

УДК 539.3

В. С. КУЛИКОВ, Т. Н. МАРДИМАСОВА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОБРАЗОВАНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ И УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ РАЗГРУЗКЕ

Излагаются теоретические основы и алгоритмы расчета остаточных напряжений в процессах упругопластического деформирования при сложном нагружении. Учитываются знакопеременные пластические деформации, формулируются условия возникновения упругопластической разгрузки. Итерационный процесс расчета строится не только по физической нелинейности материала, но и по характеру деформирования в расчетных точках тела. Краевые задачи решаются методом конечных элементов. *Остаточные напряжения; сложное нагружение; знакопеременные пластические деформации; упругопластическая разгрузка*

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Известные модели и алгоритмы расчета остаточных напряжений, формирующихся в процессах упругопластического деформирования, предполагают [1–5], что образование остаточного напряженного состояния происходит в два этапа. На первом из них под действием механических и тепловых нагрузок тело испытывает упругопластическое деформирование, на втором — происходит его разгрузка и охлаждение и формирование поля остаточных напряжений. Считается также, что оба этих процесса протекают в условиях «простого» нагружения, характеризующегося пропорциональным изменением компонентов тензоров напряжений и деформаций [1, 3, 4], а алгоритмы расчета остаточных напряжений строятся на основе теорем об упругой [1, 4, 5] или упругопластической [2, 4] разгрузке.

Между тем не исключается ситуация, когда в одних точках тела происходит активное нагружение и рост пластических деформаций и разгрузка — в других. Иными словами, реализуется «сложное» нагружение. «Сложное» нагружение, как правило, возникает при немонотонном изменении нагрузок и температур, чередовании силовых и температурных воздействий и сопровождается непропорциональным изменением компонентов тензоров напряжений и деформаций, сменой процессов активного нагружения ($d\sigma_i > 0$) и разгрузки ($d\sigma_i < 0$). В некоторых случаях оно

реализуется при больших и знакопеременных упругопластических деформациях [6].

При «сложном» нагружении известные [1, 4, 5] модели и алгоритмы расчета процессов образования остаточных напряжений теряют силу и необходим иной подход к их построению.

В работе принята следующая общая схема определения остаточных напряжений.

Процесс образования остаточных напряжений, включающий стадию упругопластического деформирования при сложном нагружении и последующую стадию упругой или упругопластической разгрузки, разбивается на достаточно малые этапы по параметрам нагружения или времени Δt_m , ($m = 1, 2, \dots, M$; M — число этапов нагружения). Тогда задача определения остаточных напряжений сводится к последовательному расчету напряженно-деформированного состояния (НДС) тела на выбранных этапах нагружения и разгрузки. При этом исходными данными для расчета каждого последующего m -го этапа являются параметры НДС тела в конце предыдущего ($m - 1$)-го этапа. Для первого этапа ($m = 1$) они соответствуют начальным условиям задачи.

На каждом расчетном этапе материал рассматривается как упругопластическое тело с характеристиками, не зависящими от температуры. Для заданных приращений внешних нагрузок и температур решается упругопластическая или упругая задача. Находятся приращения напряжений $\{\Delta_m \sigma\}$ и деформа-

ций $\{\Delta_m \varepsilon\}$, а затем — их полные значения

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^{(m)} &= \{\sigma\}^{(m-1)} + \{\Delta_m \sigma\}, \\ \{\varepsilon\}^{(m)} &= \{\varepsilon\}^{(m-1)} + \{\Delta_m \varepsilon\} \end{aligned} \quad (1)$$

в конце расчетного этапа.

Осуществляется переход к расчету следующего этапа и т. д. Расчет последнего M -го этапа дает значения остаточных напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \{\sigma^*\} &= \{\sigma\}^{(M-1)} + \{\Delta_M \sigma\}, \\ \{\varepsilon^*\} &= \{\varepsilon\}^{(M-1)} + \{\Delta_M \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Практическая реализация изложенной схемы расчета в работе осуществлена на базе изотермической теории пластического течения. Краевая задача решалась методом конечных элементов [7].

Предварительный анализ показал, что алгоритм расчета остаточных напряжений, формирующихся при сложном нагружении, должен учитывать ряд особенностей, основные из которых состоят в следующем:

Рассмотрение процесса образования остаточных напряжений как совокупности малых этапов нагружения и разгрузки требует представления основных соотношений выбранной теории пластичности в дифференциальной форме или, в первом приближении, — в малых конечных приращениях.

При сложном нагружении характер деформирования (упругое или упругопластическое; нагружение или разгрузка) в расчетных точках тела заранее не известен и подлежит установлению в процессе расчета. Таким образом, на каждом расчетном этапе необходимо построение итерационного процесса вычислений не только по физической нелинейности упругопластического материала, но и по характеру деформирования в расчетных точках тела.

Существенные отличия имеет и алгоритм расчета стадии разгрузки тела, которая моделируется приложением внешней нагрузки обратного знака и может протекать при упругих или упругопластических деформациях, «простом» или «сложном» нагружении. Отсюда следует, что алгоритм расчета должен предусматривать установление характера разгрузки (упругая или упругопластическая) и с учетом этого корректировать процесс вычислений.

Если стадии разгрузки предшествовало сложное многокомпонентное нагружение, то

существенное значение приобретают закономерности изменения компонентов нагружения в процессе разгрузки. При этом, как и при сложном нагружении, возможно непропорциональное изменение компонентов напряжений и деформаций, чередование нагружения или разгрузки в расчетных точках тела, т. е. возникновение «сложной разгрузки».

Понятно, что алгоритм расчета стадии разгрузки, на которой окончательно формируются остаточные напряжения, должен учитывать и эти особенности процесса разгрузки.

2. МОДЕЛИ И АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА

Для реализации изложенной выше схемы расчета остаточных напряжений с учетом особенностей процесса сложного нагружения воспользуемся изотермической теорией пластического течения [6, 8], представив приращение полной деформации в виде суммы

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} + \{d\varepsilon^T\} \quad (3)$$

упругой, пластической и температурной составляющих соответственно.

В теории пластического течения [8] постулируется, что приращение компонентов пластической деформации $\{d\varepsilon^p\}$ пропорционально компонентам вектора-девиатора напряжений $\{S\}$, т. е.

$$\{d\varepsilon^p\} = F_\sigma(\sigma_i) d\sigma_i \{S\}, \quad (4)$$

где $F_\sigma(\sigma_i)$ — некоторая функция, зависящая от интенсивности напряжений σ_i ; $d\sigma_i$ — приращение интенсивности напряжений. Поскольку, как показывают эксперименты [6, 8], при активном нагружении пластические деформации слабо зависят от «истории» нагружения и последовательности изменения напряжения и температуры, постулируется также существование единой обобщенной поверхности пластического деформирования, уравнение которой может быть представлено в виде

$$\Phi(\sigma_i, \varepsilon_{i*}^p, T) = 0, \quad (5)$$

где ε_{i*}^p — интенсивность накопленной пластической деформации; σ_i — интенсивность напряжений; T — температура. При постоянной температуре $T = \text{const}$ сечение этой поверхности совпадает с обобщенной кривой деформирования

$$f(\sigma_i, \varepsilon_{i*}^p) = 0, \quad (6)$$

откуда следует, что накопленная пластическая деформация ε_{i*}^p для любых видов нагруженного состояния определяется одной и той

же функцией f интенсивности напряжений σ_i . Это позволяет строить кривые (6) и поверхности (5), а также установить вид функции $F_\sigma(\sigma_i)$, используя опыты на простое растяжение.

При простом растяжении

$$\sigma_i = \sigma_0, \quad \varepsilon_{i*}^p = \varepsilon_0^p, \quad S_x = \frac{2}{3}\sigma_0, \quad (7)$$

откуда следует, что приращение пластической деформации

$$d\varepsilon_0^p = d\varepsilon_0 - d\varepsilon_0^e = \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_0, \quad (8)$$

а функция напряженного состояния

$$F_\sigma(\sigma_i) = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right), \quad (9)$$

где $E_k = d\sigma_0/d\varepsilon_0$ — касательный модуль кривой деформирования (рис. 1).

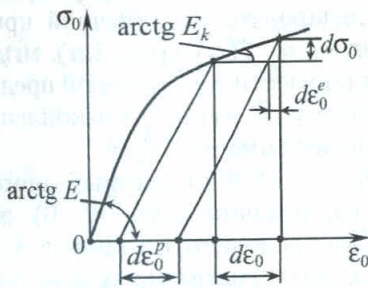


Рис. 1

Основное уравнение (4) теории пластического течения приобретает вид

$$\{d\varepsilon^p\} = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i \{S\}, \quad (10)$$

или

$$\{d\varepsilon^p\} = \frac{3}{2\sigma_i} d\varepsilon_{i*}^p \{S\}, \quad (11)$$

где

$$d\varepsilon_{i*}^p = \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) d\sigma_i \quad (12)$$

представляет собой интенсивность приращений компонентов пластической деформации.

Для линейризации упругопластической задачи воспользуемся методом переменных параметров упругости [9–11], представив соотношение (3) в форме уравнения упругости

$$\{d\varepsilon\} = [a^*]\{d\sigma\} + \{d\varepsilon^T\}, \quad (13)$$

где принято, что приращения упругой и пластической деформации

$$\{d\varepsilon^e\} = [a]^e \{d\sigma\}, \quad \{d\varepsilon^p\} = [a]^p \{d\sigma\}, \quad (14)$$

т. е. матрица переменных параметров упругости $[a]^*$ представляет собой сумму

$$[a^*] = [a]^e + [a]^p \quad (15)$$

матрицы $[a]^e$ обычных параметров упругости (E, ν) и матрицы $[a]^p$ параметров (коэффициентов) пластичности a_{kl}^p , зависящих от напряженного состояния. Отсюда следует, что представление (13) соответствует упругому анизотропному телу с переменными параметрами упругости, определяемыми матрицей $[a]^*$.

Для нахождения параметров пластичности a_{kl}^p приравняем приращение пластической деформации $\{d\varepsilon^p\}$ из формул (14) и (4). Получим уравнение

$$[a]^p \{d\sigma\} = F_\sigma(\sigma_i) d\sigma_i \{S\} \quad (16)$$

для определения элементов матрицы $[a]^p$.

Рассматривая в этом уравнении приращение $d\sigma_i$ интенсивности напряжений σ_i как функции многих переменных — компонентов напряжений ($\sigma_i = \sigma_i(\sigma_{ij})$), найдем

$$d\sigma_i = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \dots + \frac{\partial \sigma_i}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \dots, \quad (x, y, z), \quad (17)$$

затем из уравнений (16) — искомые коэффициенты пластичности

$$a_{kl}^p = F_\sigma(\sigma_i) \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}^{(l)}} S_{ij}^{(k)}, \quad (18)$$

где индексы (k, l) в правой части представляют собой номера элементов (строк) в матрицах $\{S\} = \{S_x, \dots, \tau_{xy}, \dots\}^T$ и $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots\}^T$ соответственно. Производную $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}^{(l)}}$ в формуле (18) можно определить, дифференцируя интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \dots + 6(\tau_{xy}^2 + \dots)]} \quad (19)$$

(x, y, z)

по компонентам напряжений. Получим

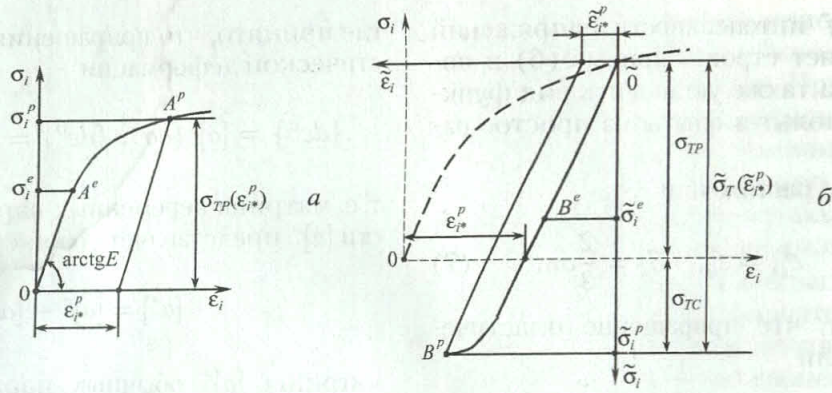


Рис. 2. К анализу характера нагружения деформации в расчетных точках тела:
а — нагружение; б — разгружение

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}^{(l)}} = \begin{cases} \frac{2}{3\sigma_i} (\sigma_{ij}^{(l)} - \sigma) & \text{при } i=j, l=1, 2, 3, \\ \frac{3}{2\sigma_i} 2\tau_{ij}^{(l)} & \text{при } i \neq j, l=4, 5, 6, \end{cases} \quad (20)$$

где $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$ — среднее напряжение.

Из уравнений (18) и (20) ясно, что матрица $[a]^p$ обладает свойством симметрии: $a_{kl}^p = a_{lk}^p$. Это же свойство присуще и матрице $[a^*]$ переменных параметров упругости ($a_{ij}^* = a_{ji}^*$).

Существенно, что параметры упругости a_{ij}^* зависят от напряженного состояния и могут быть определены лишь в процессе последовательных приближений. Однако для реализации этого процесса путем подбора переменных параметров упругости и последующего расчета этапа нагружения (разгружения) необходимо знать характер деформации (упругая или упругопластическая) в расчетных точках тела, который в силу специфики процесса упругопластического деформирования при сложном нагружении заранее неизвестен и подлежит определению в процессе вычислений.

Для решения этой задачи предварительно по знаку приращения $d\sigma_i$ (17) интенсивности напряжений σ_i устанавливается, что происходит в расчетных точках тела: нагружение или разгружение. При этом для практических расчетов зависимость (17) с учетом (20) представляется в форме

$$d\sigma_i = \frac{3}{2\sigma_i} [(\sigma_x - \sigma)d\sigma_x + \dots + 2\tau_{xy}d\tau_{xy} + \dots], \quad (21)$$

(x, y, z).

Если в исследуемой точке $d\sigma_i > 0$, то в ней происходит нагружение и упругое или упругопластическое деформирование; при $d\sigma_i < 0$

— разгружение, которое также может быть упругим и упругопластическим.

Условимся далее, что в точках, где на всем пути деформирования, предшествующем рассматриваемому моменту, имело место нагружение ($d\sigma_i > 0$), характер деформирования будем анализировать по обычной кривой нагружения $\sigma_i = f(\epsilon_i)$ (рис. 2, а), мгновенные пределы текучести σ_{TR} которой представлять функцией $\sigma_{TR} = \sigma_{TR}(\epsilon_{i*}^p)$ накопленной пластической деформации ϵ_{i*}^p .

В точках, где в некоторый момент произошло разгружение ($d\sigma_i < 0$), этот анализ удобно проводить по кривой $\tilde{\sigma}_i = f(\tilde{\epsilon}_i)$ (рис. 2, б), полученной на основе опытов на растяжение с последующей разгрузкой и сжатием образцов. Начало координат этой кривой будем помещать в точку $\tilde{0}$, соответствующую мгновенному пределу текучести при растяжении $\sigma_{TR}(\epsilon_{i*}^p)$ и накопленной перед разгрузкой пластической деформации ϵ_{i*}^p . Мгновенные пределы текучести $\tilde{\sigma}_T$, представляющие собой сумму

$$\tilde{\sigma}_T = \sigma_{TR} + \sigma_{TC} \quad (22)$$

мгновенных пределов текучести материала при растяжении σ_{TR} и сжатии σ_{TC} , можно определять по накопленной пластической деформации ϵ_{i*}^p (рис. 2, б).

Отметим, что введение условного деления расчетных точек тела и соответствующих им кривых нагружения и разгружения удобно для анализа упругопластической разгрузки и чередующихся процессов нагружения и разгружения, характерных для сложного нагружения.

Рассмотрим теперь, как устанавливается характер деформации (упругая или упругопластическая) в расчетных точках тела.

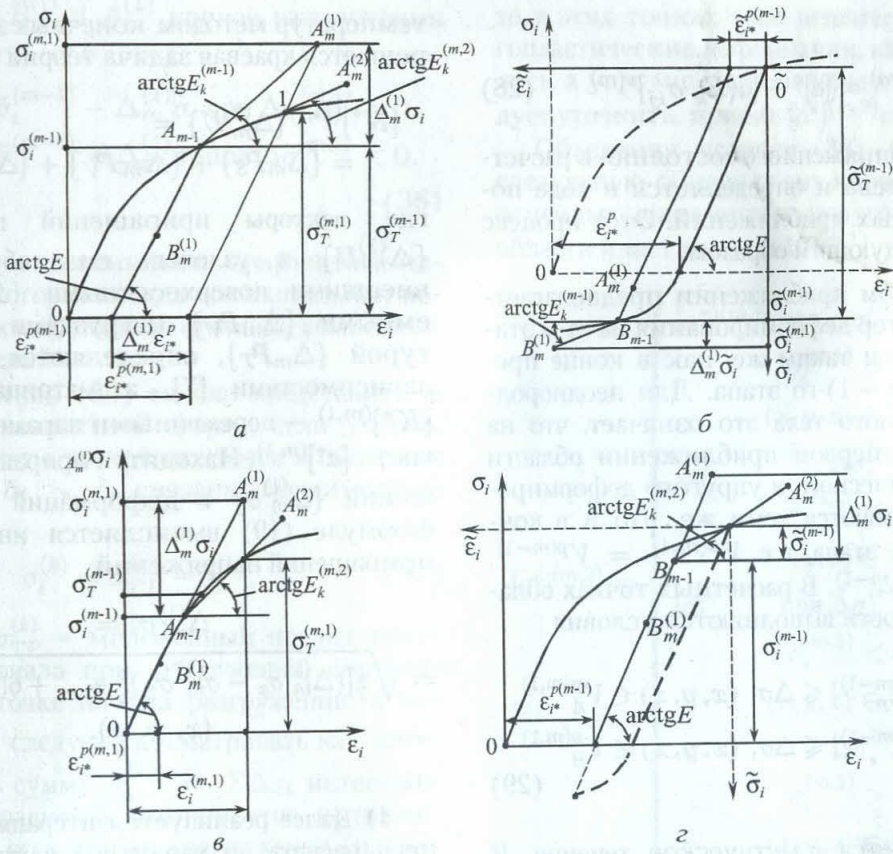


Рис. 3. Схема расчета этапа методом переменных параметров упругости: а, б — в точках области пластичности; в, г — в точках области упругости

Если в точках кривой нагружения (рис. 2, а) с необходимой точностью $\Delta\sigma$ выполняется условие

$$|\sigma_i - \sigma_{TP}| \leq \Delta\sigma, (x, y, z) \in V_A^P, \quad (23)$$

то в этих точках имело место пластическое течение и совокупность таких точек (A^P на рис. 2, а) относится к области пластичности V_A^P .

При условии

$$\sigma_i < \sigma_{TP}, (x, y, z) \in V_A^e, \quad (24)$$

рассматриваемые точки (A^e на рис. 2, а) относятся к области упругости V_A^e .

Аналогичным образом для точек кривой разгрузки (точки B^P и B^e , рис. 2, б) при условии

$$|\tilde{\sigma}_i - \tilde{\sigma}_T| \leq \Delta\sigma, (x, y, z) \in V_B^P \quad (25)$$

точки образуют область пластичности V_B^P , а если

$$\tilde{\sigma}_i < \tilde{\sigma}_T, (x, y, z) \in V_B^e, \quad (26)$$

в рассматриваемых точках имеет место упругое деформирование и они относятся к области упругости V_B^e .

Таким образом, при расчете процесса образования остаточных напряжений в условиях сложного нагружения в общем случае получим по две зоны упругости $V_A^e + V_B^e = V^e$ и пластичности $V_A^P + V_B^P = V^P$.

На основе изложенных соображений построим теперь алгоритм решения упруго-пластической задачи на некотором m -м этапе нагружения, полагая, что известны параметры напряженно-деформированного состояния $(\{\sigma\}^{(m-1)}, \{S\}^{(m-1)}, \sigma_i^{(m-1)}, \sigma_{TP}^{(m-1)}, \tilde{\sigma}_i^{(m-1)}, \varepsilon_i^{(m-1)}, \varepsilon_{i*}^{(m-1)}, \varepsilon_{i*}^{p(m-1)}, \tilde{\varepsilon}_{i*}^{p(m-1)})$ в расчетных точках тела в конце предыдущего $(m-1)$ -го этапа.

Приращение полной деформации на m -м этапе представим в форме уравнения упругости

$$\{\Delta_m \varepsilon\} = [a^*]^{(m)} \{\Delta_m \sigma\} + \{\Delta_m \varepsilon^T\}, \quad (27)$$

в котором матрица переменных параметров упругости

$$[a^*]^{(m)} = [a]^e + [a(E_k^i \sigma_{ij}^i)]^{p(m)} \quad (28)$$

зависит от напряженного состояния в расчетных точках тела и определяется в ходе последовательных приближений. Этот процесс строится следующим образом:

1) В первом приближении предполагается, что характер деформирования на m -м этапе сохраняется таким же, как в конце предыдущего $(m-1)$ -го этапа. Для неоднородно-напряженного тела это означает, что на m -м этапе в первом приближении области упругопластического и упругого деформирования принимаются теми же, что и в конце $(m-1)$ -го этапа, т.е. $V^{p(m,1)} = V^{p(m-1)}$, $V^{e(m,1)} = V^{e(m-1)}$. В расчетных точках области пластичности выполняются условия

$$\begin{aligned} |\sigma_I^{(m-1)} - \sigma_{TP}^{(m-1)}| &\leq \Delta\sigma, (x, y, z) \in V_A^{p(m,1)}, \\ |\tilde{\sigma}_i^{(m-1)} - \tilde{\sigma}_T^{(m-1)}| &\leq \Delta\sigma, (x, y, z) \in V_B^{p(m,1)} \end{aligned} \quad (29)$$

и предполагается пластическое течение. В остальных точках, где справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(m-1)} &< \sigma_{TP}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_A^{e(m,1)}, \\ \tilde{\sigma}_i^{(m-1)} &< \tilde{\sigma}_T^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_B^{e(m,1)} \end{aligned} \quad (30)$$

деформации считаются упругими.

Напряженно-деформированное состояние в расчетных точках тела в начале этапа характеризуют точки A_{m-1} и B_{m-1} на рис. 3.

2) В соответствии с принятым характером нагружения в расчетных точках тела определяются переменные параметры первого приближения

$$[a^*]^{(m,1)} = \begin{cases} [a(E, \nu)]^e + \\ + [a(E_k^{(m-1)}, \sigma_{ij}^{(m-1)})]^{p(m,1)}, \\ (x, y, z) \in V^{p(m,1)}, \\ [a(E, \nu)]^e, (x, y, z) \in V^{e(m,1)}, \end{cases} \quad (31)$$

где матрица $[a]^{p(m,1)}$ рассчитана по напряженному состоянию в конце $(m-1)$ -го этапа, что вполне допустимо для малых этапов нагружения.

3) При выбранных параметрах упругости и известных приращениях внешних нагрузок и

температур методом конечных элементов [7] решается краевая задача теории упругости

$$\begin{aligned} [K^*]^{(m,1)} \{\Delta_m^{(1)} U\} = \\ = \{\Delta_m P_S\} + \{\Delta_m P_V\} + \{\Delta_m P_T\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где векторы приращений перемещений $\{\Delta_m^{(1)} U\}$ и узловых сил, обусловленных внешними поверхностными $\{\Delta_m P_S\}$, объемными $\{\Delta_m P_V\}$ нагрузками и температурой $\{\Delta_m P_T\}$, определяются известными зависимостями [7], а матрица жесткости $[K^*]^{(m,1)}$ — переменными параметрами упругости $[a^*]^{(m,1)}$. Находятся приращения напряжений $\{\Delta_m^{(1)} \sigma\}$ и деформаций $\{\Delta_m^{(1)} \epsilon\}$. По формуле (19) вычисляется интенсивность приращений напряжений

$$\begin{aligned} \Delta_m^{(1)} \sigma_i = \\ = \sqrt{\frac{1}{2} [(\Delta_m^{(1)} \sigma_x - \sigma_m^{(1)} \sigma_y)^2 + \dots + 6(\Delta_m^{(1)} \tau_{xy}^2 + \dots)]}, \\ (x, y, z). \end{aligned} \quad (33)$$

4) Далее реализуется итерационный процесс расчета по характеру нагружения или разгружения в расчетных точках тела и уточняются значения переменных параметров упругости.

С этой целью в расчетных точках предварительно находится приращение интенсивности напряжений $\Delta\sigma_i^{(m,1)}$ в связи с приращением компонент напряжений. Из соотношения (21) следует, что в конечных приращениях эта величина находится так:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_i^{(m,1)} = \frac{3}{2\sigma_i^{(m-1)}} [(\sigma_x - \sigma)^{(m-1)} \Delta_m^{(1)} \sigma_x + \dots \\ \dots + 2\tau_{xy}^{(m-1)} \Delta_m^{(1)} \tau_{xy} + \dots], \quad (x, y, z). \end{aligned} \quad (34)$$

По знаку $\Delta\sigma_i^{(m,1)}$ в расчетных точках тела устанавливается характер деформирования. Если $\Delta\sigma_i^{(m,1)} > 0$, то в точке происходит нагружение, при $\Delta\sigma_i^{(m,1)} < 0$ — разгружение.

С учетом этого найдем интенсивность напряжений в первом приближении. Для точек $A_m^{(1)}$ и $B_m^{(1)}$ кривой нагружения (рис. 3, а, в) получаем

$$\sigma_i^{(m,1)} = \begin{cases} \sigma_i^{(m-1)} + \Delta_m^{(1)} \sigma_i \text{ при } \Delta\sigma_i^{(m,1)} > 0, \\ \sigma_i^{(m-1)} - \Delta_m^{(1)} \sigma_i \text{ при } \Delta\sigma_i^{(m,1)} < 0, \end{cases} \quad (35)$$

а для точек $B_m^{(1)}$ и $A_m^{(1)}$ кривой разгрузки (рис. 3, б, з) —

$$\tilde{\sigma}_i^{(m,1)} = \begin{cases} \tilde{\sigma}_i^{(m-1)} - \Delta_m^{(1)} \sigma_i & \text{при } \Delta \sigma_i^{(m,1)} > 0, \\ \tilde{\sigma}_i^{(m-1)} + \Delta_m^{(1)} \sigma_i & \text{при } \Delta \sigma_i^{(m,1)} < 0, \end{cases} \quad (36)$$

где $\Delta_m^{(1)} \sigma_i$ — интенсивность приращений напряжений, которая всегда положительная величина как квадратичная функция компонентов напряжений.

Соотношения (36) можно представить в другой, эквивалентной форме, если учесть, что координаты расчетных точек в системах $\sigma_i \sim \varepsilon_i$ и $\tilde{\sigma}_i \sim \tilde{\varepsilon}_i$ связаны зависимостью (рис. 3)

$$\sigma_i^{(k)} = \sigma_{TP}^{(k)} - \tilde{\sigma}_i^{(k)}, \quad (37)$$

в которой $\sigma_{TP}^{(k)}$ — мгновенный предел текучести материала при растяжении, соответствующий точке начала разгрузки, а величину $\tilde{\sigma}_i^{(k)}$ следует рассматривать как алгебраическую сумму $\tilde{\sigma}_i^{(k)} = \Sigma \Delta \sigma_i$ интенсивностей приращений компонентов напряжений $\Delta \sigma_i$ на всех этапах разгрузки (нагрузки), предшествующих рассматриваемому. При этом условия (36) и (35) совпадут, хотя величина $\sigma_i^{(k)}$ для точек кривой разгрузки может оказаться и отрицательной и должна сравниваться с пределом текучести материала σ_{TC} при сжатии (рис. 3).

По найденным значениям $\sigma_i^{(m,1)}$ и $\Delta \sigma_i^{(m,1)}$ анализируется характер деформации в расчетных точках.

Если в точках выбранной в первом приближении области пластичности $V^{p(m,1)} = V_A^{p(m,1)} + V_B^{p(m,1)}$ («пластические» точки) выполняются условия

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_i^{(m,1)} > 0, \sigma_i^{(m,1)} > \sigma_{TP}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_A^{p(m,1)}, \\ \Delta \sigma_i^{(m,1)} < 0, \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{TC}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_B^{p(m,1)}, \end{aligned} \quad (38)$$

то в этих точках имело место пластическое течение, принятый и действительный характер деформации совпадают. Корректировки переменных параметров упругости для следующей итерации не требуется ($[a^*]^{(m,2)} = [a^*]^{(m,1)}$). Если же в некоторых точках

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_i^{(m,1)} < 0, \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{TP}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_A^{p(m,1)}, \\ \Delta \sigma_i^{(m,1)} > 0, \sigma_i^{(m,1)} > \sigma_{TC}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_B^{p(m,1)}, \end{aligned} \quad (39)$$

то в этих точках тело испытывало не упруго-пластические деформации, как предполагалось, а упругие. Переменные параметры следует уточнить, приняв $[a^*]^{(m,2)} = [a]^e$.

Объединяя условия (38), (39), получим следующую общую схему корректировки переменных параметров упругости в точках области пластичности $V^{p(m,1)}$:

$$[a^*]^{(m,2)} = \begin{cases} [a^*]^{(m,1)} & \text{при } \Delta \sigma_i^{(m,1)} > 0, \\ \sigma_i^{(m,1)} > \sigma_{TP}^{(m-1)}, \\ (x, y, z) \in V_A^{p(m,1)}, \\ \Delta \sigma_i^{(m,1)} < 0, \\ \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{TC}^{(m-1)}, \\ (x, y, z) \in V_B^{p(m,1)}, \\ [a]^e & \text{при } \Delta \sigma_i^{(m,1)} < 0, \\ \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{TP}^{(m-1)}, \\ (x, y, z) \in V_A^{p(m,1)}, \\ \Delta \sigma_i^{(m,1)} > 0, \\ \sigma_i^{(m,1)} > \sigma_{TC}^{(m-1)}, \\ (x, y, z) \in V_B^{p(m,1)}. \end{cases} \quad (40)$$

Аналогичный анализ проводится и для точек принятой в первом приближении области $V^{e(m,1)} = V_A^{e(m,1)} + V_B^{e(m,1)}$ упругих деформаций («упругие» точки). В результате получаем следующую схему уточнения переменных параметров упругости:

$$[a^*]^{(m,2)} = \begin{cases} [a^*]^{(m,1)} = [a]^e & \text{при } \Delta \sigma_i^{(m,1)} > 0, \\ \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{TP}^{(m-1)}, \\ (x, y, z) \in V_A^{e(m,1)}, \\ \Delta \sigma_i^{(m,1)} < 0, \\ \sigma_i^{(m,1)} > \sigma_{TC}^{(m-1)}, \\ (x, y, z) \in V_B^{e(m,1)}, \\ [a^*(E_k^{(m,2)}, \sigma_{ij}^{(m-1)})] & \text{при} \\ \Delta \sigma_i^{(m,1)} < 0, \\ \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{TP}^{(m-1)}, \\ (x, y, z) \in V_A^{e(m,1)}, \\ \Delta \sigma_i^{(m,1)} < 0, \\ \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{TC}^{(m-1)}, \\ (x, y, z) \in V_B^{e(m,1)}. \end{cases} \quad (41)$$

где учтено, что в некоторых точках вместо предполагаемой упругой деформации наблюдалась пластическая, и параметры упругости уточнены по новому значению касательного модуля $E_k^{(m,2)}$ (рис. 3, в, z), который найден по формуле

$$E_k^{(m,2)} = \frac{\sigma_T(\varepsilon_i^{(m,1)}) - \sigma_i^{(m-1)}}{\varepsilon_i^{(m,1)} - \varepsilon_i^{(m-1)}}, \quad (42)$$

где интенсивность деформаций первого приближения $\varepsilon_i^{(m,1)} = \varepsilon_i^{(m-1)} + \Delta_m^{(1)}\varepsilon_i$, причем интенсивность приращений компонентов деформаций

$$\Delta_m^{(1)}\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{(\Delta_m^{(1)}\varepsilon_x - \Delta_m^{(1)}\varepsilon_y)^2 + \dots + \frac{3}{2}(\Delta_m^{(1)}\gamma_{xy} + \dots)}, \quad (x, y, z). \quad (43)$$

С уточненными значениями переменных параметров упругости $[a^*]^{(m,2)}$ вновь решается упругая задача; находятся приращения компонентов напряжений $\{\Delta_m^{(2)}\sigma\}$ и деформаций $\{\Delta_m^{(2)}\varepsilon\}$ во втором приближении. Вычисляются интенсивность приращений напряжений $\Delta_m^{(2)}\sigma_i$ и приращение $\Delta\sigma_i^{(m,2)}$ интенсивности напряжений.

По схемам (40), (41) снова анализируется характер деформирования в расчетных точках тела, уточняются переменные параметры упругости. И так далее — вплоть до совпадения принятого и расчетного характера деформирования.

5) Если следовать обычной процедуре метода переменных параметров упругости в теории пластического течения [10, 11], то на этом расчет m -го этапа следует завершить и перейти к расчету следующего. Однако может оказаться, что в «пластических» условие (23) нарушено и эти точки не лежат на кривой деформирования. Поэтому требуется корректировка переменных параметров упругости и повторение расчета m -го этапа. Иными словами, необходим итерационный процесс расчета по физической нелинейности материала.

Для его реализации рассчитываются полные напряжения и деформации в конце этапа

$$\begin{aligned} \{\sigma\}^{(m)} &= \{\sigma\}^{(m-1)} + \{\Delta_m\sigma\}, \\ \{\varepsilon\}^{(m)} &= \{\varepsilon\}^{(m-1)} + \{\Delta_m\varepsilon\}, \end{aligned} \quad (44)$$

а также интенсивность напряжений $\sigma_i^{(m)}$ по формуле (19). Определяется приращение интенсивности накопленной пластической деформации

$$\Delta_m\varepsilon_{i*}^p = \left(\frac{1}{E_k^{(m-1)}} - \frac{1}{E} \right) \Delta_m^{(1)}\sigma_i, \quad (45)$$

затем — ее полное значение в конце этапа

$$\varepsilon_{i*}^{p(m)} = \varepsilon_{i*}^{p(m-1)} + \Delta_m\varepsilon_{i*}^p. \quad (46)$$

По этой величине находится мгновенный предел текучести $\sigma_T^{(m)} = \sigma_T(\varepsilon_{i*}^{p(m)})$.

Проверяются условия окончания расчета m -го этапа:

$$\begin{aligned} |\sigma_i^{(m)} - \sigma_T^{(m)}| &\leq \Delta\sigma, \quad (x, y, z) \in V^{p(m)}; \\ \sigma_i^{(m)} &< \sigma_T^{(m)}, \quad (x, y, z) \in V^e(m). \end{aligned} \quad (47)$$

При их выполнении расчет этапа заканчивается и осуществляется переход к расчету следующего. В противном случае в «пластических» точках корректируются переменные параметры упругости по схеме (41) и повторяется расчет этапа. И так далее — вплоть до выполнения условий (47).

6) По описанному алгоритму рассчитываются все этапы нагружения ($m = 1, 2, \dots, M$), а на последнем — находятся остаточные напряжения и деформации

$$\begin{aligned} \{\sigma^*\} &= \{\sigma\}^{(M-1)} + \{\Delta_M\sigma\}, \\ \{\varepsilon^*\} &= \{\varepsilon\}^{(M-1)} + \{\Delta_M\varepsilon\}. \end{aligned} \quad (48)$$

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Работоспособность и эффективность предложенных алгоритмов и программ их реализации предварительно оценена и подтверждена на основе решения тестовых задач расчета процессов упругопластического деформирования и образования остаточных напряжений при простом нагружении. Затем решен ряд задач определения остаточных напряжений, формирующихся при сложном нагружении и упругопластической разгрузке.

Рассмотрен случай образования остаточных напряжений при двухосном растяжении и упругой разгрузке пластины конечных размеров (60×60) с центральным отверстием ($\varnothing 10$ мм) из материала ХН77ТЮР ($\sigma_T = 570$ МПа).

Расчеты показали (рис. 4), что при одновременном приложении усилий p_x и p_y (простое нагружение) пластина испытывает упругие деформации и после разгрузки остаточные напряжения в ней не возникают.

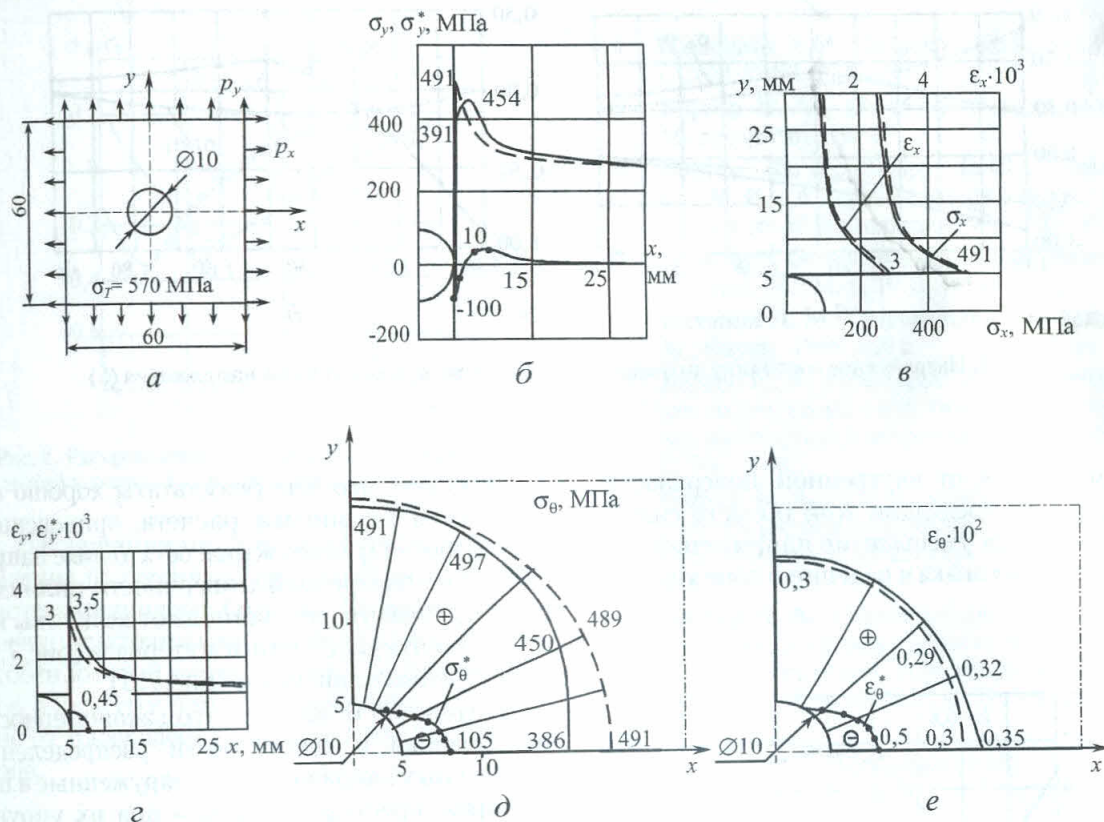


Рис. 4. НДС и остаточные напряжения в пластине: - - - - простое нагружение; — — — сложное нагружение; ●—●—●— остаточные напряжения и деформации

Принципиально иная картина наблюдается, если пластина нагружается сначала усилием p_y , затем $-p_x$. Это типичный случай сложного немоного нагружения, при котором в пластине возникают пластические деформации, хотя конечные значения внешних нагрузок такие же, как в предыдущем варианте расчета. После упругой разгрузки пластина находится в остаточном напряженно-деформированном состоянии (рис. 4).

Подобное различие между закономерностями образования остаточных напряжений и деформаций при простом и сложном упруго-пластическом деформировании пластины имеет место и в при других случаях сложного нагружения пластины.

Другой пример относится к расчету остаточных напряжений, возникающих в цилиндре после его нагружения внутренним давлением и последующей упруго-пластической разгрузки. Рассмотрен цилиндр с отношением радиусов $v/a = 2,5$ и коэффициентом упрочнения материала $k = 1 - E_k/E = 0,6$, где E_k — касательный модуль кривой упрочнения с линейным участком упрочнения.

Установлено, что при внутреннем давлении p_a , превышающем давление $p_{aT} \approx$

$b^2 - a^2 / \sqrt{3} b^2 \sigma_T$ начала текучести, на внутренней поверхности цилиндра в области ($a \leq r \leq r_T$), ограниченной радиусом r_T , в цилиндре возникают пластические деформации, а при разгрузке — остаточные напряжения.

При давлениях ($p_{aT} \leq p_a \leq p_{aT}^*$), не превышающих некоторой величины p_{aT}^* (для $v/a = 2,5$ и $k = 0,6$, $p_{aT}^* = 0,82\sigma_T$) разгрузка цилиндра происходит упруго и распределение остаточных напряжений соответствует показанному на рис. 5.

Если $p_a > p_{aT}^*$, то при разгрузке, как и при нагружении, возникают пластические деформации, называемые «вторичными» [2, 3]. Иными словами, происходит упруго-пластическое разгружение.

Картина распределения остаточных напряжений по ширине цилиндра резко меняется (сплошные линии на рис. 6) и существенно отличается от рассчитанной по модели упругого разгружения (пунктир на рис. 6, $p_a = 0,82\sigma_T$).

В области «вторичных» пластических деформаций с увеличением радиуса заметно растут сжимающие окружные напряжения σ_φ^* , причем с увеличением давления их макси-

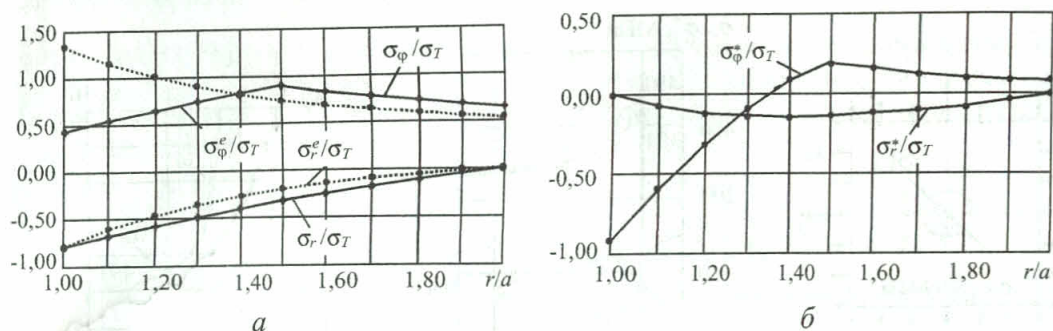


Рис. 5. Напряженное состояние цилиндра под нагрузкой (а) и остаточные напряжения (б)

мум смещается от внутренней поверхности цилиндра. За пределами этой области сначала наблюдается уменьшение напряжений, затем — смена их знака и падение в зоне упругости.

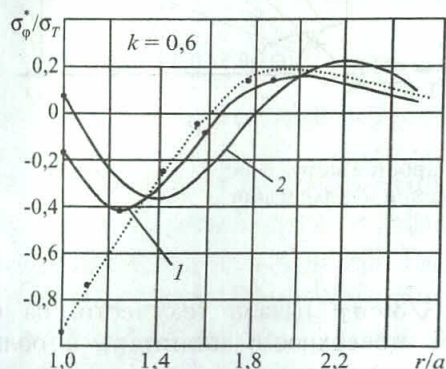


Рис. 6. Распределение остаточных напряжений по толщине цилиндра (σ_r^* не показаны ввиду малости): 1 — $p_a = 1,35\sigma_T$; 2 — $p_a = 1,62\sigma_T$

Заметим, что эти результаты хорошо согласуются с данными расчета, приведенными в работе [2]. Окружные остаточные напряжения на внутренней поверхности цилиндра ($r = a$) существенно зависят от величины коэффициента упрочнения материала (рис. 7, а) и внутреннего давления (рис. 7, б).

Интересно отметить, что закономерности образования и особенности распределения остаточных напряжений, обнаруженные в цилиндрах, присущи и дискам при их упруго-пластическом разгрузке.

На рис. 8 в качестве примера показано распределение остаточных напряжений, возникающих после нагружения диска давлениями $p_a = 1,35\sigma_T$ (кривая 1) и $p_a = 2,02\sigma_T$ (кривая 2), при которых появляются «вторичные» пластические деформации при разгрузке. И в данном случае обнаруживается существенное отличие этих результатов от рассчитываемых по модели упругой разгрузки.

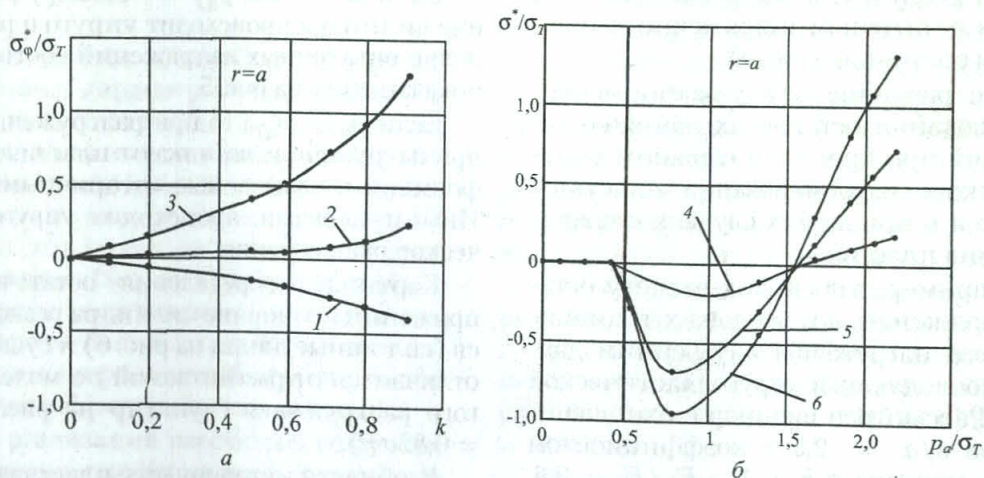


Рис. 7. Зависимость окружных остаточных напряжений от коэффициента упрочнения (а) и внутреннего давления (б): 1 — $p_a = 1,35\sigma_T$; 2 — $p_a = 1,62\sigma_T$; 3 — $p_a = 2,16\sigma_T$; 4 — $k = 0,5$; 5 — $k = 0,7$; 6 — $k = 0,9$

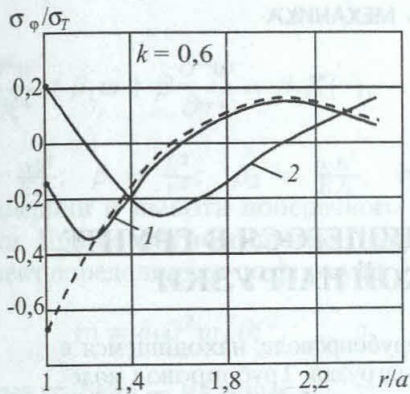


Рис. 8. Распределение окружных остаточных напряжений в диске: 1 — $p_a = 1,35\sigma_T$; 2 — $p_a = 2,02\sigma_T$

Наглядно видно также качественное совпадение полученных результатов с данными расчета цилиндров (рис. 8). Различие лишь в уровне остаточных напряжений, что связано с особенностями напряженного состояния дисков, близкого к плосконапряженному, в отличие от плоскодеформированного для цилиндров.

ВЫВОДЫ

Приведенные результаты убедительно доказывают, насколько существенно различие в характере распределения и уровне остаточных напряжений, рассчитанных по предлагаемой методике, учитывающей реальный характер нагружения и разгрузки тела, от общепринятой, основанной на модели простого упругопластического деформирования и упругой разгрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильюшин А. А.** Некоторые вопросы теории пластических деформаций // Прикладная математика и механика. 1943. Т. 7, вып. 4. С. 245-272.
2. **Москвитин В. В.** О вторичных пластических деформациях // Прикладная математика и механика. 1952. Т. 14, вып. 3. С. 31-35.
3. **Шевченко Ю. Н.** Термопластичность при переменных нагружениях. Киев: Наукова думка, 1970. 281 с.

4. **Ильюшин А. А.** Пластичность. М.: Изд. АН СССР, 1963. 272 с.
5. **Биргер И. А.** Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963.
6. **Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Демьянушко И. В. и др.** Термопрочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1975. 455 с.
7. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
8. **Качанов Л. М.** Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
9. **Биргер И. А.** Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикладная математика и механика. 1951. Т. 15, вып. 6. С. 765-770.
10. **Биргер И. А.** Расчет конструкций с учетом пластичности и ползучести // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Механика. 1965. № 2. С. 113-119.
11. **Биргер А. А.** Общие алгоритмы решения задач упругости, пластичности и ползучести // Успехи механики деформируемых тел: Сб. статей. М.: Наука, 1975. С. 51-78.

ОБ АВТОРАХ



Куликов Владимир Сергеевич, профессор кафедры сопротивления материалов УГАТУ. Дипл. инж.-механик (УАИ, 1964), д-р техн. наук по тепловым двигателям ЛА (защ. в ПермГТУ, 1994). Исследования в области механики деформируемых тел и конструкций.



Мардимасова Тамара Николаевна, доцент той же кафедры. Дипл. инж.-электромеханик по авиационным приборам (УАИ, 1971), канд. техн. наук по динамике и прочности (УАИ, 1977). Исследования в области механики деформируемых тел и конструкций.