

УДК 539.3

Р. Г. ЯКУПОВ

РЕАКЦИЯ ТРУБОПРОВОДА, НАХОДЯЩЕГОСЯ В ГРУНТЕ, НА ДЕЙСТВИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Рассматриваются напряжения и деформации в трубопроводе, находящемся в грунте, при действии поперечной динамической нагрузки. Трубопровод моделирован балкой на упругом основании. Используя преобразование Лапласа, решено уравнение движения теории изгиба балок. Несобственные интегралы определены численно. Приведены графики изменения изгибающего момента и прогиба в зависимости от времени и продольной координаты. Для момента в заделке получено аналитическое выражение. *Трубопровод; напряжения; деформации; изгибающий момент*

ВВЕДЕНИЕ

Поперечный удар по балке исследован в ряде работ [1–5] и др. Большое число публикаций связано с тем, что рассмотрены уравнения движения на основе теории изгиба балок и теории балок Тимошенко при различных случаях нагружения. Решены уравнения движения, записанные в компонентах перемещения, в перемещениях и напряжениях, совместно с соотношениями между напряжениями и перемещениями, а также в форме, допускающей исследование упругой балки из материала с неоднородными упругими свойствами. Использованы методы интегрального преобразования и характеристик.

Известно, что если в уравнениях типа Тимошенко, описывающих осесимметричное движение круговой цилиндрической оболочки, нормальное продольное усилие принять равным нулю, то уравнения имеют такой же вид, как и уравнения движения балки на упругом основании. Поэтому задача о поперечном ударе по балке тесно связана с задачей о напряженном состоянии круговой цилиндрической оболочки.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются напряжения и деформации в полубесконечной балке, находящейся в грунте, при действии поперечной равномерно распределенной динамической нагрузки

$$p(t) = p_0 H(t), \quad H(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

В начальном сечении балка имеет опорное устройство в виде неподвижного шарни-

ра или заделки. Окружающий трубопровод грунт моделируем двусторонним основанием Винклера и силу сопротивления грунта определяем по формуле

$$q = \alpha \cdot W,$$

где α — коэффициент основания; W — прогиб балки. Коэффициент основания принимаем в виде [6]

$$\alpha = \frac{0,12E_*}{(1 - \mu_*^2)} \sqrt{\frac{b}{l_0}}.$$

Здесь E_* , μ_* — модуль упругости и коэффициент Пуассона грунта; b и l_0 — ширина поперечного сечения и единичная длина балки.

Совместим начало координат с центром тяжести поперечного сечения балки, направив ось x вдоль оси балки, оси y и z — по горизонтали и вертикали соответственно. Уравнение движения балки принимаем в форме

$$E J_y \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \alpha W = p(t) - \rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где E , ρ — модуль упругости и плотность материала балки; J_y , F — осевой момент инерции поперечного сечения относительно оси y и площадь сечения балки. Используем безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \tau = \frac{c \cdot t}{h}, \quad \left(c^2 = \frac{E}{\rho} \right), \\ w = \frac{W}{h}, \quad m = \frac{M}{E h^3}, \quad \delta_1 = \frac{b}{12h}$$

и уравнение (1) приводим к виду

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \beta_1 w + \beta \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = \beta_2 H(\tau), \quad (2)$$

где $\beta_1 = \frac{\alpha h^4}{EJ_y}$; $\beta = \frac{h^2}{r^2}$; $\beta_2 = \frac{p_0 h^3}{EJ_y}$; r, h — радиус инерции и высота поперечного сечения балки. При известном прогибе изгибающий момент определяется по формуле

$$m = \delta_1 \partial^2 w / \partial \xi^2.$$

Начальные условия — нулевые:

$$m = \dot{w} = w = 0 \text{ при } \tau = 0, \xi \geq 0,$$

граничные условия имеют вид

$$w(0, \tau) = \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \xi} = \theta(0, \tau) = 0 & \text{при заделке,} \\ m(0, \tau) = 0 & \text{в случае шарнирного опирания.} \end{cases}$$

На бесконечности величина w и ее производные обращаются в нуль.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Уравнение (2) решаем, используя интегральное преобразование Лапласа по времени

$$F(\xi, s) = \int_0^\infty f(\xi, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (3)$$

$$f(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\xi, s) e^{s\tau} ds.$$

После применения преобразования Лапласа к уравнению (2) получим

$$\frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} + (\beta s^2 + \beta_1) \bar{w} = \frac{\beta_2}{s}, \quad (4)$$

где \bar{w} — изображение прогиба; s — параметр преобразования.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (4) записываем в виде

$$\bar{w} = e^{\gamma \xi} (C_1 \cos \gamma \xi + C_2 \sin \gamma \xi) + e^{-\gamma \xi} (C_3 \cos \gamma \xi + C_4 \sin \gamma \xi) + \frac{a_1}{s(s^2 + \Delta^2)}.$$

Здесь $a_1 = \frac{\beta_2}{\beta_1}$, $\Delta^2 = \frac{\beta_1}{\beta}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\beta s^2 + \beta_1}$.

Используя условие затухания на бесконечности, получим $C_1 = C_2 = 0$, а постоянные

C_3 и C_4 находим с помощью преобразованных граничных условий. В результате имеем изображение прогиба и изгибающего момента:

• в балке с шарнирным опиранием

$$\bar{w} = \frac{a_1}{s(s^2 + \Delta^2)} (1 - e^{-\gamma \xi} \cos \gamma \xi);$$

$$\bar{m} = -\frac{a_2}{s\sqrt{s^2 + \Delta^2}} e^{-\gamma \xi} \sin \gamma \xi; \quad (5)$$

• в случае заделки

$$\bar{w} = \frac{a_1}{s(s^2 + \Delta^2)} [1 - e^{-\gamma \xi} (\cos \gamma \xi - \sin \gamma \xi)],$$

$$\bar{m} = \frac{a_2 e^{-\gamma \xi}}{s\sqrt{s^2 + \Delta^2}} (\cos \gamma \xi - \sin \gamma \xi), \quad (6)$$

где $a_2 = \delta_1 \beta_2 / \sqrt{\beta}$. Особыми точками функций (5) и (6) являются полюс в точке $s = 0$ и точки разветвления $\pm i\Delta$.

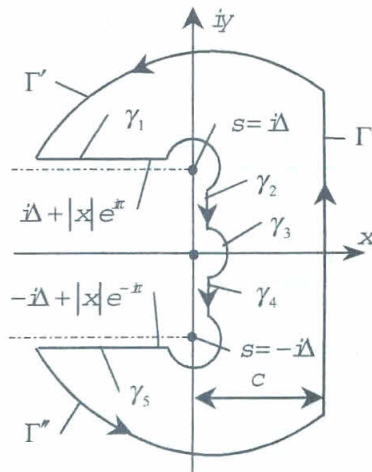


Рис. 1

Для вычисления оригиналов искомых функций используем контур, приведенный на рис. 1. Стрелками показано направление обхода контура. Внутри контура интегрирования подынтегральная функция не имеет особых точек. Поэтому в соответствии с теоремой Коши интегрирование по замкнутому контуру, показанному на рис. 1 сплошной линией, дает

$$\int_{\Gamma} \dots + \int_{\Gamma_1} \dots + \int_{\Gamma_2} \dots + \int_{\Gamma_3} \dots + \int_{\Gamma_4} \dots + \int_{\Gamma_5} \dots = 0,$$

где подынтегральные выражения не выписаны подробно. Согласно лемме Жордана интегралы по пути интегрирования Γ' и Γ'' равны нулю. Из второго выражения (3) следует, что интеграл по пути интегрирования Γ равен

оригиналу. Поэтому оригинал функции определяется как сумма интегралов

$$f(\xi, \tau) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} \dots + \int_{\gamma_2} \dots + \int_{\gamma_3} \dots + \int_{\gamma_4} \dots + \int_{\gamma_5} \dots \right). \quad (7)$$

После вычисления интегралов (7) получим:

• для шарнирно опертой балки

$$\frac{\pi w}{a_1} = \frac{\pi}{2\Delta^2} (1 - e^{-k\xi\sqrt{\Delta}} \cos k\xi\sqrt{\Delta}) + I_1 + I_2 - I_3, \quad (8)$$

$$\frac{\pi m}{a_2} = -\frac{\pi}{2\Delta} e^{-k\xi\sqrt{\Delta}} \sin k\xi\sqrt{\Delta} - I_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} (I_5 + I_6), \quad (9)$$

где

$$I_1 = \int_0^{\Delta} \frac{(1 - e^{-k\xi l} \cos k\xi l)}{y l^4} \sin y\tau dy;$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x\tau}}{\eta^2 \sqrt{x^2 + \Delta^2}} \times [e^{-\alpha} \sin(A_0 - v) \cos \alpha \operatorname{ch} v - \sin A_0] dx;$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x\tau + \alpha)}}{\eta^2 \sqrt{x^2 + \Delta^2}} \cos(A_0 - v) \sin \alpha \operatorname{sh} v dx;$$

$$I_4 = \int_0^{\Delta} \frac{e^{-k\xi l}}{y l^2} \sin(k\xi l) \sin y\tau dy;$$

$$I_5 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x\tau + \alpha)}}{\eta \sqrt{x^2 + \Delta^2}} \times (\sin A_1 \sin \alpha \operatorname{ch} v + \cos A_1 \cos \alpha \operatorname{sh} v) dx;$$

$$I_6 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x\tau + \alpha)}}{\eta \sqrt{x^2 + \Delta^2}} \times (\cos A_1 \sin \alpha \operatorname{ch} v - \sin A_1 \cos \alpha \operatorname{sh} v) dx;$$

• для балки с защемлением на конце

$$\frac{\pi w}{a_1} = \frac{\pi}{2\Delta^2} [1 - e^{-k\xi\sqrt{\Delta}} \times (\cos k\xi\sqrt{\Delta} + \sin k\xi\sqrt{\Delta})] + I_2 + I_3 + I_7 + I_8; \quad (10)$$

$$\frac{\pi m}{a_2} = \frac{\pi}{2\Delta} e^{-k\xi\sqrt{\Delta}} \times (\cos k\xi\sqrt{\Delta} - \sin k\xi\sqrt{\Delta}) + I_9 + \frac{1}{\sqrt{2}} (I_5 + I_6 - I_{10} - I_{11}), \quad (11)$$

где

$$I_7 = \int_0^{\Delta} \frac{1}{y l^4} [1 - e^{-k\xi l} (\cos k\xi l + \sin k\xi l)] \sin y\tau dy;$$

$$I_8 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x\tau + \alpha)}}{\eta^2 \sqrt{x^2 + \Delta^2}} [\sin(A_0 - v) \sin \alpha \operatorname{ch} v + \cos(A_0 - v) \cos \alpha \operatorname{sh} v] dx;$$

$$I_9 = \int_0^{\Delta} \frac{e^{-k\xi l}}{y l^2} (\cos k\xi l - \sin k\xi l) \sin y\tau dy;$$

$$I_{10} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x\tau + \alpha)}}{\eta \sqrt{x^2 + \Delta^2}} (\sin A_1 \cos \alpha \operatorname{ch} v - \cos A_1 \sin \alpha \operatorname{sh} v) dx;$$

$$I_{11} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(x\tau + \alpha)}}{\eta \sqrt{x^2 + \Delta^2}} (\sin A_1 \sin \alpha \operatorname{sh} v + \cos A_1 \cos \alpha \operatorname{ch} v) dx;$$

$$k = \frac{\sqrt[4]{\beta}}{\sqrt{2}}; \quad l = \sqrt[4]{\Delta^2 - y^2}; \quad \eta^2 = x \sqrt{x^2 + 4\Delta^2};$$

$$A_0 = \Delta\tau + \chi + \varphi_*;$$

$$A_1 = \Delta\tau - v + \chi + \frac{\varphi_*}{2};$$

$$\chi = \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + \Delta^2}} \right);$$

$$\varphi_* = \arccos \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4\Delta^2}} \right);$$

$$\alpha = k\xi \sqrt{\eta} \cos \left(\frac{5\pi}{8} + \frac{\varphi_*}{4} \right);$$

$$v = k\xi \sqrt{\eta} \sin \left(\frac{5\pi}{8} - \frac{\varphi_*}{4} \right).$$

Принимая во втором выражении (5) значение $\xi = 0$, находим изображение момента в заделке

$$\bar{m} = \frac{a_2}{s} F(s),$$

$$\text{где } F(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + \Delta^2}}.$$

Используя теорему об интегрировании для оригинала [7]

$$\frac{1}{s} F(s) \longleftrightarrow \int_0^{\tau} f(t) dt,$$

находим

$$m = \frac{a_2}{\Delta} \int_0^{\tau} J_0(z) dz,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Интеграл от функции $J_0(z)$ табулирован

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} J_0(z) dz \quad (12)$$

и таблица функций $\Phi(z)$ для значений $0 \leq z \leq 1$ содержится в [8]. Для $1 \leq z \leq 16$ функцию $\Phi(z)$ можно вычислить по формуле [8]

$$\Phi = \frac{\pi z}{4} [J_0(z)H_0'(z) + J_1(z)H_0(z)], \quad (13)$$

где J_1 — функция Бесселя первого рода и первого порядка, H_0 — функция Ханкеля нулевого порядка, штрих означает дифференцирование по аргументу.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Принимаем: $p_0 = 10$ кН/м, $b = h = 0,1$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $b \times h = F$, $\alpha = 0,125$ МПа, $E_* = 3$ МПа, $\mu_* = 0,3$, $\rho = 7,8$ Мг/м³.

Результаты расчетов m и w в виде графиков представлены на рис. 2–6.

При вычислении интегралов шаг по x выбран так, чтобы значения момента в заделке, вычисленные по формулам (12), (13), и полученные численным интегрированием выражения (11) при $\xi = 0$, совпали. Безразмерное время τ и произведение $x\tau$ принимают большие числовые значения. Благодаря множителю $\exp(-x\tau)$ подынтегральные функции уже при $x \sim 10$ быстро стремятся к нулю. Поэтому верхний предел несобственных интегралов принят равным 10.

На рис. 2 приведены графики изменения по времени момента в фиксированных сечениях балки с заделкой. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям $\xi = 0, 5$ и 10. Кривая 1 построена, используя соотношения (12) и (13).

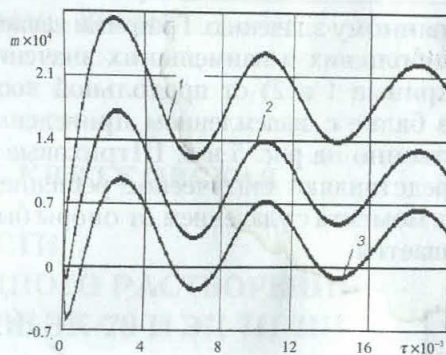


Рис. 2

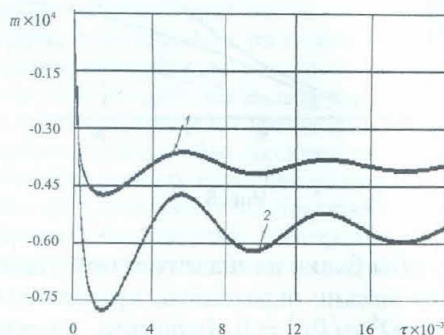


Рис. 3

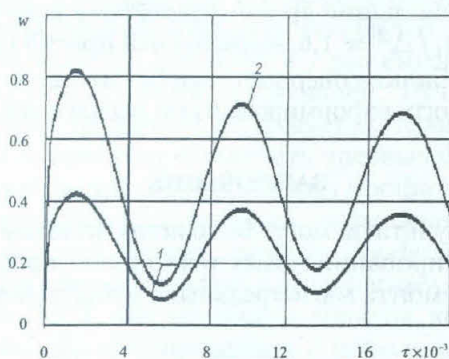


Рис. 4

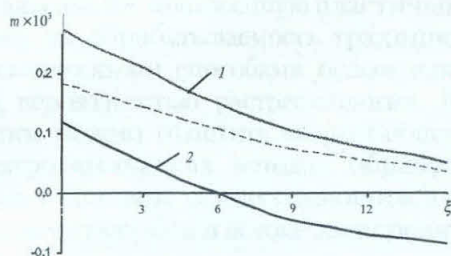


Рис. 5

Графики на рис. 3 и 4 показывают изменение по времени момента m и прогиба w шарнирно опертой балки в сечениях $\xi = 5$ (кривая 1) и $\xi = 10$ (кривая 2). Как видно, изменение m и w по времени носит колебательный характер, и со временем они стремятся

к постоянному значению. Графики зависимости наибольших и наименьших значений m и w (кривые 1 и 2) от продольной координаты в балке с защемлением приведены соответственно на рис. 5 и 6. Штриховые кривые представляют статическое решение. Величина момента с удалением от опоры быстро уменьшается.

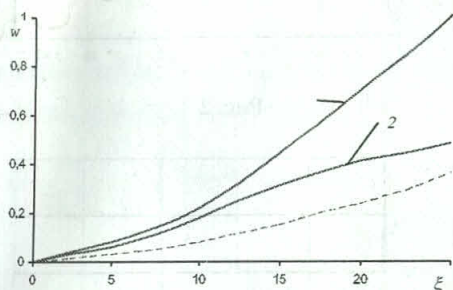


Рис. 6

Прогибы балки на значительном удалении от опоры можно определить, принимая в (1) оператор $\partial^4 w / \partial x^4 = 0$. Решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям, имеет вид $w = (a_1 / \Delta^2)(1 - \cos \Delta x)$. Отсюда следует, что наибольший прогиб стремится к величине $w = 2a_1 / \Delta^2 = 1,6$, наименьший прогиб равен нулю. Балка совершает колебания около статического деформированного положения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты могут быть использованы при проектировании новых технологий прокладки и ремонта магистральных трубопроводов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Boley V. A., Chao C. C.** Some solutions of the Timoshenko beam equations // J. of Appl. Mech. Trans. ASME. 1955. V. 77. P. 579–586.
2. **Plass H. J.** Some solutions of the Timoshenko beam equations for short pulse-type loadings // J. of Appl. Mech. Trans. ASME. 1958. V. 80. P. 379–385.
3. **Chou P. C., Mortimer R. W.** A Unified approach to one-dimensional elastic waves by the method of characteristics // J. of Appl. Mech. 1967. V. 34. P. 745–750.
4. **Янг С.** Распространение волн разрыва в неоднородных балках Тимошенко // Прикладная механика. М.: Мир, 1987. № 3. С. 263–265.
5. **Фу П.** Полубесконечная балка с заданным на торце скачком скорости // Прикладная механика. М.: Мир, 1987. № 1. С. 120–126.
6. **Айнбиндер А. Б., Камерштейн А. Г.** Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. М.: Недра, 1982.
7. **Дёч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1976.
8. **Ватсон Г. Н.** Теория бесселевых функций. М.: ИЛ, 1949. Т. 2.

ОБ АВТОРЕ



Якупов Радик Гиззатович, профессор каф. сопротивления материалов УГАТУ. Дипл. инж.-механик (УАИ, 1958). Д-р техн. наук по прочности и пластичности (ЛПИ, 1984). Исследования в области механики твердого деформируемого тела, аэроупругости.