

## ПРОБЛЕМЫ И КОНЦЕПЦИИ

УДК 629.7.002

А. С. ГИШВАРОВ

**ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ  
РЕСУРСНЫХ ИСПЫТАНИЙ  
ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК  
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ  
МНОГОВАРИАНТНОГО ПРИМЕНЕНИЯ**

Рассмотрены теоретические основы оптимизации совмещенных ресурсных испытаний энергетических установок летательных аппаратов, надежность которых характеризуется одновременно совокупностью элементов узлов и характеристик расходования ресурса, а эксплуатация — многовариантностью применения, обусловленной различием объектов, в состав которых входит исследуемая установка, а также различием в режимах и климатических зонах эксплуатации. Комплексная оптимизация параметров совмещенных испытаний проводится на основе введенных автором критериев эффективности, характеризующих уровень гарантированной проверки надежности системы, дифференцированную проверку в совмещенных испытаниях эксплуатационных вариантов применения, а также объем и длительность испытаний. *Энергетическая установка многовариантного применения; надежность и ресурс; испытания; эффективность; оптимизация; совмещение; объем, режимы и длительность испытаний*

**Гишваров  
Анас Саидович**

профессор кафедры авиационных двигателей УГАТУ. Дипл. инженер по авиационным двигателям (УАИ, 1973), д-р техн. наук по тепловым двигателям ЛА (УГАТУ, 1993). Исследования в области надежности, ресурса и испытаний технических систем.

**ВВЕДЕНИЕ**

Современный период развития авиационной техники характеризуется высокими требованиями к ее надежности, сжатыми сроками создания и внедрения в эксплуатацию.

В общем «жизненном цикле» технических систем, включающем в себя проектирование, доводку, серийное производство, эксплуатацию и ремонт, испытаниям отводится особая роль. Во многих случаях оказывается, что подавляющая часть затрат на обеспечение жизненного цикла приходится на испытания.

Обоснование ресурсных испытаний таких систем, как энергетические установки летательных аппаратов, является чрезвычайно сложной проблемой, поскольку их надежность и ресурс

определяются одновременно совокупностью элементов узлов и характеристик расходования ресурса.

В этом плане особо актуальным является решение задач по созданию и внедрению методов ускоренных эквивалентных ресурсных испытаний, обеспечивающих получение необходимой информации о надежности и ресурсе изделий в более короткие сроки. Основные подходы к решению данной проблемы были рассмотрены автором в «Вестнике УГАТУ», № 1 (3), 2001.

Целью данной статьи является решение задачи по обоснованию ресурсных испытаний энергетических установок летательных аппаратов с учетом еще одного важного фактора, в существенной мере ограничивающего эффективность ресурсных испытаний, — многовариантности применения изделий в эксплуатации, обусловленной как различием объектов, на которые они устанавливаются, так и различием в климатических зонах и режимах эксплуатации (рис. 1).

Известно также, что двигатель TF34 устанавливается на штурмовике А-10 и противолодочном самолете S-3А, а двигатель T53-L-13 устанавливается на двух типах вертолетов и эксплуатируется в ФРГ на железнодорожном транспорте и т. д. Очевидно, что фактор многовариантности применения существенно усложняет обоснованный выбор объема, режимов и длительности совмещенных испытаний, которые должны обеспечивать гарантированную проверку надежности изделия при минимальных временных и материальных затратах.

Анализ состояния проблемы совмещенных испытаний технических изделий многовариантного применения показал, что существующие подходы к разработке программ совмещенных ресурсных испытаний [6, 13–22], обладая своими преимуществами и недостатками, не позволяют в полной мере обоснованно определять параметры испытаний изделий многовариантного применения и актуальным является разработка научно обоснованного метода выбора оптимальных значений объема, режимов и длительности совмещенных ресурсных испытаний, которые, с одной стороны, сохраняли бы все преимущества ранее рассмотренного в работе [6] обобщенного метода выбора режимов ускоренных эквивалентных испытаний, с другой стороны, обеспечивали бы гарантированную проверку надежности изделия по всем эксплуатационным вариантам применения. При этом очевидно, что материальные и временные затраты на разработку и проведение таких испытаний должны быть по возможности минимальными.

### 1. ОСНОВНЫЕ КРИТЕРИИ ЭФФЕКТИВНОСТИ СОВМЕЩЕННЫХ РЕСУРСНЫХ ИСПЫТАНИЙ

*Если не высказаны противоположные мнения,  
то не из чего выбирать наилучшее.*

*Геродот*

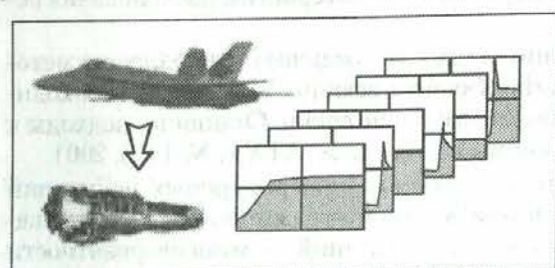
Разработчику программ ресурсных испытаний чрезвычайно редко удается оценить качество испытаний одним-единственным показателем. Чаще всего существует определенное множество таких показателей (критериев), каждый из которых характеризует тот или иной аспект испытаний. Применительно к совмещенным ресурсным испытаниям такими критериями являются [5, 7–9]:

- критерий гарантированной проверки надежности изделия;
- критерий дифференцированной проверки в испытаниях эксплуатационных вариантов применения;
- объем и длительность испытаний.

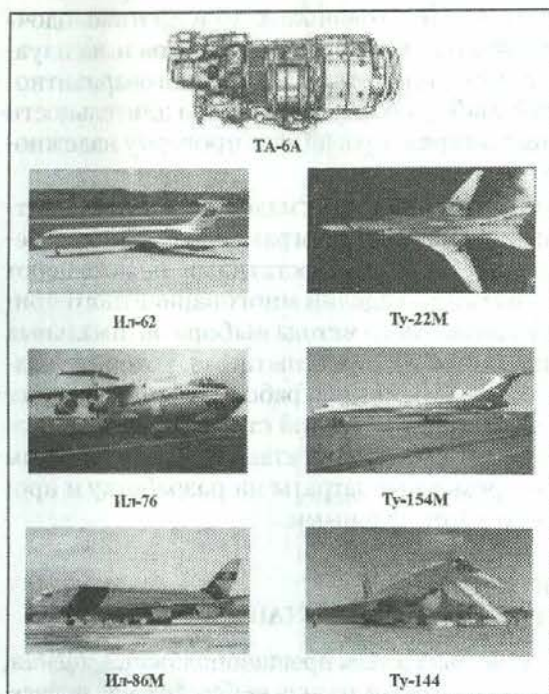
#### **Критерий гарантированной проверки надежности изделия**

Очевидно, что гарантированная проверка надежности изделия возможна при подобии эксплуатационного и испытательного циклов нагружения.

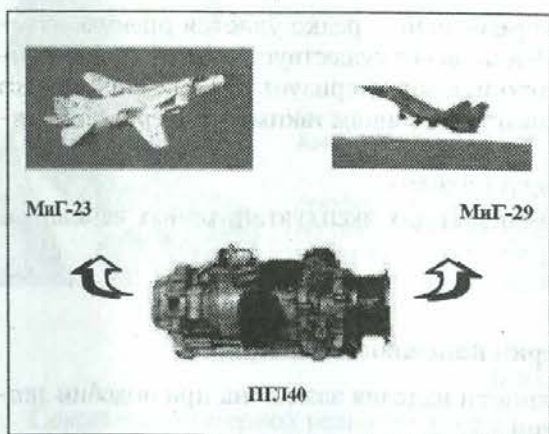
Подобие обеспечивается при тождественности уравнений, описывающих сравниваемые процессы, и равенстве сходственных критериев подобия. Следствием  $\pi$ -теоремы подобия является то [5], что определяемые критерии подобия представляют собой однозначные функции определяющих. Применительно к процессам расходования ресурса технических изделий (летательных аппаратов, двигателей, агрегатов и др.) определяемыми параметрами являются обобщенные запасы прочности  $n_{\sigma}$  и долговечности  $n_{\tau}$  (повреждаемости  $\Pi$ ), а определяющими — параметры, характеризующие влияние производственно-технологических факторов на качество



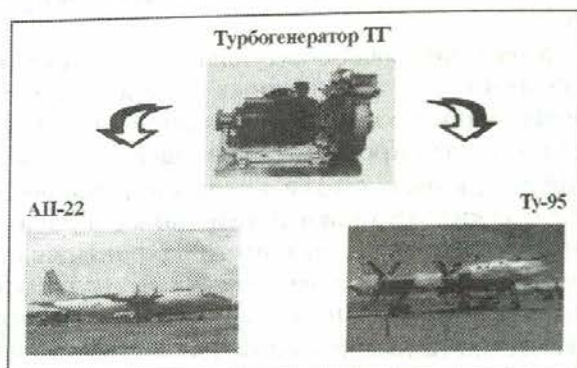
а



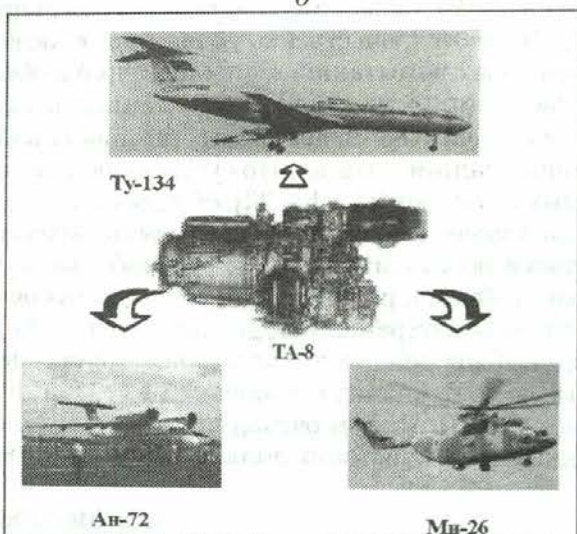
в



д



б



з



е

Рис. 1. Примеры многовариантности применения энергетических установок летательных аппаратов в эксплуатации: а — маршевый ГТД РД33, эксплуатируемый в шести вариантах применения; б — турбогенератор ТГ; в — ВГТД ТА-6А; з — ВГТД ТА-8; д — лопаточный привод генератора ПЛ140; е — гидроприводной насос ГТН

изделия  $P_0 = [p_{01}, \dots, p_{0\nu}]^T \in G_P$ , режим  $R(\tau) = [r_1(\tau), \dots, r_s(\tau)]^T \in G_R$  и длительность нагружения  $\tau$ :

$$\Pi_{\exists} = \varphi[P_{0\exists}, R_{\exists}(\tau), \tau_{\exists}]; \quad \Pi_{\Pi} = \varphi[P_{0\Pi}, R_{\Pi}(\tau), \tau_{\Pi}], \quad (1)$$

где  $G_P$  и  $G_R$  — области реализации векторов  $P_0$  и  $R(\tau)$ .

Поскольку в областях исходного состояния  $G_P$  и нагружения  $G_R$ , при известной функции связи, зависимости (1) полностью тождественны, то всегда можно выбрать значения  $P_{0\Pi} \in G_P$ ,  $R_{\Pi}(\tau) \in G_R$  и  $\tau_{\Pi}$ , при которых будет обеспечиваться подобие эксплуатационного и испытательного циклов нагружения:

$$\begin{aligned} \varphi[P_{0\Pi}, R_{\Pi}(\tau), \tau_{\Pi}] &= \varphi[P_{0\exists}, R_{\exists}(\tau), \tau_{\exists}] \\ P_{0\Pi} &= C_p P_{0\exists} = [C_{p1} p_{0\exists 1}, \dots, C_{p\nu} p_{0\exists \nu}]^T; \\ R_{\Pi}(\tau) &= C_r R_{\exists}(\tau) = [C_{r1} r_{\exists 1}(\tau), \dots, C_{rs} r_{\exists s}(\tau)]^T; \\ \tau_{\Pi} &= C_{\tau} \tau_{\exists}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $C_{\tau}$  — множитель подобного преобразования длительности при переходе от одного вида испытаний к другому ( $C_{\tau} = K_y^{-1}$ ;  $K_y = \tau_{\exists}/\tau_{\Pi}$  — коэффициент ускорения испытаний [5]).

Различные сочетания составляющих векторов  $P_0 = [p_{01}, \dots, p_{0\nu}]^T \in G_P$  и  $R(\tau) = [r_1(\tau), \dots, r_s(\tau)]^T \in G_R$ , удовлетворяющие условию подобия стендовых и эксплуатационных испытаний, образуют область эквивалентных испытаний, включая при  $\tau_{\Pi} < \tau_{\exists}$  область ускоренных эквивалентных испытаний [4–6].

Для изделия, устанавливаемого на различные объекты и эксплуатируемого в различных условиях, ввиду неодинаковой повреждаемости элементов, обеспечить в одних совмещенных испытаниях эквивалентность, т. е. равенство мер вырабатываемых ресурсов одновременно по всем  $N_{\exists}$  эксплуатационным вариантам применения, невозможно, т. е. в данном случае принцип эквивалентности испытаний, основанный на равенстве повреждаемости изделия в эксплуатации и стендовых испытаниях [4–6], невыполним и требуется иной подход к организации испытаний, которые обеспечивали бы гарантированную проверку надежности изделия одновременно по всем эксплуатационным вариантам применения. Очевидно, что такая проверка возможна при условии:

$$\Pi_{\Pi}[P_{0\Pi}, R_{\Pi}(\tau), \tau_{\Pi}] = \max_l \Pi_{\exists l}[P_{0\exists}, R_{\exists}(\tau), \tau_{\exists}]; \quad l = \overline{1, N_{\exists}}, \quad (3)$$

поскольку в противном случае всегда найдется вариант « $l$ », для которого  $\Pi_{\Pi} = \Pi_{\exists l}$ .

Согласно (3) гарантированная проверка надежности элемента изделия обеспечивается при подобии совмещенного испытательного и максимального нагруженного эксплуатационного циклов нагружения:

$$\begin{aligned} \varphi[P_{0\Pi}, R_{\Pi}(\tau), \tau_{\Pi}] &= \max_l \varphi[P_{0\exists}, R_{\exists}(\tau), \tau_{\exists}]; \\ P_{0\Pi} &= C_{pl} P_{0\exists, l} = [C_{p1, \exists} p_{0\exists 1, l}, \dots, C_{p\nu, \exists} p_{0\exists \nu, l}]^T; \\ R_{\Pi}(\tau) &= C_{r\exists} R_{\exists l}(\tau) = [C_{r1, l} r_{\exists 1, l}(\tau), \dots, C_{rs, l} r_{\exists s, l}(\tau)]^T; \\ \tau_{\Pi} &= C_{\tau, l} \tau_{\exists, l}; \quad l = \overline{1, N_{\exists}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Если при  $N_{\exists} = 1$  выполнение условия  $\Pi_{\Pi} = \Pi_{\exists}$  в теории эквивалентных испытаний соответствует принципу эквивалентности, то при  $N_{\exists} > 1$  условие  $\Pi_{\Pi} = \max_l \Pi_{\exists l}$  — принципу гарантированной проверки надежности изделия многовариантного применения (т. е. в частном случае при  $l = 1 \wedge \Pi_{\Pi} = \Pi_{\exists}$ , принцип гарантированной проверки надежности вырождается в принцип эквивалентности).

При отсутствии возможности строгого выполнения условия (3) выбор параметров совмещенных испытаний проводится минимизацией «невязок» между  $\Pi_{\Pi}$  и  $\max_l \Pi_{\exists l}$  по квадратичной целевой функции вида [5]:

$$\Phi_1 = \min \left( \Pi_{\Pi}[P_{0\Pi}, R_{\Pi}(\tau), \tau_{\Pi}] - \max_l \Pi_{\exists l}[P_{0\exists}, R_{\exists}(\tau), \tau_{\exists}] \right)^2 = \min \delta \Pi^2[P_0, R(\tau), \tau]; \quad (5)$$

$$P_{0l} \in G_{Pl}; \quad R_{\Pi}(\tau) \in G_{Rl}; \quad \delta \Pi \leq \delta \Pi_{\text{доп}}^{\alpha}$$

где  $\delta\Pi_{\text{доп}}^{\alpha}$  — максимально допустимое рассогласование между значениями повреждаемости  $\Pi_{\text{и}}[P_{0\text{и}}, R_{\text{и}}(\tau), \tau_{\text{и}}]$  и повреждаемостью  $\max_l \Pi_{\text{эл}}[P_{0\text{эл}}, R_{\text{эл}}(\tau), \tau_{\text{эл}}]$ , в пределах которого с вероятностью  $\alpha$  выполняется условие гарантированной проверки надежности изделия.

Выбор параметров испытаний по целевой функции (5) предполагает, что значения  $\Pi_{\text{и}}$  и  $\max_l \Pi_{\text{эл}}$  определены по математическим ожиданиям параметров  $P_0$  и  $R(\tau)$ . Однако, ввиду естественного рассеяния параметров окружающей среды, качества используемых материалов, уровня культуры производства и других факторов, повреждаемость элементов изделия является величиной случайной со своим законом распределения, поэтому достоверность проверки надежности изделия в испытаниях зависит от того, какое изделие из предъявленной партии (программы выпуска) попадет на испытания. В этом случае проводится вероятностная оценка параметров испытаний. При проведении испытаний возможны два экстремальных случая.

Первый случай:

– выбранное на испытания изделие является по прочностным характеристикам «хуже» среднего в партии;

– испытания изделия успешны и в эксплуатацию попадают изделия, имеющие в среднем высокие прочностные характеристики;

– эксплуатация изделий протекает по «слабым» в смысле повреждаемости вариантам применения.

Второй случай:

– выбранное на испытания изделие является по прочностным характеристикам «лучше» среднего в партии;

– испытания изделий успешны и в эксплуатацию попадают изделия, имеющие в среднем низкие прочностные характеристики;

– эксплуатация изделий протекает по самым нагруженным вариантам применения.

Отсюда следует, что условие (3) требует уточнения.

На рис. 2 показано распределение повреждаемости элемента изделия в наиболее нагруженном эксплуатационном варианте  $f(\max_l \tilde{\Pi}_{\text{эл}})$  и в испытаниях  $f(\tilde{\Pi}_{\text{и}})$ , откуда видно, что при

$$\tilde{\Pi}_{\text{и}}[\tilde{P}_{0\text{и}}, \tilde{R}_{\text{и}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{и}}] < \max_l \tilde{\Pi}_{\text{эл}}[\tilde{P}_{0\text{эл}}, \tilde{R}_{\text{эл}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{эл}}]$$

существует риск попадания в эксплуатацию ненадежных изделий с вероятностью

$$P = \text{Вер} \left\{ \max_l \tilde{\Pi}_{\text{эл}}[\tilde{P}_{0\text{эл}}, \tilde{R}_{\text{эл}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{эл}}] > \tilde{\Pi}_{\text{и}}[\tilde{P}_{0\text{и}}, \tilde{R}_{\text{и}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{и}}] \right\} = \\ = \int_0^{\Pi_{\text{пр}}} f(\tilde{\Pi}_{\text{и}}) d\tilde{\Pi}_{\text{и}} + \int_{\Pi_{\text{пр}}}^{\infty} f(\max_l \tilde{\Pi}_{\text{эл}}) d(\max_l \tilde{\Pi}_{\text{эл}}). \quad (6)$$

Из рис. 2 видно, что уменьшение риска возможно проведением испытаний в интервале, ограниченном повреждаемостями:

–  $\max_{P,R} \max_l \tilde{\Pi}_{\text{эл}}[\tilde{P}_{0\text{эл}}, \tilde{R}_{\text{эл}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{эл}}]$  (случай, когда изделие изготовлено «худшим» в пределах технических требований и эксплуатируется в наиболее тяжелых условиях);

–  $\min_{P,R} \tilde{\Pi}_{\text{и}}[\tilde{P}_{0\text{и}}, \tilde{R}_{\text{и}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{и}}]$  (случай, когда изделие изготовлено «лучшим» в пределах технических требований и испытывается в наиболее благоприятных, в смысле повреждаемости, условиях).

Таким образом, в отличие от (5), целевая функция при вероятностной оценке параметров испытаний примет вид

$$\tilde{\Phi}_1 = \max_{P,R} \text{Вер} \left\{ \max_l \max \tilde{\Pi}_{\text{эл}}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0\text{эл}}, \tilde{R}_{\text{эл}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{эл}}] \leq \right. \\ \left. \leq \min_{P,R} \tilde{\Pi}_{\text{и}}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0\text{и}}, \tilde{R}_{\text{и}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{и}}] \leq \max_{P,R} \tilde{\Pi}_{\text{и}}^{(\mu)}[\tilde{P}_{0\text{и}}, \tilde{R}_{\text{и}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{и}}] < a \right\}, \quad (7)$$

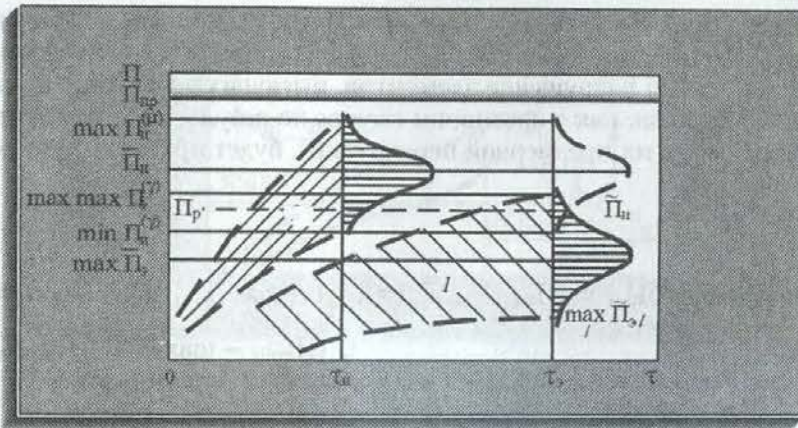


Рис. 2. Графическая иллюстрация принципа гарантированной проверки надежности элемента изделия при вероятностной оценке: 1 – накопление повреждаемости в наиболее нагруженном эксплуатационном варианте; 2 – накопление повреждаемости в совмещенных испытаниях

где  $\min_{P,R} \tilde{\Pi}_i^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0и}, \tilde{R}_и(\tau), \tilde{\tau}_и]$ ,  $\max_{P,R} \max_l \tilde{\Pi}_{эл}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0э}, \tilde{R}_э(\tau), \tilde{\tau}_э]$  – соответственно минимальное и максимальное значения повреждаемостей  $\tilde{\Pi}_и[\tilde{P}_{0и}, \tilde{R}_и(\tau), \tilde{\tau}_и]$  и  $\max_l \tilde{\Pi}_{эл}[\tilde{P}_{0э}, \tilde{R}_э(\tau), \tilde{\tau}_э]$ , определенные с доверительной вероятностью  $\gamma$  ( $\gamma = 0 \dots 1$ );  $\max_{P,R} \tilde{\Pi}_и^{(\mu)}[\tilde{P}_{0и}, \tilde{R}_и(\tau), \tilde{\tau}_и]$  – максимальное значение повреждаемости  $\tilde{\Pi}_и[\tilde{P}_{0и}, \tilde{R}_и(\tau), \tilde{\tau}_и]$ , определенное с доверительной вероятностью  $\mu$  ( $\mu = 0 \dots 1$ ).

Реализация условия (7) позволяет обеспечивать гарантированную проверку надежности элемента изделия с вероятностью

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{Вер}\left\{ \tilde{\Pi}_и[\tilde{P}_{0и}, \tilde{R}_и(\tau), \tilde{\tau}_и] < \Pi_{пр} \right\} \cdot \text{Вер}\left\{ \max_l \tilde{\Pi}_{эл}[\tilde{P}_{0э}, \tilde{R}_э(\tau), \tilde{\tau}_э] > \Pi_{пр} \right\} = \\ &= \int_0^{\Pi_{пр}} f(\tilde{\Pi}_и) d(\tilde{\Pi}_и) \int_{\Pi_{пр}}^a f(\max_l \tilde{\Pi}_{эл}) d(\max_l \tilde{\Pi}_{эл}) \end{aligned}$$

снизу и вероятностью  $\mu$  – сверху.

Для изделия, надежность которого определяется совокупностью элементов ( $n > 1$ ) и характеристик расходования ресурса ( $m > 1$ ) (длительной прочностью, усталостью, износом и т. д.), гарантированная проверка надежности возможна при

$$\Pi_{иij}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] = \max_l \Pi_{эijl}[P_{0э}, R_{э}(\tau), \tau_{э}], \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad l = \overline{1, N_э}. \quad (8)$$

При  $n \wedge m \gg 1$  и  $s \ll n \wedge m$  (означающем, что число степеней свободы, за счет чего может быть обеспечено выполнение условия (8), меньше числа элементов изделия), ввиду неодинакового влияния режима нагружения на повреждаемость элементов изделия, а также наличия ограничений на область реализации режима, выполнить условие (8) по всем элементам изделия невозможно, поэтому необходим компромисс, идея которого сводится к приближенному выполнению условия гарантированной проверки надежности в виде:

$$\Pi_{иij}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] \geq \max_l \Pi_{эijl}[P_{0э}, R_{э}(\tau), \tau_{э}]; \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad l = \overline{1, N_э}, \quad (9)$$

означающем, что для ряда элементов надежность в испытаниях будет оцениваться «в запас», т. е. их повреждаемость будет превышать максимальную эксплуатационную. Такой подход к проверке надежности технических изделий вполне оправдан и часто применяется на практике. Важно, что проводимые таким образом испытания, как и испытания, реализующие условие (8), при успешном их завершении гарантируют надежность изделия по всем эксплуатационным вариантам применения.

С другой стороны, при выборе параметров испытаний необходимо, чтобы величина превышения  $\delta\Pi_{ij} = \Pi_{ij}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] - \max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}]$  была ограничена сверху, поскольку в испытаниях недопустимо разрушение элементов, имеющих достаточный расчетный запас прочности и долговечности, так как в противном случае по результатам неудачно проведенных испытаний (например, ввиду их чрезмерной перегрузки), будет принято ложное заключение о ненадежности изделия:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] &\leq \\ &\leq \Pi_{пр ij} = \varepsilon_{ij}^{-1} a_{ij} \vee \delta\Pi_{ij} = (\Pi_{ij}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] - \max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}]) \leq \\ &\leq (\Pi_{пр ij} - \max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}]), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\Pi_{пр ij}$  – предельно допустимая в испытаниях выработка ресурса  $i$ -го элемента с учетом  $j$ -й характеристики;  $a$  – значение параметра ресурса  $\Pi$ , при котором элемент изделия разрушается или наступает его параметрический отказ;  $\varepsilon$  – коэффициент запаса, обусловленный влиянием как рассеяния факторов, влияющих на выработку ресурса, так и влиянием неучтенных факторов.

С учетом соотношений (9) и (10) область выбора параметров испытаний примет вид двухсторонних ограничений

$$\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}] \leq \Pi_{ij}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] \leq \Pi_{пр ij}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad l = \overline{1, N_{\ominus}}. \quad (11)$$

При  $n \wedge m \gg 1$  и  $s \ll n \wedge m$  выполнить условие (11) для реального изделия сложно: можно только стремиться к этому, т.е. проводить выбор объема, режимов и длительности испытаний по обобщенной целевой функции, максимизирующей вероятность:

$$\Phi_1 = \max \text{Вер} \left\{ \max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}] \leq \Pi_{ij}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] \leq \Pi_{пр ij} \right\} = \max \frac{n^* \wedge m^*}{n \wedge m}; \quad (12)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad l = \overline{1, N_{\ominus}},$$

где  $n^*$  и  $m^*$  – число элементов и характеристик расходования ресурса изделия, соответствующих случаю, когда выполняется условие (11).

При  $n = n^*$  и  $m = m^*$  экстремальное значение  $\Phi_1$  равно 1.

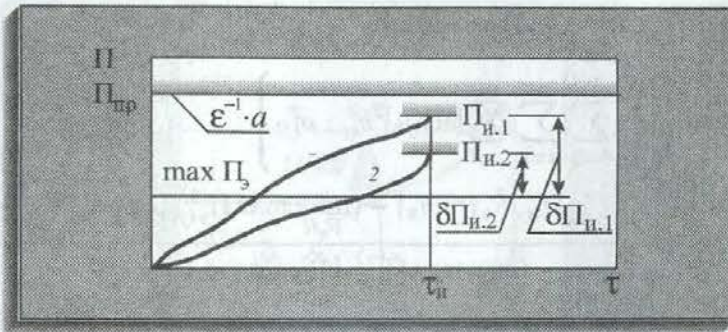
При наличии в области (11) нескольких вариантов испытаний, обеспечивающих приближенное выполнение условия гарантированной проверки надежности изделия, для выбора окончательного варианта испытаний необходим дополнительный критерий. На рис. 3 показано, что из двух вариантов испытаний предпочтительным является второй, как в меньшей мере нарушающий условие гарантированной проверки надежности изделия. Поэтому в соответствии с (5) для изделия в целом обобщенную целевую функцию выбора параметров совмещенных испытаний можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \min \frac{1}{N_{и}} \sum_{k=1}^{N_{и}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left\{ \Pi_{ijk}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] - (\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k \right\}^2; \\ &(\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k \leq \Pi_{ijk}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] \leq \varepsilon_{ijk}^{-1} a_{ijk}; \\ &i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad N_{и} \in 1 \dots N_{\ominus}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $N_{и}$  – объем испытываемых изделий (при полном совмещении эксплуатационных вариантов  $N_{и} = 1$ );  $\Pi_{ijk}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}]$  – повреждаемость элемента изделия в  $k$ -х совмещенных испытаниях;  $(\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k$  – максимальная из  $N_k$ -го множества эксплуатационная повреждаемость  $i$ -го элемента изделия.

Нормирование «невязок»  $\delta\Pi_{ijk} = |\Pi_{ijk}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] - (\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k|$  относительно  $(\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k$

$$\delta\Pi'_{ijk} = \frac{|\Pi_{ijk}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] - (\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k|}{(\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k} \quad (14)$$



**Рис. 3.** Графическая иллюстрация отсутствия однозначного выбора варианта испытаний при оценке их эффективности по формуле (12) ( $n = 1$ ): 1, 2 – варианты реализации испытаний;  $\Pi_3$  – эксплуатационная повреждаемость;  $\varepsilon^{-1}a$  – предельно допустимая повреждаемость в испытаниях;  $\tau_{и1}$  – длительность испытаний

позволяет свести область определения  $\delta\Pi'_{ij k}$  к интервалу  $0 \dots 1$ . Учитывая весовые коэффициенты  $b_{ij}$ , характеризующие точность моделей расходования ресурса, и  $\rho_{ijl}$ , характеризующие значимость элементов изделия, целевая функция (5), обобщенная для изделия в целом, преобразуется к виду:

$$\Phi_1 = \min \left\{ \frac{1}{N_{и}} \sum_{k=1}^{N_{и}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\delta\Pi'_{ij}]^2 \cdot b_{ij}^2 \cdot \rho_{ijl}^2 \right\};$$

$$\delta\Pi'_{ij} = \frac{\Pi_{иij k}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] - (\max_l \Pi_{эijl}[P_{0э}, R_{э}(\tau), \tau_{э}])_k}{(\max_l \Pi_{эijl}[P_{0э}, R_{э}(\tau), \tau_{э}])_k}; \quad (15)$$

$$(\max_l \Pi_{эijl}[P_{0э}, R_{э}(\tau), \tau_{э}])_k \leq \Pi_{иij k}[P_{0и}, R_{и}(\tau), \tau_{и}] \leq \varepsilon_{ij k}^{-1} a_{ij k};$$

$$N_{и} \in 1 \dots N_{э}; \quad P_{0и} \in G_{Pi}; \quad R_{и}(\tau) \in G_{Ri}; \quad \delta\Pi'_{ij} \leq \delta\Pi'_{доп.ij};$$

где  $\rho_{ijl}$  – значимость  $i$ -го элемента в  $l$ -м варианте эксплуатации, процесс расходования ресурса которого характеризуется  $j$ -й мерой;  $b_{ij}$  – коэффициент, характеризующий уровень адекватности модели, используемой для оценки повреждаемости  $\Pi_{ij}$ .

Согласно (15) совмещенные испытания обеспечивают гарантированную проверку надежности изделия, в первую очередь, по наиболее значимым элементам, процессы расходования ресурса которых описываются наиболее точными моделями.

При вероятностной оценке параметров испытаний обобщенная целевая функция (7), преобразованная для изделия в целом, примет вид

$$\tilde{\Phi}_1 = \max \frac{1}{N_{и}} \sum_{l=1}^{N_{и}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Вер} \left\{ \max_{P,R} \max_l \tilde{\Pi}_{эijl}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0э}, \tilde{R}_{э}(\tau), \tilde{\tau}_{э}] \leq \right.$$

$$\left. \leq \min_{P,R} \tilde{\Pi}_{иij}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0и}, \tilde{R}_{и}(\tau), \tilde{\tau}_{и}] \leq \max_{P,R} \tilde{\Pi}_{иij}^{(\mu)}[\tilde{P}_{0и}, \tilde{R}_{и}(\tau), \tilde{\tau}_{и}] < a_{ij} \right\}, \quad (16)$$



а обобщенная целевая функция (15) примет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= \min \left\{ \frac{1}{N_{\text{н}}} \sum_{k=1}^{N_{\text{н}}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\delta \tilde{\Pi}_{ijk}]^2 b_{ij}^2 \cdot \rho_{ijl}^2 \right\}; \\ \delta \tilde{\Pi}_{ijk} &= \frac{\min_{\tilde{P}_{0\text{н}}, \tilde{R}_{\text{н}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{н}}} \tilde{\Pi}_{\text{н}ijk}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0\text{н}}, \tilde{R}_{\text{н}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{н}}] - (\max_{P,R} \max_l \tilde{\Pi}_{\text{н}ijl}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0\text{н}}, \tilde{R}_{\text{н}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{н}}])_k}{(\max_{P,R} \max_l \tilde{\Pi}_{\text{н}ijl}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0\text{н}}, \tilde{R}_{\text{н}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{н}}])_k}}; \\ (\max_{P,R} \max_l \tilde{\Pi}_{\text{н}ijl}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0\text{н}}, \tilde{R}_{\text{н}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{н}}])_k &\leq \max_{P,R} \tilde{\Pi}_{\text{н}ijk}^{(\gamma)}[\tilde{P}_{0\text{н}}, \tilde{R}_{\text{н}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{н}}] \leq \\ &\leq \max_{P,R} \tilde{\Pi}_{\text{н}ijk}^{(\mu)}[\tilde{P}_{0\text{н}}, \tilde{R}_{\text{н}}(\tau), \tilde{\tau}_{\text{н}}] < a_{ijk}; \quad N_{\text{н}} \in 1 \dots N_{\text{э}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Область определения критерия  $\tilde{\Phi}_1$  соответствует интервалу  $0 \dots \max \tilde{\Phi}_1$ .

### Критерий дифференцированной проверки эксплуатационных вариантов применения изделия

Очевидно, что из  $N_{\text{э}}$  изделий всегда можно выделить изделие, эксплуатируемое по менее нагруженному варианту применения (например, для авиационного двигателя самолета-истребителя это может быть наземный вариант применения, в котором накапливается меньшая повреждаемость, и т. д.), так и изделие, эксплуатируемое по наиболее нагруженному варианту применения. В этом плане при проведении совмещенных испытаний экономически целесообразным является дифференцированный «зачет» (проверка) эксплуатационных вариантов применения изделия, начиная от наименее нагруженного и кончая наиболее нагруженным вариантом. В отличие от традиционно применяемого при проведении периодических испытаний способа «зачета» партии выпускаемых изделий (при отказе изделия в испытаниях вся партия бракуется), такой подход позволяет, даже в случае отказа изделия в испытаниях, не браковать всю партию, а признавать изделия годными к эксплуатации по тем вариантам применения, повреждаемость изделия в которых будет безотказно накоплена в испытаниях.

В случае, когда надежность изделия определяется одним «критичным» элементом и одной характеристикой расходования ресурса ( $n = 1, m = 1$ ), время зачета в испытаниях эксплуатационных вариантов применения определится по формуле

$$\tau_{\text{э},\nu} = f[P_0, \Pi_{\text{э}\nu}, R_{\text{н}}(\tau)], \quad P_0 = \text{idem}; \quad \nu = \overline{1, N_{\text{э}}}. \quad (18)$$

При этом интервалы «зачета»  $\tau_{\text{э},1}, \dots, \tau_{\text{э},N_{\text{э}}}$  последовательно располагаются по оси координат  $\tau$ , начиная от времени «зачета» наименее нагруженного и кончая наиболее нагруженным вариантами применения.

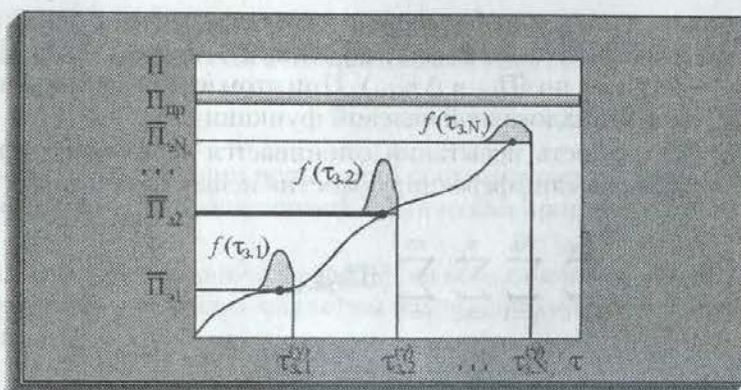
При наличии рассеяния параметра  $\Pi$  интервалы «зачета» эксплуатационных вариантов определяются с некоторой вероятностью  $\gamma$  (рис. 4):

$$\gamma = \int_0^{\tau_{\text{э}}} f(\tau_{\text{э}}) d\tau.$$

Ввиду различия испытательного  $R_{\text{н}}(\tau)$  и эксплуатационных  $R_{\text{э}\nu}(\tau)$  режимов нагружения, интервалы «зачета» элементов изделия в каждом варианте применения будут различными, что приведет к возникновению некоторого периода «зачета» изделия  $\Delta\tau_{\text{э},i}$ . При этом  $\nu$ -й вариант применения изделия «зачтется» полностью за время

$$\tau_{\text{э},\nu} = \min_i \tau_{\text{э},i} + \Delta\tau_{\text{э},\nu}. \quad (19)$$

При вероятностной оценке величина интервалов  $\Delta\tau_{\text{э},i}$  ( $i = \overline{1, N_{\text{э}}}$ ) будет определяться как случайная величина с некоторой вероятностью  $\gamma$ .



**Рис. 4.** Графическая иллюстрация дифференцированного «зачета» в совмещенных испытаниях эксплуатационных вариантов применения для случая  $n = m = 1$  при вероятностной оценке: 1 — траектория накопления повреждаемости в совмещенных испытаниях;  $\bar{\Pi}$  — математическое ожидание  $\Pi$ , соответствующее нормальному закону распределения

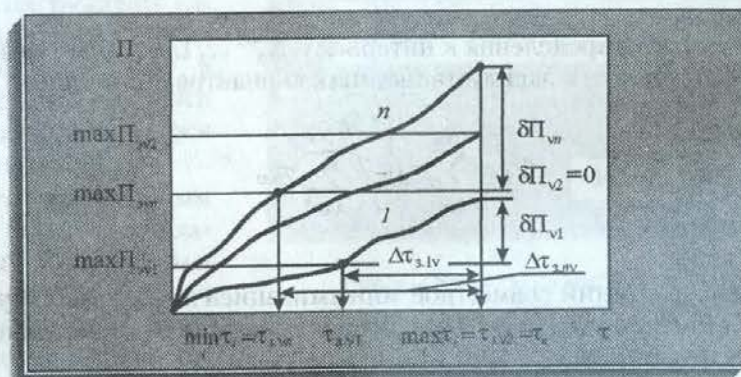
Из рассмотренного следует, что при  $n > 2$  длительность наработки для «зачета»  $\nu$ -го варианта применения определится из условия

$$\tau_{3,\nu} = \max_{i,j} \tau_{3,ij\nu} [P_0, \Pi_{\nu}, R_{\Pi}(\tau)]; \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (20)$$

а период «зачета» всех элементов изделия определится из условия (рис. 5):

$$\Delta\tau_{3,\nu} = \max_{i,j} \tau_{3,ij\nu} [P_0, \Pi_{\nu}, R_{\Pi}(\tau)] - \min_{i,j} \tau_{3,ij\nu} [P_0, \Pi_{\nu}, R_{\Pi}(\tau)]. \quad (21)$$

Выполнение условия (20) означает, что для ряда элементов изделия в  $\nu$ -м варианте применения повреждаемость будет превышать их эксплуатационную (рис. 5), что может привести к искажению результатов оценки надежности как самих элементов, так и других элементов, на надежность которых они оказывают непосредственное влияние. Например, отказ масляного насоса газотурбинного двигателя может привести к разрушению подшипников ротора по причине масляного голодания и т. д. Следовательно, величина рассогласования, оцениваемая «невязками» по повреждаемости  $\delta\Pi_{\nu i}$  (рис. 5) (или, что равнозначно, по величине периодов «зачета»



**Рис. 5.** Графическая иллюстрация определения интервала «зачета» в испытаниях  $\nu$ -го эксплуатационного варианта применения изделия, надежность которого характеризуется  $n$  элементами: 1 — накопление повреждаемости в испытаниях первым элементом; 2 — накопление повреждаемости в испытаниях вторым элементом;  $n$  — накопление повреждаемости в испытаниях  $n$ -м элементом

$\Delta\tau_{3,iv}$ ), должна быть ограничена, т. е. выбор параметров совмещенных испытаний необходимо проводить внутри некоторого интервала  $0 \dots \delta\Pi_{vi,пр}$  или  $0 \dots \Delta\tau_{3,iv,пр}$  (где  $\delta\Pi_{vi,пр}$ ,  $\Delta\tau_{3,iv,пр}$  — предельно допустимые «невязки» по  $\delta\Pi_{vi}$  и  $\Delta\tau_{3,iv}$ ). При этом выбор возможен по квадратичной обобщенной целевой функции, аналогичной целевой функции (15).

В случае, когда эффективность испытаний оценивается через повреждаемость, целевая функция, реализующая свойство «дифференцируемости» испытаний, примет вид

$$\Phi_2 = \min \frac{1}{N_3} \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l_k=1}^{N_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\delta\Pi_{ijkl_k}]^2; \quad (22)$$

$$\delta\Pi_{ijkl_k} = \frac{\Pi_{nijl_k}[P_{0n}, R_{nl_k}(\tau), \tau_{nl_k}] - \Pi_{3ijl_k}[P_{03}, R_{3l_k}(\tau), \tau_{3l_k}]}{\Pi_{3ijl_k}[P_{03}, R_{3l_k}(\tau), \tau_{3l_k}]},$$

где  $N_1 + N_2 + \dots + N_k = N_3$ .

С учетом длительности периода «зачета» оптимизация испытаний возможна по целевой функции вида

$$\Phi_2 = \min \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l_k=1}^{N_k} \left[ \frac{\max_{i,j} \tau_{3,ijl_k}[P_0, R_{nl_k}(\tau), \Pi_{3l_k}] - \min_{i,j} \tau_{3,ijl_k}[P_0, R_{nl_k}(\tau), \Pi_{3l_k}]}{\sum_{l=1}^{N_3} \tau_{3l}} \right]^2. \quad (23)$$

#### Критерии объема и длительности совмещенных испытаний

Дополнительно к критериям  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  эффективность совмещенных ресурсных испытаний характеризуется объемом и длительностью испытаний (соответственно критериями  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$ ), значения которых из практических соображений должны быть по возможности минимальными:

$$\Phi_3 = \min N_n; \quad \Phi_4 = \min \sum_{k=1}^{N_n} \tau_{nk}, \quad (24)$$

где  $N_n$  — объем испытываемых изделий;  $\tau_{nk}$  — длительность  $k$ -х совмещенных испытаний.

Нормирование критерия  $\Phi_3$  относительно числа эксплуатационных вариантов применения

$$\Phi_3 = N_n/N_3 \quad (25)$$

позволяет свести область его определения к интервалу  $N_3^{-1} \dots 1$ , а нормирование критерия  $\Phi_4$  относительно общей длительности эксплуатационных вариантов применения изделия

$$\Phi_4 = \sum_{k=1}^{N_n} \tau_{nk} / \sum_{v=1}^{N_3} \tau_{3v} \quad (26)$$

— к интервалу  $0 \dots 1$ .

Выбор параметров испытаний совместной минимизацией дискретных функционалов (26) и (27) позволяет минимизировать соответственно материальные и временные затраты на проведение совмещенных испытаний.

В случае когда оценка эффективности проводится по коэффициенту ускорения испытаний  $K_y$  (множитель подобного преобразования в формуле (2)), то

$$\Phi_4 = \max K_y = \sum_{i=1}^{N_3} \tau_{3i} / \sum_{j=1}^{N_n} \tau_{ni}. \quad (27)$$

**2. ОБЛАСТЬ РЕАЛИЗАЦИИ И ОБЩАЯ СХЕМА  
ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ СОВМЕЩЕННЫХ РЕСУРСНЫХ ИСПЫТАНИЙ**

Все́му есть определенные границы.  
К. Горащий

При  $N_s = 1$  область реализации испытаний соответствует области эквивалентных испытаний  $G_R$ , в которой сохраняется неизменной физическая природа и мера вырабатываемого ресурса [5].

При  $N_s > 1$  область испытаний формируется объединением областей  $G_{R1}, G_{R2}, G_{R3}, \dots, G_{R\nu}$  ( $\nu \in 1 \dots N_s$ ), соответствующих областям нагружения изделия в эксплуатационных вариантах применения:

$$R_{и\xi} = [R_1, R_2, \dots, R_s] \in G_{R\xi}; \quad G_{R\xi} = G_{R1} \cup G_{R2} \cup \dots \cup G_{R\nu}. \quad (28)$$

Объединение областей проводится из условия сохранения неизменными внутри каждой области видов повреждений одних и тех же элементов, определяющих надежность и ресурс изделия в различных вариантах применения. Если виды повреждений различаются, то они не могут воспроизводиться в одних совмещенных испытаниях. Например, если из  $N_s$  вариантов применения изделия в  $N_1$  вариантах прогнозируется один вид разрушения, а в остальных  $N_2$  вариантах — другой вид, то испытания реализуются, по крайней мере, на двух изделиях: одном — для проверки  $N_1$  вариантов и втором — для проверки  $N_2$  вариантов ( $N_1 + N_2 = N_s$ ) и т. д. Таким образом, из  $N_s$  областей эксплуатационного нагружения, соответствующих  $N_s$  вариантам применения изделия, образуются  $\nu \leq N_s$  областей нагружения изделия в стендовых совмещенных испытаниях. Соответственно в каждой из  $\nu$  областей проводится своя оптимизация параметров совмещенных испытаний.

Очевидно, что оптимальным является случай, когда все области  $G_{Ri}$  могут быть объединены в одну область  $G_{R\xi}$ , внутри которой выбирается окончательный вариант совмещенных испытаний. В случае отсутствия такой возможности область испытаний делится на две. Если при этом отсутствует приемлемое решение, то проводится дальнейшее разделение областей  $G_{R1}, \dots, G_{R\nu}$  с соответствующей оптимизацией параметров совмещенных испытаний в каждой из них (рис. 6). Предельным является случай, когда области эксплуатационного нагружения изделия в вариантах применения полностью несовместимы. В этом случае надежность изделия в каждом эксплуатационном варианте проверяется по своей индивидуальной программе испытаний.

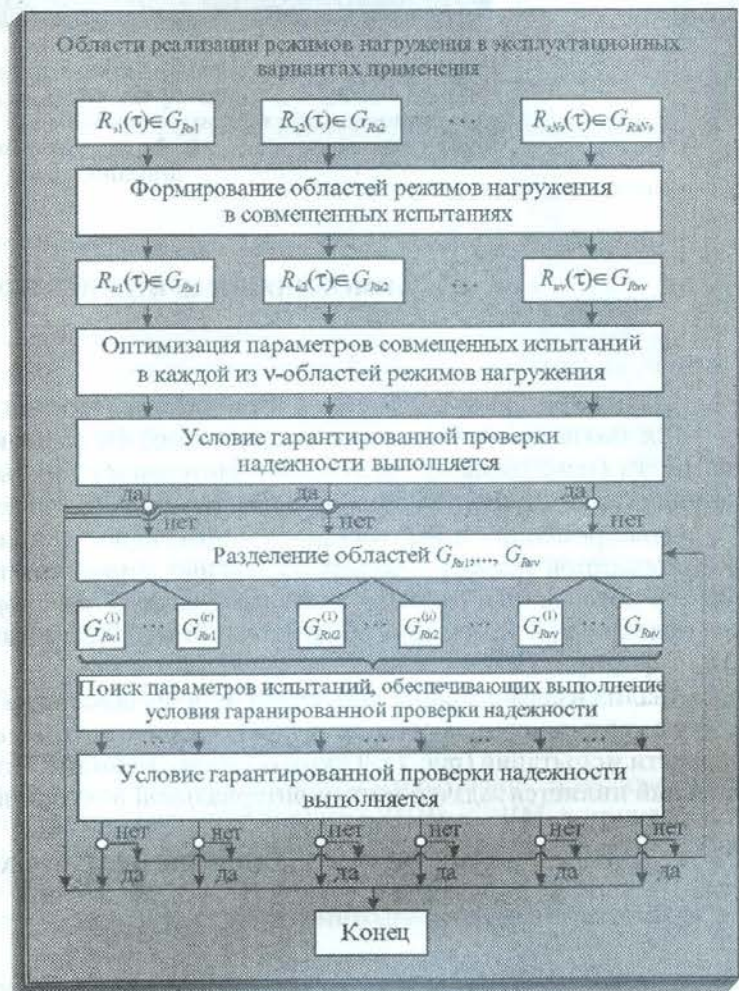


Рис. 6. Общая схема выбора параметров совмещенных ресурсных испытаний

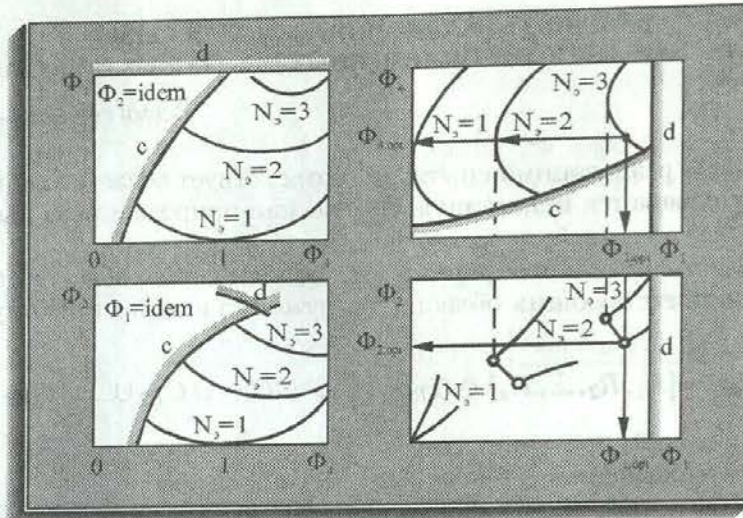


Рис. 7. Графическая иллюстрация взаимодействия критериев эффективности  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  для случая, когда эксплуатация изделия характеризуется тремя вариантами применения:  $\text{-----}$  – граница области реализации критерия;  $\Phi_{1,opt}$  – оптимальное компромиссное решение

### 3. ВЗАИМОВЛИЯНИЕ КРИТЕРИЕВ ЭФФЕКТИВНОСТИ

*Пугают не трудности роста,  
а рост трудностей...*

Анализ критериев  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  и  $\Phi_4$  показывает, что их взаимодействие неоднозначно.

Так, оптимизация испытаний по критерию  $\Phi_3$  (означающему уменьшение объема испытаний) и  $\Phi_4$  (означающему уменьшение длительности испытаний) уменьшает вероятность обеспечения гарантированной проверки надежности, оцениваемой критерием  $\Phi_1$ .

Одновременно с этим снижается эффективность испытаний в плане обеспечения дифференцированной проверки эксплуатационных вариантов применения, оцениваемая критерием  $\Phi_2$ . Это объясняется тем, что, ввиду рассогласования скоростей расходования ресурса элементов изделия при изменении режимов и длительности нагружения, увеличиваются «невязки»  $\Delta\tau_{3в}$  в формуле (21).

Анализ взаимодействия критериев  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  показывает, что они также противоречивы друг другу и стремление одновременно удовлетворить их требованиям приводит к снижению эффективности испытаний (рис. 7). Таким образом, очевидно, что выбор параметров совмещенных испытаний является задачей многокритериальной векторной оптимизации.

### 4. ОПТИМИЗАЦИЯ СОВМЕЩЕННЫХ ИСПЫТАНИЙ

*Мудрый ценит всех, ибо в каждом  
замечает хорошее.*

Г. Бальтасар

Решение проблемы оптимизации при наличии множества показателей, как правило, направлено на поиск метода, наилучшим образом удовлетворяющего всем отдельным показателям. Единственным объективным фактором, характеризующим проблему векторной оптимизации (в рамках того субъективизма, который связан с выбором проблемы векторной оптимизации) является наличие области Парето в пространстве критериев и существование так называемых Парето-оптимальных решений [1–3].

Множество допустимых вариантов решения оптимизации характеризуется некоторой замкнутой областью  $x \in G_X$ , где  $x$  – вектор оптимизируемых параметров. Пусть задана система локальных критериев

$$Y(x) = [y_1(x), \dots, y_m(x)]^T,$$



Недостатком методов этой группы является необходимость выбора и обоснования предпочтения критериев и «уступок»  $\Delta y_j$ , а также необходимость решения  $m$  задач оптимизации. Вопрос о назначении приоритетов для локальных критериев почти всегда вырастает в самостоятельную проблему, требующую экспертных оценок.

Перечисленные выше трудности привели к тому, что в некоторых случаях вообще отказываются от решения проблемы скаляризации подобным образом, ограничиваясь определением всего множества Парето-оптимальных решений и возлагая обязанность окончательного выбора на ЛПР.

В третьей группе критериев отыскивается компромиссное решение путем установления определенных весовых соотношений между локальными критериями или назначением допустимых значений локальных критериев. К наиболее распространенным способам скаляризации (формирования обобщенных целевых функций) относятся следующие [2, 3]:

– взвешенная сумма частных критериев

$$F(x) = \left( \sum_{j=1}^m (W_j f_j(x))^k \right)^{1/k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad (30)$$

– минимальный из взвешенных частных критериев

$$F(x) = \min_{j \in [1, m]} (W_j f_j(x)), \quad (31)$$

где  $W_j > 0$  – весовые коэффициенты важности критериев;  $f_j(x)$  – линейное преобразование частного критерия  $y_j(x)$ , связанное с нормированием и переносом начала координат (в простейшем случае  $f_j(x) = y_j(x)$ ).

Задача определения весовых коэффициентов аналогична задаче выбора приоритетов и решается чаще всего путем экспертных оценок. Достоинством данного метода является то, что решение, оптимальное по критериям (30) и (31), как показано в работе [2], является Парето-оптимальным.

При известных допустимых значениях критериев  $a_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ) наиболее простым решением проблемы будет отыскание такого решения, которое удовлетворяет системе ограничений  $y_j(x) \geq a_j, j = \overline{1, m}$ . Недостатком такого подхода способа скаляризации является то, что полученное решение может не быть Парето-оптимальным. На рис. 8 видно, что при  $a_1 = y_1(A)$  и  $a_2 = y_2(B)$  условиям  $y_j(x) \geq a_j$  удовлетворяют все решения, попадающие в область  $RAB$ , но из них Парето-оптимальными будут лишь те, что соответствуют кривой  $AB$ .

Для устранения этого недостатка переходят к так называемой задаче пороговой оптимизации. Для этого из всего множества критериев выделяют наиболее важный или произвольный, но единственный критерий, а остальные сводят в систему ограничений с порогом  $k\Delta y_j$ . В результате получают для каждого  $k = 0, 1, 2, \dots$  задачу пороговой оптимизации:

$$y_1(x) \rightarrow \max; \quad y_j(x) \geq a_j + k\Delta y_j; \quad j = \overline{2, m}, \quad (32)$$

решение которой принадлежит области Парето. Выбирая различные значения  $k$  и  $\Delta y_j$ , можно построить всю область Парето.

Методы четвертой группы основаны на введении идеальной точки (точка  $S$  на рис. 8). В этом случае решение задачи векторной оптимизации распадается на два этапа:

– определение значения  $y_j^*$  для  $j = \overline{1, m}$ ;

– выбор решения, наиболее близкого в заданном смысле к идеальной точке.

В работах [23–26] в качестве этой меры рекомендуется квадрат евклидовой нормы:

$$F(x) = \sum_{j=1}^m (y_j(x)/y_j^* - 1)^2. \quad (33)$$

Существуют и другие меры близости к идеальному решению, которые, как и весовые коэффициенты  $W_j$  и пороговое значение  $k\Delta y_j$ , позволяют находить различные точки области Парето, например метод поиска решения, равноудаленного в плоскости критериев от точек  $A$  и  $B$

(рис. 8), т. е. расположенного на прямой  $KL$ , или метод отыскания решения, максимально удаленного от границ допустимой области, т. е. решения задачи:

$$F(x) = \min_j [W_j(y_j(x) - a_j)] \rightarrow \max_x, \quad (34)$$

являющейся, по существу, задачей с целевой функцией типа (31).

Анализ методов векторной оптимизации показывает, что для сложных технических систем наиболее приемлемы методы третьей и четвертой групп, для которых идеальные значения частных критериев известны априори. Эти методы являются наиболее экономичными.

Укрупненная структурная схема последовательности получения Парето-оптимальных значений параметров совмещенных испытаний и выбора окончательного варианта приведена на рис. 9.

Оптимизируемыми являются:

- количество изделий  $N_{\text{и}}$ , устанавливаемых на испытания;
- режимы  $R_{\text{и}k}$  и длительности испытаний  $\tau_{\text{и}k}$  ( $k = \overline{1, N_{\text{и}}}$ );
- множества эксплуатационных вариантов применения  $N_k$ , проверяемые в  $k$ -х совмещенных испытаниях ( $k = \overline{1, N_{\text{и}}}$ ).

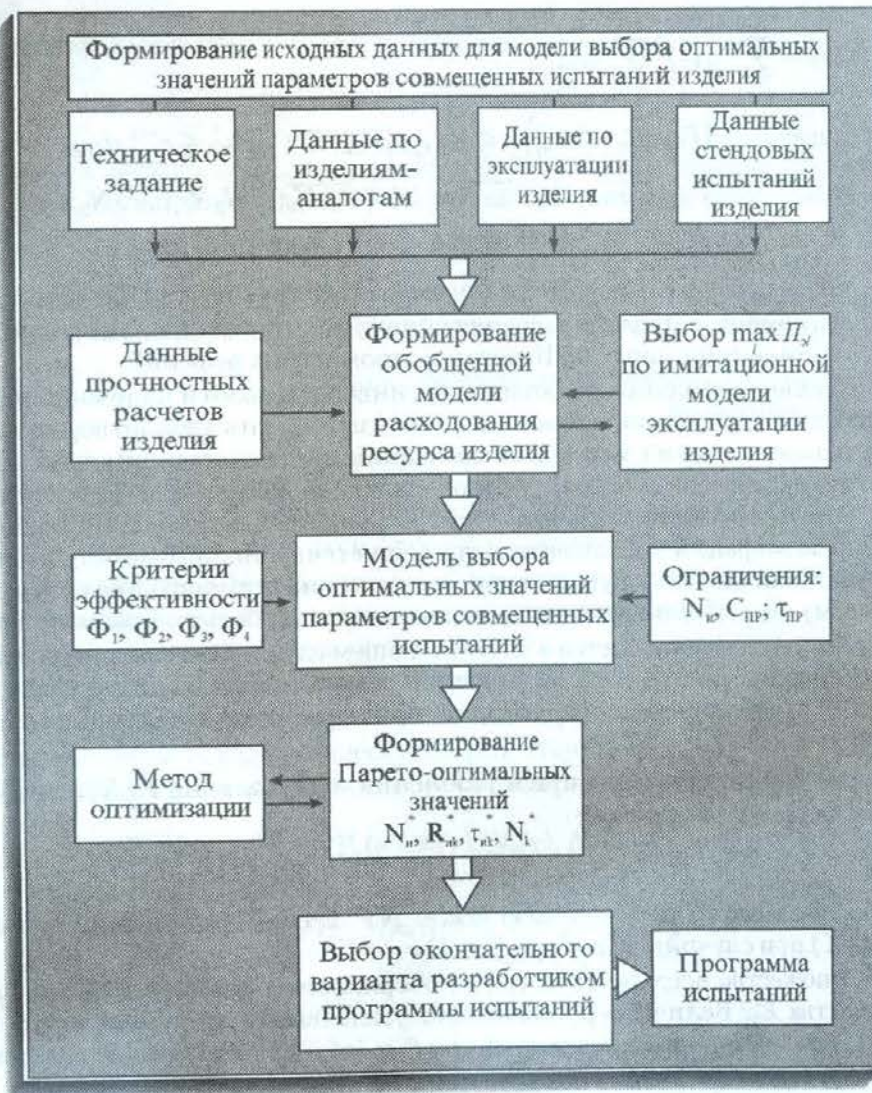


Рис. 9. Последовательность выбора оптимальных значений параметров совмещенных испытаний:  $C_{\text{пр}}$ ,  $\tau_{\text{пр}}$  — ограничения по материальным и временным затратам;  $N_{\text{и.гр}}$  — ограничение по количеству выделяемых на испытания изделий



При детерминированной оценке Парето-оптимальные значения  $N_n^*$ ,  $R_{nk}^*$ ,  $\tau_{nk}^*$  и  $N_k^*$  определяются по обобщенной целевой функции, являющейся сверткой критериев  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$  [10-12]:

$$\begin{aligned} \Phi[N_n^*, R_{nk}^*, \tau_{nk}^*, N_k^*] &= \min[A\Phi_1 + B\Phi_2 + C\Phi_3 + D\Phi_4]; \\ \Phi_1 &= \min \left\{ \frac{1}{N_n} \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\delta \Pi'_{ij}]^2 \cdot b_{ij}^2 \cdot \rho_{ijl}^2 \right\}; \\ \delta \Pi'_{ij} &= \frac{\Pi_{nijk}[P_{0n}, R_n(\tau), \tau_n] - (\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k}{(\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k}; \\ \Phi_2 &= \min \frac{1}{N_{\ominus}} \sum_{k=1}^{N_n} \sum_{l_k=1}^{N_k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [\delta \Pi''_{ijkl_k}]^2; \\ \delta \Pi''_{ijkl_k} &= \frac{\Pi_{nijk}[P_{0n}, R_{nk}(\tau), \tau_{nk}] - \Pi_{\ominus ij l_k}[P_{0\ominus}, R_{\ominus l_k}(\tau), \tau_{\ominus l_k}]}{\Pi_{\ominus ij l_k}[P_{0\ominus}, R_{\ominus l_k}(\tau), \tau_{\ominus l_k}]}; \\ \Phi_3 &= N_n/N_{\ominus}; \\ \Phi_4 &= \sum_{k=1}^{N_n} \tau_{nk} / \sum_{v=1}^{N_{\ominus}} \tau_{\ominus v}; \\ (\max_l \Pi_{\ominus ij l}[P_{0\ominus}, R_{\ominus}(\tau), \tau_{\ominus}])_k &\leq \Pi_{nijk}[P_{0n}, R_n(\tau), \tau_n] \leq \varepsilon_{ijk}^{-1} a_{ijk}, \\ i &= \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, N_n}; \quad l = \overline{1, N_{\ominus}}; \quad N_n \in 1 \dots N_{\ominus}; \\ \Pi &= F(P_0, R(\tau), \tau) \quad P_0 = \text{idem} \in G_P; \quad R_{nk}(\tau) \in G_{Rk}, \end{aligned} \quad (35)$$

где  $A, B, C, D$  — положительные числа, используемые в методе Парето ( $A + B + C + D = 1$ ).

Окончательный выбор параметров совмещенных испытаний проводится разработчиком программы из области оптимальных по Парето компромиссных решений.

На практике важно располагать несколькими универсальными и надежными методами оптимизации, позволяющими за приемлемое число шагов получать удовлетворительные результаты. В качестве одного из таких методов оптимизации предлагается использовать модификацию известного статистического метода  $\Psi$ -преобразования, позволяющую проводить оптимизацию произвольных многоэкстремальных целевых функций в несколько итераций с выходом через заданное число итераций и по значению критерия точности, задаваемого параметрами метода. Число вычислений целевой функции при оптимизации этим методом не зависит от числа параметров, поэтому он особенно подходит для решения задач большой размерности.

Основная идея метода заключается в замене в общем случае многоэкстремальной функции  $F(X)$  многих переменных  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$ , минимум которой необходимо найти, унимодальной функцией  $\Psi(\xi)$  одной переменной  $\xi$ , образованной в результате лебегова разделения функции  $F(X)$  на ряд уровней  $\xi_j$ .

Лебегово разделение получается путем разбиения интервала  $[\inf F(X), \sup F(X)]$  на равные промежутки следующим образом:

$$\inf F(X) = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_M = \sup F(X).$$

Такое разбиение может быть получено после  $NP$  пробных испытаний для определения  $\inf F(X)$  и  $\sup F(X)$  при случайном выборе  $X \in D_X$ .

Пусть  $E_j$  — множество всех точек на гиперповерхности, в которых  $F(X) \leq \xi_j$ , а функция  $\mu_j$  — мера множества  $E_j$ . Величина  $\mu_j$  монотонно уменьшается при уменьшении индекса  $j$ , а функция  $\mu = \Psi(\xi)$  достигает своего минимума при  $\xi = \inf F(X)$ , т. е. задача сводится к нахождению минимума функции  $\mu = \Psi(\xi)$ .

Меру множества  $E_j$  можно приближенно оценить как

$$\mu_j = \sum_{\nu=1}^{NS_j} (\xi_j - F(X_{\nu}))^2 / N,$$

где  $N$  — количество испытаний, необходимых для определения значений  $F(X_i)$  при случайном выборе  $X_i \in D_X$ ;  $NS_j$  — количество значений  $F(X_i) \leq \xi_j$ . Тогда аналитический вид функции  $\Psi(\xi)$  можно получить аппроксимацией по точкам  $\mu_j$ , а оптимальное прогнозируемое значение  $\xi_{\text{опт}}$  — минимизацией аппроксимирующей функции.

Информация, полученная в результате использования  $\Psi$ -преобразования, может быть использована для прогнозирования координат экстремума оптимизируемой функции  $F(X)$ . Метод основан на предположении, что координаты центров тяжести множеств  $E_j$  сходятся к координатам экстремума при уменьшении  $j$ . Координаты центров тяжести множеств  $E_j$  в этом случае оцениваются как

$$x_{ji} = \left( \sum_{\nu=1}^{NS_j} x_{\nu i} (\xi_j - F(X_\nu))^2 \right) / \left( \sum_{\nu=1}^{NS_j} (\xi_j - F(X_\nu))^2 \right), \quad (36)$$

где  $x_{i\nu}$  —  $i$ -я координата  $\nu$ -й точки  $x_\nu$  из множества  $E_j$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Вычисляя по формуле (36) значения координат центров тяжести множеств  $E_j$ , получаем систему последовательных точек  $x_{0i}, x_{1i}, \dots, x_{Mi}$ , пределами которых являются координаты экстремума при  $M \rightarrow \infty$ . Эти точки определяют семейство дискретных функций  $x_i = \Psi_{xi}(\xi)$ , аналитический вид которых можно получить, применяя известные методы аппроксимации. Координаты прогнозируемого значения экстремума определяются из соотношения

$$x_i = \Psi_{xi}(\xi), \quad i = \overline{1, n}.$$

Метод является одним из самых надежных и безотказных, позволяющих за небольшое число шагов получать удовлетворительные результаты при решении максиминных задач векторной оптимизации.

#### 5. ПРИМЕР ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ РЕСУРСНЫХ ИСПЫТАНИЙ ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ МНОВОВАРИАНТНОГО ПРИМЕНЕНИЯ

*Знающие теорию, но не умеющие применять ее на практике  
похожи на машину без мотора.*

*В. Капринский*

Газотурбинный двигатель эксплуатируется по трем вариантам применения ( $N_s = 3; l = \overline{1, 3}$ ), с типовыми циклами нагружения, приведенными на рис. 10. Общее число циклов нагружения двигателя в каждом варианте эксплуатации равно соответственно 2130, 1028 и 900.

Требуется определить объем, режимы и длительность совмещенных испытаний, если по априорным данным известно, что надежность двигателя определяют:

- малоцикловая прочность дисков ротора  $\Pi_{11}$ ;
- длительная прочность рабочей лопатки первой ступени турбины  $\Pi_{22}$ ;
- контактная прочность радиально-упорного подшипника опоры  $\Pi_{33}$ ;
- контактная прочность ведущей шестерни редуктора  $\Pi_{43}$ .

Обобщенная модель расходования ресурса рассматриваемого типа двигателя имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} \Pi_{11}[P_{0.11}; T_r^*(\tau), T_H(\tau), \bar{n}(\tau), N_r(\tau), N_z(\tau); \tau] &= 0; \\ \Pi_{22}[P_{0.22}; T_r^*(\tau), T_H(\tau), \bar{n}(\tau), N_r(\tau), N_z(\tau); \tau] &= 0; \\ \Pi_{33}[P_{0.33}; T_r^*(\tau), \bar{n}(\tau); \tau] &= 0; \\ \Pi_{43}[P_{0.43}; \bar{n}(\tau), N_r(\tau); \tau] &= 0; \end{aligned} \quad (37)$$

$$R(\tau) = [T_r^*(\tau), T_H(\tau), \bar{n}(\tau), N_r(\tau), N_z(\tau)]^T \in G_R;$$

$$P_0 = \text{idem},$$

где  $T_r^*$  — температура газа перед турбиной, К;  $T_H$  — температура воздуха на входе в двигатель, К;  $\bar{n}$  — частота вращения ротора, %;  $N$  — нагрузка генераторов постоянного и переменного токов, кВт;  $N_z$  — число циклов нагружения;  $P_0$  — область исходного состояния двигателя, соответствующая техническим требованиям на его изготовление.

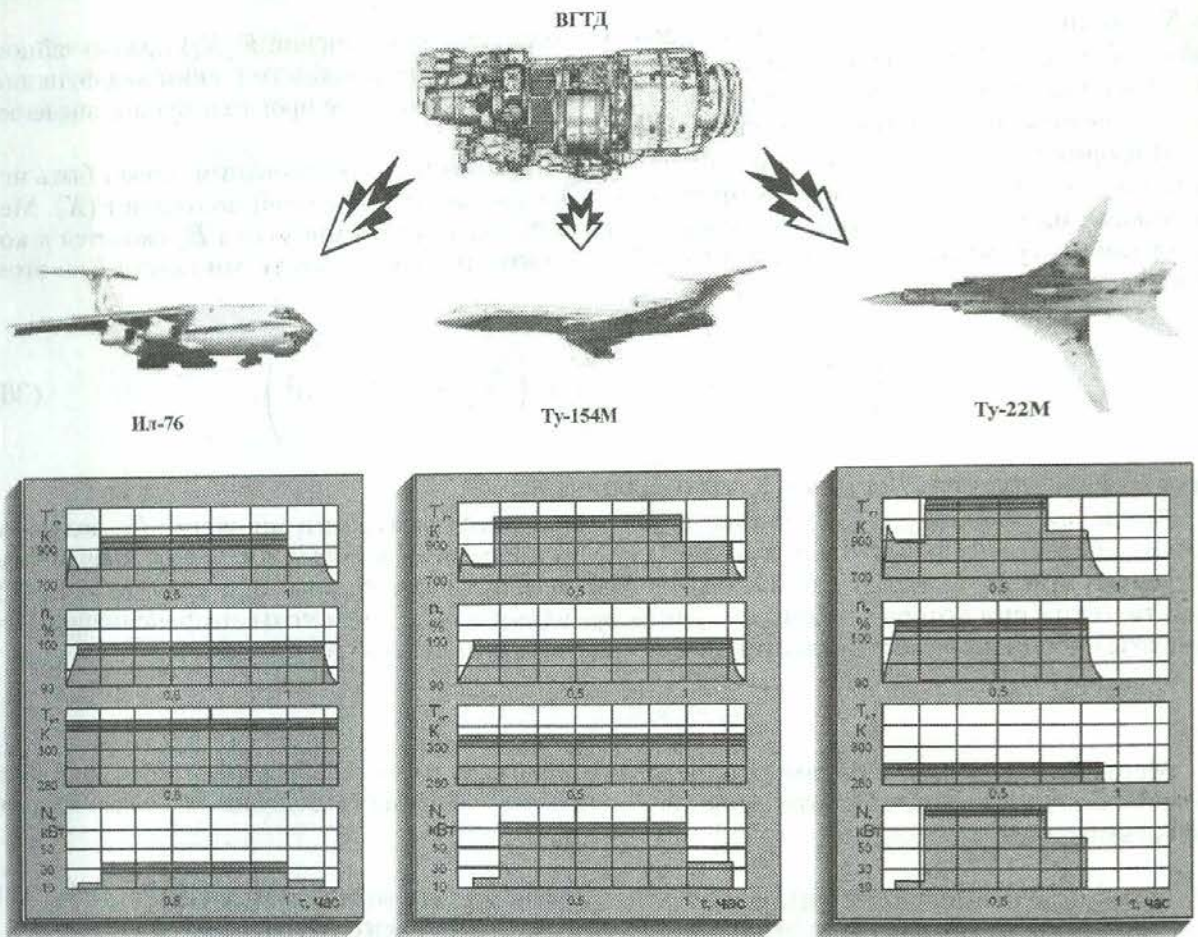


Рис. 10

Область определения параметров режима нагружения двигателя во всех трех вариантах применения соответствует ограничениям:

$$G_{R\xi} = G_{R1} \cup G_{R2} \cup G_{R3} : \begin{cases} 650 \leq T_r^* \leq 1080; & 0 \leq N_r \leq 100; \\ 223 \leq T_n \leq 320; & 900 \leq N_z \leq 2556; \\ 60 \leq \bar{n} \leq 105\%. \end{cases} \quad (38)$$

Значения коэффициентов  $b_{ij}$  заданы априорно. Учитывая уровень адекватности моделей (37), характеризуемой остаточной дисперсией, значения коэффициентов приняты следующими:

$$b_{11} = 0,2; \quad b_{22} = 0,33; \quad b_{33} = 0,25; \quad b_{43} = 0,17.$$

Значения коэффициентов  $\rho_{ij}$  выбраны из условия, что отказ элемента ведет к отказу двигателя в целом:

$$\rho_{ij} = 0,25; \quad i = \overline{1,4}; \quad j = \overline{1,3}.$$

Результаты оптимизации параметров совмещенных испытаний приведены в таблице, откуда видно, что общее число возможных вариантов испытаний двигателя равно 6. Данные в столбцах 3, 4 и 5 означают номера испытываемых двигателей, например, данные второй строки означают, что надежность двигателя в 1-м и 2-м эксплуатационных вариантах применения проверяется в одних испытаниях (столбец 3), а его надежность в 3-м эксплуатационном варианте применения — в других испытаниях (столбец 4) и т. д.

Таблица

№	$N_{ц}$	$N_k$			$\tau_{ц.к.}$			«Зачет» в испытаниях эксплуатационных вариантов при $\tau_3(N_{ц})$			Общая длительность, ч	Значения критериев эффективности ( $\Phi_i = \min$ )			
		$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	1-го	2-го	3-го		$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi_3$	$\Phi_4$
1	3	(1)	(2)	(3)	1674	749	594	1674 (2556)	749 (1235)	594 (1080)	3017	0	0	1	0,74
2	2	(1,2)	(3)	-	1674	594	-	1674 (2556)	749 (1235)	594 (1080)	2268	0	0	0,67	0,55
3	2	(1,3)	(2)	-	1674	749	-	1674 (2556)	749 (1235)	594 (1080)	2423	0	0	0,67	0,60
4	2	(2,3)	(1)	-	749	1674	-	1674 (2556)	749 (1235)	594 (1080)	2423	0	0	0,67	0,60
5	1	(1,2,3)	-	-	1674	-	-	1674 (2556)	749 (1235)	594 (1080)	1674	0	0	0,38	0,41
6	1	(1,2,3)	-	-	1674	-	-	1674 (2556)			1674	0	47,1	0,33	0,41
7	3*	(1)	(2)	(3)	2140	1370	1370	2140 (2556)	1370 (1235)	1370 (1080)	4880	0	0	1	1,20

Примечания:  $\tau_3$  — время «зачета» эксплуатационного варианта, ч;  $N_{ц}$  — число циклов нагружения в испытаниях, соответствующее времени «зачета»  $\tau_3$ ; (1), (2), ... , (1,2,3) — множество эксплуатационных вариантов, проверяемых в  $k$ -х испытаниях; \* — испытания полностью соответствуют эксплуатационным

Из множества Парето-оптимальных решений за окончательный выбран вариант под номером 5, для которого получены наилучшие значения критериев эффективности  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  и  $\Phi_4$ . Согласно данному варианту совмещенные испытания проводятся на одном двигателе с реализацией циклов нагружения, приведенных на рис. 11.

В процессе совмещенных испытаний обеспечивается полная проверка надежности двигателя:

– в первом эксплуатационном варианте применения на 1674-м часе (2556 циклов нагружения).

– во втором эксплуатационном варианте применения на 749-м часе (1235 циклов нагружения);

– в третьем эксплуатационном варианте применения на 594-м часе (1080 циклов нагружения);

Таким образом, для рассматриваемого двигателя совмещенные испытания позволяют обоснованно сократить время на проверку его надежности по трем эксплуатационным вариантам применения в  $K = 4880/1674 \approx 3$  раза.

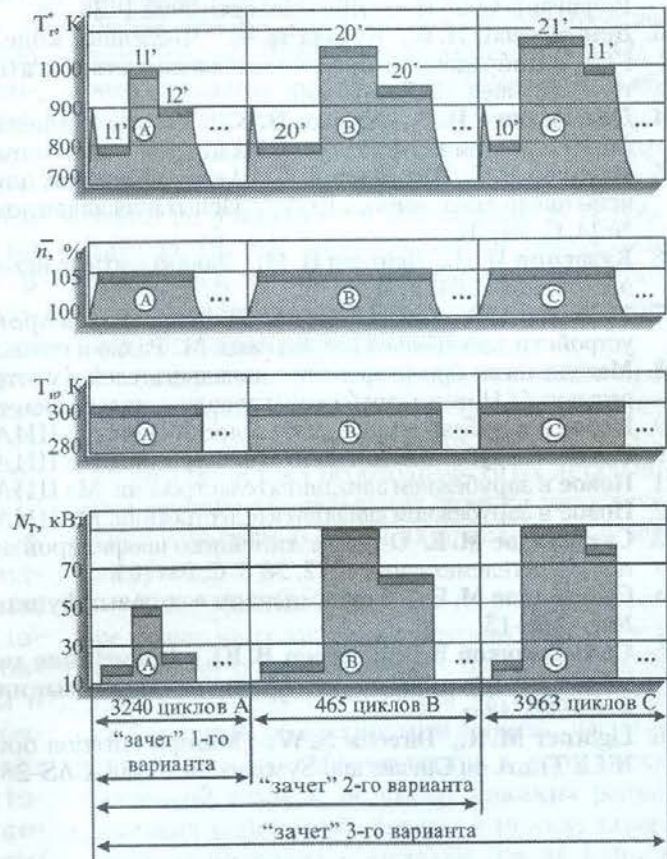


Рис. 11. Циклы нагружения двигателя в оптимальном варианте совмещенных испытаний: ■ — поле допуска на параметр режима; 11', 12', ... — длительность работы двигателя на участках нагружения, мин

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Батицев Д. И. Методы оптимального проектирования. М.: Радио и связь, 1984. 248 с.
2. Брейтон Р. К., Хечтел Г. Д., Санджовани-Винчензелли А. Л. Обзор методов оптимального проектирования интегральных схем // Тр. ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. США. М.: Мир, 1981. Т. 69, № 10. С. 180–215.
3. Волкович В. Л. Многокритериальные задачи и методы их решения // Кибернетика. 1968. № 5. С. 68–73.
4. Guishvarov A. S. Development technology of the programs of reliability and length of life accelerated tests of aircraft engines // Proc. of the 1997 China-Russia Symp. on Aero-Engines. Nanjing, China, 1997. P. 47–52.
5. Гишваров А. С. Теория ускоренных ресурсных испытаний технических систем. Уфа: Гилем, 2000. 350 с.
6. Гишваров А. С. Оптимизация ускоренных испытаний на надежность и ресурс авиационных двигателей и агрегатов // Вестник УГАТУ. 2001. № 1(3).
7. Гишваров А. С., Иванов О. В. Выбор режимов совмещенных ускоренных испытаний изделий авиационной техники // Изв. вузов. Авиационная техника. 1989. № 1. С. 105–107.
8. Гишваров А. С., Иванов О. В. Выбор режимов совмещенных ускоренных ресурсных испытаний высоконадежных сложных технических изделий // Надежность и контроль качества. 1990. № 1.
9. Гишваров А. С., Иванов О. В., Сарваретдинов Р. Г. Обоснование ускоренных эквивалентных испытаний ГТД многовариантного применения // Изв. вузов. Авиационная техника. 1989. № 3. С. 49–52.
10. Гишваров А. С., Иванов О. В., Сарваретдинов Р. Г. Повышение эффективности стендовых ресурсных испытаний ГТД многовариантного применения // Авиационная промышленность. 1990. № 5. С. 60–62.
11. Гишваров А. С., Минигалеев С. М. Методика выбора оптимальных параметров ускоренных совмещенных испытаний технических изделий // Авиационная промышленность. 2001. № 2. С. 7–13.
12. Guishvarov A. S., Kondratieva N. V., Minigaleev S. M. Development technology of the programs of reliability and length of life accelerated tests of aircraft engines // 36th AIAA / ASME / SAE / ASEE Joint Propulsion Conf. Huntsville, Alabama, 2000. P. 36–38.
13. Демьянушко И. В., Куевда В. К. Численные модели контроля выработки ресурса авиационных ГТД // Вибрационная прочность и надежность двигателей и систем летательных аппаратов: Сб. науч. тр. Куйбышев, 1987. С. 45–56.
14. Демьянушко И. В., Куевда В. К. Метод автоматизированного анализа условий эксплуатации и формирования типовых полетных циклов авиационных ГТД. М.: ЦИАМ, 1987.
15. Идрисов Р. Т., Гишваров А. С. Анализ факторов, влияющих на формирование обобщенного цикла испытаний авиационных ГТД // Испытания авиационных двигателей: Межвуз. науч. сб. Уфа, 1986. № 14. С. 24–31.
16. Кузнецов Н. Д., Цейтлин В. И. Эквивалентные испытания газотурбинных двигателей. М.: Машиностроение, 1976. 216 с.
17. Майоров А. В., Патиюков Н. П. Планирование и проведение ускоренных испытаний на надежность устройств электронной автоматики. М.: Радио и связь, 1982. 144 с.
18. Методология проектирования авиадвигателей с учетом условий их использования и требований к ресурсу // Новое в зарубежном авиадвигателестроении. М., 1983. № 2. С. 9–14.
19. Новое в зарубежном авиадвигателестроении. М.: ЦИАМ, 1982. № 9. С. 1–17.
20. Новое в зарубежном авиадвигателестроении. М.: ЦИАМ, 1983. № 2. С. 9–26.
21. Новое в зарубежном авиадвигателестроении. М.: ЦИАМ, 1983. № 11. С. 4–8.
22. Новое в зарубежном авиадвигателестроении. М.: ЦИАМ, 1984. № 2. С. 12–18.
23. Салуквадзе М. Е. О задаче линейного профилирования с векторным критерием качества // Автоматика и телемеханика. 1972. № 5. С. 99–105.
24. Салуквадзе М. Е. Об оптимизации векторных функционалов // Автоматика и телемеханика. 1971. № 8. С. 5–15.
25. Солодовников В. В., Зверев В. Ю. Применение методов теории автоматического управления и многокритериальной оптимизации для автоматизации проектирования АСУ ТП. М.: Машиностроение, 1984. 48 с.
26. Lightner M. R., Director S. W. Multiple criterion optimization for the design of electronic circuits // IEEE Trans. on Circuits and Systems. 1981. Vol. CAS-28, № 3. P. 169–179.