} & 2e_{23} \end{vmatrix} \quad (21)$$

с учетом (20) можно записать в виде суммы линейных и нелинейных слагаемых

$$\delta \{e\} = \delta \{e^0\} + \delta \{e^L\}, \quad (22)$$

где введены следующие обозначения:

$$\delta \{e^0\} = \|b^0\| \delta \{v\}; \quad (23)$$

$$\delta \{e^L\} = \|b^L\| [G] \delta \{v\}; \quad (24)$$

$$\|b\| = \|b^0\| + \|b^L\| \|G\|, \quad (25)$$

$$\|b^0\| = \|b_0^0\| + \alpha_3 \|b_1^0\|, \quad (26)$$

$$\|b^L\| = \|b_0^L\| + \alpha_3 \|b_1^L\| + \alpha_3^2 \|b_2^L\|; \quad (27)$$

$$\{v\}^T = [v] = \|u \ v \ \psi \ s_1 \ s_2 \ s_3\|; \quad (28)$$

$$\|b_0^0\| = \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\lambda_{1x}(\dots),1}{A_1} & \frac{\lambda_{1r}(\dots),1}{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & (\dots),2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda_{1x}(\dots),2}{r} & \frac{\lambda_{1r}(\dots),2}{r} & \frac{r(\dots),1}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{3x} & \lambda_{3r} & 0 \\ \frac{\lambda_{3x}(\dots),1}{A_1} & \frac{\lambda_{3r}(\dots),1}{A_1} & 0 & \lambda_{1x} & \lambda_{1r} & 0 \\ \frac{\lambda_{3x}(\dots),2}{r} & \frac{\lambda_{3r}(\dots),2}{r} & 0 & 0 & 0 & r \end{array} \right\|,$$

$$\|b_1^0\| = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{1x}(\dots),1}{A_1} \ \frac{\lambda_{1r}(\dots),1}{A_1} \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ 1/r \ (\dots),2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{1x}(\dots),2}{r} \ \frac{\lambda_{1r}(\dots),2}{r} \ \frac{r(\dots),1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ 0 \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{3x}(\dots),1}{A_1} \ \frac{\lambda_{3r}(\dots),1}{A_1} \ 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{3x}(\dots),2}{r} \ \frac{\lambda_{3r}(\dots),2}{r} \ 0 \end{array} \right\}; \quad (29)$$

$$\|b_0^L\| = \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{u_{,1}}{A_1} & \frac{v_{,1}}{A_1} & \frac{r\psi_{,1}}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{u_{,2}}{r} & \frac{v_{,2}}{r} & \psi_{,2} \\ 0 & \frac{u_{,2}}{r} & \frac{v_{,2}}{r} & \psi_{,2} & \frac{u_{,1}}{A_1} & \frac{v_{,1}}{A_1} \ \frac{r\psi_{,1}}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & rs_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_1 & s_2 & rs_3 \\ 0_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_6 & s_1 & s_2 & rs_3 & & \\ 0_6 & \frac{u_{,1}}{A_1} & \frac{v_{,1}}{A_1} & \frac{r\psi_{,1}}{A_1} & & \\ 0_6 & \frac{u_{,2}}{r} & \frac{v_{,2}}{r} & \psi_{,2} & & \end{array} \right\},$$

$$\|b_2^L\| = \left\| \begin{array}{cccccc} 0_6 & \frac{s_{1,1}}{A_1} & \frac{s_{2,1}}{A_1} & \frac{rs_{3,1}}{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0_3 \\ 0_6 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_{1,2}}{r} & \frac{s_{2,2}}{r} & s_{3,2} & 0_3 \\ 0_6 & \frac{s_{1,2}}{r} & \frac{s_{2,2}}{r} & s_{3,2} & \frac{s_{1,1}}{A_1} & \frac{s_{2,1}}{A_1} & \frac{rs_{3,1}}{A_1} & 0_3 \\ 0_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_3 \\ 0_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_3 \\ 0_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_3 \end{array} \right\}; \quad (30)$$

0_k — нулевая строка размерности (1 × k);

$$\|G\| = \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{(\dots),1}{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\dots),1}{A_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r(\dots),1}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\dots),2}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(\dots),2}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\dots),2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\dots),1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\dots),1}{A_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r(\dots),1}{A_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\dots),2}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\dots),2}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\dots),2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{array} \right\}; \quad (31)$$

||d|| — матрица упругости [10], устанавливающая связь между напряжениями и деформациями (в данном случае — линейную);

$$\|b_1^L\|^T = \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{s_{1,1}}{A_1} & 0 & \frac{s_{1,2}}{r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s_{2,1}}{A_1} & 0 & \frac{s_{2,2}}{r} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{rs_{3,1}}{A_1} & 0 & s_{3,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_{1,2}}{r} & \frac{s_{1,1}}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_{2,2}}{r} & \frac{s_{2,1}}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{3,2} & \frac{rs_{3,1}}{A_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u_{,1}}{A_1} & 0 & \frac{u_{,2}}{r} & 0 & s_1 & 0 \\ \frac{v_{,1}}{A_1} & 0 & \frac{v_{,2}}{r} & 0 & s_2 & 0 \\ \frac{r\psi_{,1}}{A_1} & 0 & \psi_{,2} & 0 & rs_3 & 0 \\ 0 & \frac{u_{,2}}{r} & \frac{u_{,1}}{A_1} & 0 & 0 & s_1 \\ 0 & \frac{v_{,2}}{r} & \frac{v_{,1}}{A_1} & 0 & 0 & s_2 \\ 0 & \psi_{,2} & \frac{r\psi_{,1}}{A_1} & 0 & 0 & rs_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_{1,1}}{A_1} & \frac{s_{1,2}}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s_{2,1}}{A_1} & \frac{s_{2,2}}{r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{rs_{3,1}}{A_1} & s_{3,2} \end{array} \right\}. \quad (32)$$

3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТОНКОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Вектор перемещения частицы слоя α_3 определяется по (10) и (12) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{R}^{*\alpha} - \mathbf{R}^\alpha = u^\alpha \mathbf{k}_1 + \\ &+ (r + \lambda_{3r} \alpha_3) (\mathbf{k}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha) - \mathbf{k}_2 (\alpha_2)) + \\ &+ v^\alpha \mathbf{k}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha), \end{aligned} \quad (33)$$

а его вариация, с учетом (3) и (4)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \delta u^\alpha \mathbf{k}_1 + \delta v^\alpha \mathbf{k}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha) + \\ &+ \delta \psi^\alpha (r + \lambda_{3r} \alpha_3 + v^\alpha) \mathbf{e}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha). \end{aligned} \quad (34)$$

Векторы скорости и ускорения частицы определяются дифференцированием (33) по времени t

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{,t} &= u_{,t}^\alpha \mathbf{k}_1 + v_{,t}^\alpha \mathbf{k}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha) + \\ &+ \psi_{,t}^\alpha (r + \lambda_{3r} \alpha_3 + v^\alpha) \mathbf{e}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha), \\ \mathbf{u}_{,tt} &= u_{,tt}^\alpha \mathbf{k}_1 + (v_{,tt}^\alpha - (r + \lambda_{3r} \alpha_3 + v^\alpha) \times \\ &\times (\psi_{,t}^\alpha)^2) \mathbf{k}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha) + \\ &+ ((r + \lambda_{3r} \alpha_3 + v^\alpha) \psi_{,tt}^\alpha + 2v_{,t}^\alpha \psi_{,t}^\alpha) \times \\ &\times \mathbf{e}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha). \end{aligned} \quad (35)$$

Для тонких оболочек (17) при «среднем» изгибе (18) можно принять

$$\begin{aligned} r + \lambda_{3r} \alpha_3 + v^\alpha &= \\ &= r \cdot \left(1 + \mathbf{k}_{22} \alpha_3 + \frac{v^\alpha}{r} \right) \approx r, \end{aligned} \quad (36)$$

так что

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} &= \delta u^\alpha \mathbf{k}_1 + \delta v^\alpha \mathbf{k}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha) + \\ &+ r \delta \psi^\alpha \mathbf{e}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha), \\ \mathbf{u}_{,t} &= u_{,t}^\alpha \mathbf{k}_1 + v_{,t}^\alpha \mathbf{k}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha) + \\ &+ r \psi_{,t}^\alpha \mathbf{e}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha), \\ \mathbf{u}_{,tt} &= u_{,tt}^\alpha \mathbf{k}_1 + (v_{,tt}^\alpha - r (\psi_{,t}^\alpha)^2) \times \\ &\times \mathbf{k}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha) + \\ &+ (r \psi_{,tt}^\alpha + 2v_{,t}^\alpha \psi_{,t}^\alpha) \mathbf{e}_2 (\alpha_2 + \psi^\alpha). \end{aligned} \quad (37)$$

Согласно последней формуле (37) радиальная компонента вектора ускорения частицы слоя α_3 состоит из линейной и центростремительной, а окружная — тангенциальной и Кориолиса составляющих.

При линейной аппроксимации составляющих перемещения по толщине (20) уравнение

движения оболочки в приращениях [11] записывается в виде

$$\begin{aligned} &\int_{a_e} \delta [v^e] \|m\| \Delta \{v_{,tt}^e\} da + \\ &+ \int_{a_e} \delta [v^e] \|m_1\| \Delta \{v_{,t}^e\} da + \\ &+ \int_{a_e} \delta [v^e] \|G\|^T \|M_\sigma\| \|G\| \Delta \{v^e\} da + \\ &+ \int_{\tau_e} \delta [v^e] \|b\|^T \|d\| \|b\| \Delta \{v^e\} d\tau = \delta \Delta A. \end{aligned} \quad (38)$$

В уравнении (38) в первых трех слагаемых в левой части интегрирование производится по площади срединной поверхности a_e , в последней — по объему τ_e , а также введены обозначения: $\delta \Delta A$ — приращение работы внешних сил на вариациях перемещений; $\Delta \{v^e\}$, $\Delta \{v_{,t}^e\}$, $\Delta \{v_{,tt}^e\}$ — приращения вектора перемещений, его скорость и ускорение

$$\{v^e\}^T = [v^e] = \left\| \begin{matrix} u & v & \psi & s_1 & s_2 & s_3 \end{matrix} \right\|; \quad (39)$$

$\|d\|$ — матрица упругости [10], устанавливающая связь между напряжениями и деформациями (в данном случае — линейную);

$$\|m\| = \left\| \begin{matrix} \rho h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \rho h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \frac{h^3}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho \frac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r^2 \rho \frac{h^3}{12} \end{matrix} \right\|; \quad (40)$$

$$\|m_1\| = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho r h \psi_{,t} \\ 0 & 2\rho r h \psi_{,t} & 2\rho r h v_{,t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho r \frac{h^3}{12} s_{3,t} \\ 0 & 2\rho r \frac{h^3}{12} s_{3,t} & 2\rho r \frac{h^3}{12} s_{2,t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho r \frac{h^3}{12} s_{3,t} \\ 0 & 2\rho r \frac{h^3}{12} s_{3,t} & 2\rho r \frac{h^3}{12} s_{2,t} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\rho r \frac{h^3}{12} \psi_{,t} \\ 0 & 2\rho r \frac{h^3}{12} \psi_{,t} & 2\rho r \frac{h^3}{12} v_{,t} \end{matrix} \right\|; \quad (41)$$

$$\|M_\sigma\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} \left(h\tilde{\sigma}_{11}^{(0)} + \frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{11}^{(0)} \right) I_3 & & \\ \left(h\tilde{\sigma}_{12}^{(0)} + \frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{12}^{(0)} \right) I_3 & \left(h\sigma_{22}^{(0)} + \frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{22}^{(0)} \right) I_3 & \\ \frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{11}^{(1)} I_3 & \frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{12}^{(1)} I_3 & \left(\frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{11}^{(0)} + \frac{h^5}{80}\tilde{\sigma}_{11}^{(2)} \right) I_3 \\ \frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{12}^{(1)} I_3 & \frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{22}^{(1)} I_3 & \left(\frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{12}^{(0)} + \frac{h^5}{80}\tilde{\sigma}_{12}^{(2)} \right) I_3 \\ h\tilde{\sigma}_{13}^{(0)} I_3 & h\tilde{\sigma}_{23}^{(0)} I_3 & \left(\frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{22}^{(0)} + \frac{h^5}{80}\tilde{\sigma}_{22}^{(2)} \right) I_3 \\ & & \frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{13}^{(1)} I_3 \\ & & \frac{h^3}{12}\tilde{\sigma}_{23}^{(1)} I_3 \\ & & h\tilde{\sigma}_{33}^{(0)} I_3 \end{array} \right\| \quad \text{симметрично} \quad (42)$$

суть несимметричная матрица, учитывающая инерцию вращения: обычно при решении динамических задач теории тонких оболочек ею пренебрегают.

4. ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Существует широкий круг задач теории оболочек, когда напряженно-деформированное состояние (НДС) можно разделить на основное и дополнительное. Причем компоненты НДС как основного, так и дополнительного состояния можно считать малыми, полагая для них справедливыми соотношения линейной теории оболочек. Сюда в первую очередь относятся задачи начальной устойчивости и колебаний предварительно напряженных (например, вращающихся вокруг собственной оси) оболочек вращения.

Если ограничиться классом осесимметричных оболочек, у которых геометрия и физико-механические характеристики материала, параметры температурного поля являются функциями только одной координаты — α_1 (по образующей), основные уравнения удастся значительно упростить. Кроме того, предполагается, что основное НДС тоже осесимметричное, с не зависящими от времени компонентами (при вращении вокруг собственной оси с постоянной угловой скоростью ω), так что в этом случае

$$\begin{aligned} \psi &= 0, \quad s_3 = 0, \\ \sigma_{12}^{(k)} &= 0, \quad k = 0, 1, 2; \\ \sigma_{23}^{(k)} &= 0, \quad k = 0, 1. \end{aligned} \quad (43)$$

Уравнение движения конечного элемента оболочки в ортогональных координатах α_1, α_2 и α_3 , если компоненты НДС основного состояния трактовать как накопленные, а дополни-

тельного (снабжены значком Δ) — как приращения, по-прежнему будет иметь вид (38).

В замкнутых в окружном направлении оболочках вращения внешняя нагрузка, перемещения и напряжения дополнительного состояния являются периодическими функциями окружной координаты α_2 и представимы рядами Фурье типа:

- симметричные (относительно плоскости $\alpha_2 = 0$) компоненты $u, v, s_1, s_2, \sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, k = 0, 1, 2; \sigma_{33}^{(0)}, \sigma_{13}^{(k)}, k = 0, 1$

$$f = f^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f^{(n)} \cos n\alpha_2 + f^{(n)} \sin n\alpha_2 \right); \quad (44)$$

- кососимметричные $\psi, s_3, \sigma_{12}^{(k)}, k = 0, 1, 2; \sigma_{23}^{(k)}, k = 0, 1$

$$f = f^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-f^{(n)} \sin n\alpha_2 + f^{(n)} \cos n\alpha_2 \right). \quad (45)$$

В предположениях (43), а также малости перемещений дополнительного состояния и их производных, подставляя ряды (44) и (45) в уравнение движения (38) и интегрируя по толщине от $-h/2$ до $+h/2$, по окружной координате от 0 до 2π , для каждой гармоники « n » можно записать:

$$\int_{l_e} \delta [v_{(n)}^e] \|m\| \Delta \{v_{(n),tt}^e\} r A_1 d\alpha_1 + \int_{l_e} \delta [v_{(n)}^e] \|G\|^T \|M_{\sigma(n)}\| \|G\| \Delta \{v_{(n)}^e\} r A_1 d\alpha_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{l_e} \delta [v_{(n)}^e] \left(\|b_{0(n)}^0\|^T \|d\| \|b_{0(n)}^0\| h + \right. \\
& \quad \left. + \|b_{1(n)}^0\|^T \|d\| \|b_{1(n)}^0\| \frac{h^3}{12} \right) \times \\
& \quad \times \Delta \{v_{(n)}^e\} r A_1 d \alpha_1 = \delta \Delta A_{(n)}. \quad (46)
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: l_e — длина образующей срединной поверхности оболочки;

$$[v_{(n)}^e] = \|u_{(n)} v_{(n)} \psi_{(n)} s_{1(n)} s_{2(n)} s_{3(n)}\|; \quad (47)$$

матрица масс $\|m\|$ по-прежнему определяется (40);

$$\|G\| = \begin{vmatrix} \frac{d}{A_1 d \alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{A_1 d \alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{rd}{A_1 d \alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d}{A_1 d \alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{d}{A_1 d \alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{rd}{A_1 d \alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned}
& \|M_{\sigma(n)}\| = \\
& = \begin{vmatrix} \sigma_{11}^0 h I_3 & 0_3 & \sigma_{11}^1 \frac{h^3}{12} I_3 & \sigma_{13}^0 r h I_3 \\ n^2 \sigma_{22}^0 h I_3 & 0_3 & n^2 \sigma_{22}^1 \frac{h^3}{12} I_3 & n^2 \sigma_{22}^1 \frac{h^3}{12} I_3 \\ \text{симметрично} & \sigma_{11}^1 \frac{h^3}{12} I_3 & \sigma_{13}^1 r \frac{h^3}{12} I_3 & \left(n^2 \sigma_{22}^0 \frac{h^3}{12} + r^2 \sigma_{33}^0 h \right) I_3 \end{vmatrix}, \quad (49)
\end{aligned}$$

I_3 — единичная матрица порядка 3×3 , причем при выводе (49) предположено, что напряжения основного состояния определены решением линейной задачи;

$$\|b_{0(n)}^0\| = \begin{vmatrix} \lambda_{1x} \frac{d}{A_1 d \alpha_1} & \lambda_{1r} \frac{d}{A_1 d \alpha_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & -n & 0 & 0 & 0 \\ n \frac{\lambda_{1x}}{r} & n \frac{\lambda_{1r}}{r} & \frac{rd}{A_1 d \alpha_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{3x} & \lambda_{3r} & 0 \\ \lambda_{3x} \frac{d}{A_1 d \alpha_1} & \lambda_{3r} \frac{d}{A_1 d \alpha_1} & 0 & \lambda_{1x} & \lambda_{1r} & 0 \\ n \frac{\lambda_{3x}}{r} & n \frac{\lambda_{3r}}{r} & 0 & 0 & 0 & r \end{vmatrix}, \quad (50)$$

$$\|b_{1(n)}^0\| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{1x} d}{A_1 d \alpha_1} & \frac{\lambda_{1r} d}{A_1 d \alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & -n \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n \lambda_{1x}}{r} & \frac{n \lambda_{1r}}{r} & \frac{rd}{A_1 d \alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_{3x} d}{A_1 d \alpha_1} & \frac{\lambda_{3r} d}{A_1 d \alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n \lambda_{3x}}{r} & \frac{n \lambda_{3r}}{r} & 0 \end{vmatrix}; \quad (51)$$

коэффициенты разложения в ряд Фурье приращения работы внешних сил на виртуальных перемещениях $\delta \Delta A_{(n)}$ для конкретных случаев нагружения оболочки определяются подобно в [12].

При решении задач теории оболочек методом конечных элементов (МКЭ) [10, 13] координаты, амплитудные значения перемещений точек срединной поверхности $u_{(n)}$, $v_{(n)}$, $\psi_{(n)}$ и их первых производных по толщине оболочки $s_{1(n)}$, $s_{2(n)}$, $s_{3(n)}$ в пределах конечного элемента (отрезка образующей срединной поверхности) аппроксимируются функциями формы

$$\begin{aligned}
x &= \sum_k \varphi_k x_k, & r &= \sum_k \varphi_k r_k, \\
u_{(n)} &= \sum_k \varphi_k u_{(n)}^k, & v_{(n)} &= \sum_k \varphi_k v_{(n)}^k, \\
\psi_{(n)} &= \sum_k \varphi_k \psi_{(n)}^k, & s_{1(n)} &= \sum_k \varphi_k s_{1(n)}^k, \\
s_{2(n)} &= \sum_k \varphi_k s_{2(n)}^k, & s_{3(n)} &= \sum_k \varphi_k s_{3(n)}^k, \quad (52)
\end{aligned}$$

где x_k , r_k , $u_{(n)}^k$, $v_{(n)}^k$, $\psi_{(n)}^k$ и $s_{1(n)}^k$, $s_{2(n)}^k$, $s_{3(n)}^k$ — соответственно значения этих функций в узле k ; $k = 1, 2, \dots, N$, N — число узлов элемента.

Вид функций формы $\varphi_k = \varphi_k(\xi)$ (ξ — местная координата точки в элементе), а также их число, равное числу узлов элемента, зависят от типа выбранного для аппроксимации геометрии и полей перемещений конечного элемента. Пока на тип элемента никаких ограничений не накладывается.

Вводя обозначение для вектора перемещений узлов элемента

$$[v_{(n)}^e] = \|u_{(n)}^1 v_{(n)}^1 \psi_{(n)}^1 s_{1(n)}^1 s_{2(n)}^1 s_{3(n)}^1 \dots \\ \dots u_{(n)}^N v_{(n)}^N \psi_{(n)}^N s_{1(n)}^N s_{2(n)}^N s_{3(n)}^N\|, \quad (53)$$

последние шесть формул (53) можно записать в матричной форме:

$$\{v_{(n)}\} = \|c\| \{v_{(n)}^e\}, \quad (54)$$

$$\|c\| = \|\varphi_1 I_6 \varphi_2 I_6 \dots \varphi_N I_6\|. \quad (55)$$

Теперь, подставляя (52) в уравнение движения в приращениях (46), с учетом (54) его можно записать в стандартной для МКЭ форме

$$\|M^e\| \Delta \{v_{(n),tt}^e\} + (\|k_\sigma^e\| + \|K\|) \Delta \{v_{(n)}^e\} = \Delta \{P_{(n)}^e\}. \quad (56)$$

В (56) введены следующие обозначения для матриц масс, начальных напряжений и приращения жесткостей конечного элемента оболочки:

$$\begin{aligned} \|M^e\| &= \int_{l_e} \|c\|^T \|m\| \|c\| r A_1 d\alpha_1, \\ \|k_\sigma^e\| &= \int_{l_e} \|c\|^T \|G\|^T \|M_{\sigma(n)}\| \|G\| \|c\| r A_1 d\alpha, \\ \|K\| &= \int_{l_e} \|c\|^T \left(\|b_{0(n)}^0\|^T \|d\| \|b_{0(n)}^0\| + \right. \\ &\quad \left. + \|b_{1(n)}^0\|^T \|d\| \|b_{1(n)}^0\| \frac{h^3}{12} \right) \|c\| r A_1 d\alpha_1. \end{aligned} \quad (57)$$

Соответствующее уравнение для всей оболочки получают обычным для МКЭ суммированием [10].

В качестве тестовой была решена та же задача об антисимметричной деформации круглого диска с центральным отверстием r_0 , с радиусом обода r_l , постоянной толщины h в поле центробежных сил [14, 15]. Материал диска — сталь с модулем упругости $E = 200$ ГПа, коэффициентом Пуассона 0,3 и плотностью $\rho = 7,8$ мг/м³. Диск по внутреннему контуру опирается на неподвижный шарнир. На рис. 3 приводится зависимость $w_{\tau \max}/w_{0 \max}$ (отношения максимального прогиба обода, вращающегося вокруг собственной оси с угловой скоростью ω , к той же величине при $\omega = 0$) от «приведенной» окружной скорости обода $\tau = (V_{\max}/a)(r_l/h)$ при $r_l/r_0 = 2$. Здесь $V_{\max} = \omega r_l$ — окружная скорость обода, $a = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в материале.

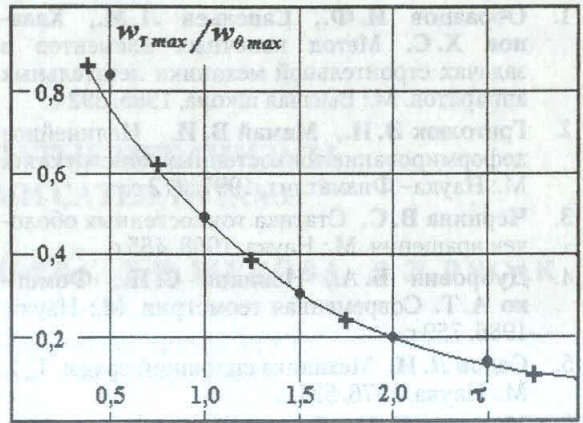


Рис. 3

Как видно из рис. 3, в широком диапазоне изменения толщины результаты, полученные решением трехмерной задачи [14] (на рисунке показаны жирными точками), практически совпадают с конечноэлементным решением, основанным на теории «среднего» изгиба тонких оболочек (результаты данной статьи показаны крестиками). Здесь же для сравнения приводится решение [14], полученное несколько иным методом (на рисунке — сплошная линия).

ВЫВОДЫ

1. Предложен конечный элемент для решения нелинейных задач статики и динамики тонких оболочек вращения с произвольным очертанием образующей.

2. В отличие от известных, разработанный конечный элемент оболочки вращения не требует вычисления производных аппроксимируемых геометрических параметров оболочки порядка выше первого, что позволяет избежать влияния на решение соответствующих начальных несовершенств.

3. Для случая «среднего» изгиба (большие перемещения и малые повороты) приводятся упрощенные соотношения.

4. Получены уравнения для решения линейных задач начальной устойчивости, статического нагружения и колебаний предварительно напряженных оболочек. На тестовом примере решение с помощью предложенного конечного элемента сравнивается с полученным другими методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Образцов И. Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х. С.** Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высшая школа, 1985. 392 с.
2. **Григолюк Э. И., Мамай В. И.** Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука-Физматлит, 1997. 272 с.
3. **Чернина В. С.** Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 455 с.
4. **Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.** Современная геометрия. М.: Наука, 1986. 759 с.
5. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
6. **Муштари Х. М., Галимов К. З.** Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
7. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
8. **Новожилов В. В.** Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
9. **Власов В. З.** Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.-Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
10. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
11. **Жернаков В. С., Газизов Х. Ш.** Об одном варианте вывода уравнений движения в нелинейной механике деформируемых тел // Изв. вузов. Машиностроение, 1997. № 1-3. С. 3-7.
12. **Оден Дж.** Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976. 464 с.
13. **Галлагер Р.** Метод конечных элементов. М.: Мир, 1984. 428 с.
14. **Газизов Х. Ш., Ляшевский Н. Ф.** Антисимметричная деформация дисков турбомашин // Изв. вузов. Машиностроение, 1989. № 11. С. 78-81.
15. **Жернаков В. С., Газизов Х. Ш., Терегулов Р. И.** Антисимметричная деформация

вращающихся дисков // Изв. вузов. Машиностроение, 1998. № 7-9. С. 40-45.

ОБ АВТОРАХ

Жернаков Владимир Сергеевич, профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, проректор по научной работе УГАТУ. Дипл. инж.-механик по авиационным двигателям (УАИ, 1967), д-р техн. наук по тепловым двигателям ЛА (УГАТУ, 1992). Исследования в области механики деформируемого твердого тела.



Газизов Хатиб Шарифзянович, доцент, докторант кафедры сопротивления материалов УГАТУ. Дипл. инж.-механик по авиационным двигателям (УАИ, 1971), канд. техн. наук по прочности и тепловым двигателям ЛА (КАИ, 1980). Исследования в области численных методов механики деформируемого твердого тела.



Терегулов Рафик Исмагилович, ст. науч. сотр. ОНИЛ РТИИ УГАТУ. Дипл. инж.-механик по двигателям внутреннего сгорания (УАИ, 1975). Исследования в области прочности и динамики деталей авиационных двигателей.

