

УДК 621.5

Г. Г. КУЛИКОВ, В. Ю. АРЬКОВ

МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Разработан и исследован новый класс нечетких марковских цепей для моделирования ГТД и элементов САУ. Получены соотношения, связывающие статистические свойства цепей Маркова с матрицей вероятностей переходов. Получены условия идентифицируемости динамических моделей САУ ГТД. Цепи Маркова; идентификация; динамические модели

Идентификация математических моделей авиационных ГТД и элементов их систем управления является инструментом улучшения тактико-технических и эксплуатационных характеристик силовой установки. Кроме того, внедрение в практику обслуживания авиационной техники методов контроля и диагностики САУ ГТД на основе идентификации позволяет повысить безопасность полетов и снизить эксплуатационные издержки за счет раннего обнаружения деградации характеристик и планирования профилактического обслуживания [1].

Когда доступны экспериментальные данные, становится возможным повышение точности управления и надежности диагностики за счет учета случайных факторов, не вошедших в детерминированные модели. В статье рассматриваются непараметрические стохастические динамические модели в форме цепей Маркова; указанные модели описывают динамику объекта во временной области.

В качестве исходной математической модели объекта управления используется описание в пространстве состояний в виде стохастического разностного уравнения

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t) + \mathbf{F}\xi(t), \quad (1)$$

где \mathbf{X} — вектор состояний; \mathbf{U} — вектор управлений; \mathbf{A} , и \mathbf{F} — матрицы коэффициентов; ξ — вектор независимых случайных переменных. В соответствии с теоремой Дуба, уравнение (1) соответствует процессу Маркова [2]. Управляемая марковская модель может также использоваться для описания нелинейной системы:

$$\mathbf{X}(t+1) = \mathbf{G}\{\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \xi(t)\}, \quad (2)$$

где $\mathbf{G}(\cdot)$ — нелинейная функция.

Ставится задача разработать метод моделирования детерминированной и стохастической динамики объекта управления с помощью цепей Маркова в предположении, что доступна экспериментальная информация о состоянии объекта $\mathbf{X}(t)$ и управления $\mathbf{U}(t)$ за время предшествующих испытаний $t \in [0, T]$. Предполагается, что вектор наблюдений совпадает с вектором состояний, а объект управления функционирует на установившемся режиме работы. При наличии экспериментальной статистической информации существует возможность оценить вероятностные распределения измеряемых параметров и построить апостериорные стохастические модели.

Марковский процесс высокого порядка сводится к сложному процессу первого порядка, а управление \mathbf{U} может быть введено в состав переменных состояния \mathbf{X} . Путем дискретизации по уровню получаем цепь Маркова, которая описывается матрицей вероятностей переходов (МВП) между дискретными состояниями системы за время ΔT :

$$P_{ijk} = \text{Prob}\{X(t) = X_i, \\ u(t) = U_k, X(t+1) = X_j\}. \quad (3)$$

Для графической интерпретации динамических свойств системы предлагается использовать концепцию «многолистной» динамической характеристики, широко применяемую при построении упрощенных динамических моделей авиационных двигателей. Математическое ожидание параметров марковской модели соответствует непараметрическому представлению детерминированной модели. При отсутствии случайных возмущений $\xi = 0$ стохастическая система вырождается в детерминированную. В пределе при бесконечно малом шаге дискретизации по уровню $\Delta x \rightarrow 0$ элементы МВП равны нулю ли-

бо единице; в этом случае МВП линейной системы будет содержать единичные элементы, расположенные вдоль прямой линии (рис. 1). Стохастические свойства выражаются в «размывании» вероятности переходов в окрестности указанной прямой линии.

Покажем, что основные статистические свойства сигнала адекватно воспроизводятся с помощью МВП марковской цепи.

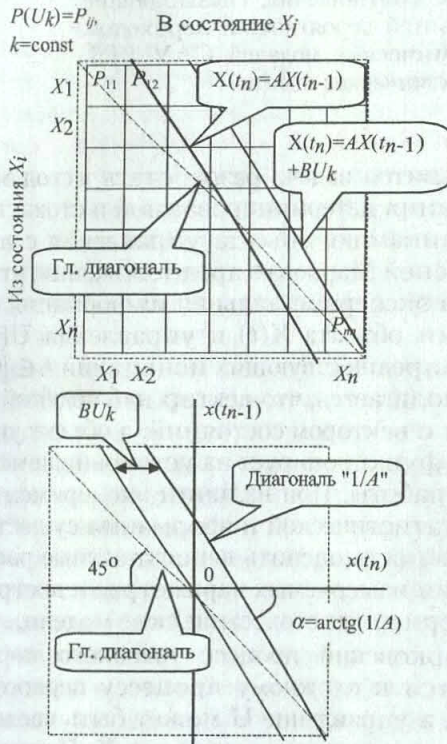


Рис. 1. МВП линейной системы

Плотность вероятности сигнала представляется в виде вектора финальных (стационарных) вероятностей марковской цепи

$$\lambda = [\text{Prob}\{x = X_1\}, \dots, \text{Prob}\{x = X_n\}] = [\lambda_1, \dots, \lambda_n], \quad (4)$$

который является собственным вектором матрицы вероятностей переходов и определяется как решение системы

$$\lambda P = \lambda \quad (5)$$

либо путем возведения P в бесконечно большую степень:

$$P^\infty [\lambda^T, \lambda^T, \dots, \lambda^T]. \quad (6)$$

Среднее значение определяется как математическое ожидание при заданном конечном распределении:

$$\mu_x = E[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \text{Prob}(x) dx = \sum_{i=1}^n X_i \lambda_i = \mathbf{X} \lambda^T, \quad (7)$$

где $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_n]$ – вектор центров участков разбиения, или вектор возможных состояний цепи.

Корреляционная функция (определяющая спектр сигнала) однозначно связана с МВП:

$$R_{xx}(m) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \mu_x)(x(t+m) - \mu_x) \times \text{Prob}(x(t), x(t+m)) dx dx = \mathbf{X} \Lambda^m \mathbf{X}^T - (\mathbf{X} \lambda^T)^2, \quad (8)$$

где m – запаздывание при расчете корреляционной функции, а Λ – диагональная матрица финальных вероятностей:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Связь с авторегрессионными моделями определяется соотношениями относительно значений корреляционной функции выходного сигнала:

$$R_{xx}(1) = A R_{xx}(0), \quad (10)$$

$$\begin{pmatrix} R_{xx}(1) \\ \vdots \\ R_{xx}(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{xx}(0) \\ \vdots \\ R_{xx}(M-1) \end{pmatrix} A, \quad (11)$$

где A – коэффициент авторегрессии, а M – максимальное запаздывание. Решение уравнений (9) или (10) дает коэффициенты параметрической модели [3].

Результаты имитационного моделирования демонстрируют, что марковская модель (ММ) позволяет одновременно воспроизводить распределение и спектр сигнала (определяемый корреляционной функцией) (рис. 2), что составляет дополнительное преимущество по сравнению с методом формирующего фильтра.

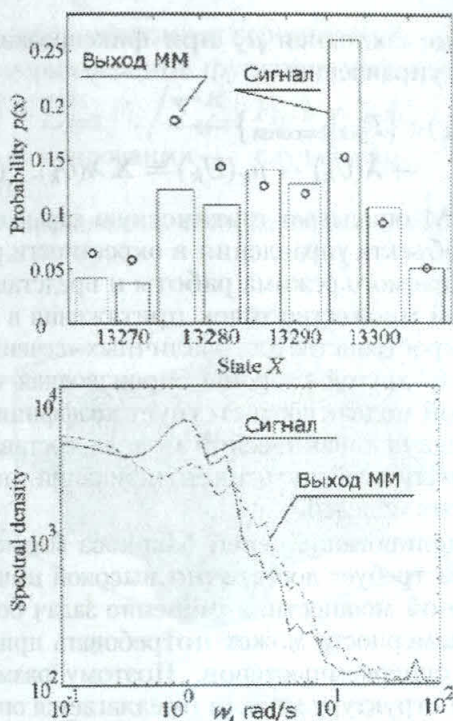


Рис. 2. Гистограммы и спектры сигнала $n_{\text{мд}}$ и выхода марковской модели

Идентификация цепей Маркова выполняется путем оценивания вероятностей переходов как относительных частот соответствующих событий и последующего вычисления элементов МВП:

$$P_{ijk} = \frac{N_{ijk}}{\sum_{j=1}^m N_{ijk}}, \quad (12)$$

где N_{ijk} — число событий вида $\{X(t_n) = X_i, X(t_{n+1}) = X_j, U(t_n) = U_k\}$, а знаменатель соответствует числу событий вида $\{X(t_n) = X_i, U(t_n) = U_k\}$.

Имитационное моделирование ЦСАУ ГТД с помощью цепей Маркова производится методами Монте-Карло и функционального преобразования. Для этого на каждом шаге моделирования t определяется текущее состояние X_i и текущее управление U_k . Затем находят распределение вероятностей нового состояния системы $\{Prob(X_j)\}$ при заданных X_i и U_k , выбирая соответствующую строку МВП (рис. 3)

$$\begin{aligned} \lambda(t+1) &= P|_{ik} = \\ &= \{P_{ijk}, j = 1..m, i = \text{const}, k = \text{const}\} = \\ &= \{P_{i1k}..P_{imk}\}, \quad (13) \end{aligned}$$

и вычисляют интегральную функцию распределения F :

$$F(X_j) = \text{Prob}\{X(t) < X_j\} = \sum_{s=1}^j P_{isk}. \quad (14)$$

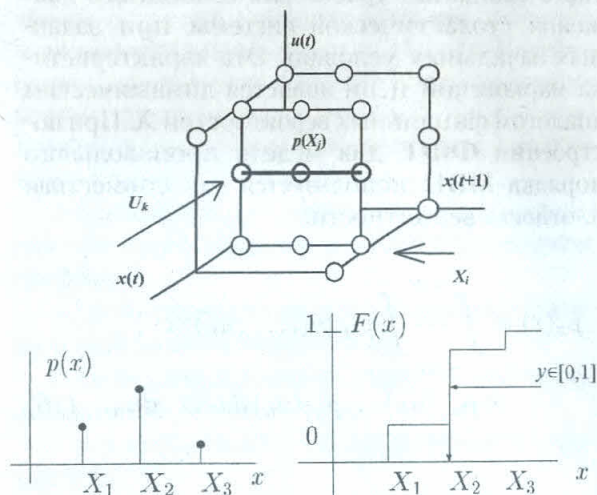


Рис. 3. Имитационное моделирование цепи Маркова

Далее, с помощью генератора случайных чисел Z с равномерным распределением и функционального преобразования F^{-1} формируется случайная величина $X(t+1)$ с заданным законом распределения:

$$X(t+1) = F^{-1}\{Z(t+1)\}. \quad (15)$$

Анализ выявленных статистических свойств подтверждает возможность использования марковских моделей в процессе решения проблемы идентификации динамических моделей ЦСАУ ГТД.

Перспективы применения марковских моделей динамических систем связаны с непараметрическим представлением динамики САУ во временной области и возможностями когнитивного графического анализа свойств динамических объектов [4]:

- анализ и синтез САУ графическими методами по аналогии с системами твердотельного моделирования в машиностроительных САПР;

- понижение порядка (редуцирование) модели объекта управления путем стохастической аппроксимации;

- идентификация линейной и нелинейной динамики в окрестности режима работы, включая контроль информативности данных и оценивание моделей;

- обобщение методов фазового пространства и качественной теории дифференциальных уравнений на стохастические системы;

– расширение области применения систем нечеткой логики на стохастические объекты.

Для исследования динамики объекта управления вводится понятие *финальной фазовой траектории* (ФФТ) как математического ожидания траектории свободного движения стохастической системы при заданных начальных условиях. Эта характеристика марковской цепи является динамическим аналогом финальных вероятностей λ . При построении ФФТ для модели произвольного порядка МВП используется как совместная плотность вероятности:

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x|u_1, \dots, u_n) \times \\ \times p_{u_1}(u_1) \dots p_{u_n}(u_n) du_1 \dots du_n. \quad (16)$$

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_x(x) dx. \quad (17)$$

В частности, при построении ФФТ для системы первого порядка стационарные вероятности находят как решение системы

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^T - \mathbf{I} \\ \dots\dots\dots \\ 1 \ 1 \dots 1 \end{bmatrix} \lambda. \quad (18)$$

В качестве начального условия выбирается максимальное значение координаты состояния

$$X(0) = \max X = X_n, \lambda(0) = [00 \dots 01]. \quad (19)$$

На каждом шаге моделирования определяют новое распределение вероятностей и оценку математического ожидания состояния:

$$\begin{aligned} \mu(0) &= \lambda(0)\mathbf{X}^T = \lambda(0)\mathbf{P}^0\mathbf{X}^T; \\ \mu(1) &= \lambda(1)\mathbf{X}^T = \lambda(0)\mathbf{P}^1\mathbf{X}^T; \\ \mu(t) &= \lambda(t)\mathbf{X}^T = \lambda(0)\mathbf{P}^t\mathbf{X}^T, \\ t &= 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (20)$$

Для оценивания статической характеристики вводится понятие *финальной статической матрицы* (ФСМ), содержащей математическое ожидание координат линии установившихся режимов работы–установившееся

значение состояния μ_x при фиксированном уровне управления:

$$\mu_x(U_k) : \{P_{jik}|_{k=\text{const}}\} \rightarrow \\ \rightarrow \lambda(U_k) \rightarrow \mu_x(U_k) = \mathbf{X} \lambda(U_k). \quad (21)$$

ФСМ описывает статическую характеристику объекта управления в окрестности рассматриваемого режима работы и представляет собой множество точек притяжения в фазовом пространстве для различных «сечений» МВП. С другой стороны, производная статической модели соответствует коэффициенту передачи динамической модели, составляя альтернативный путь идентификации динамических моделей.

Моделирование цепей Маркова высокого порядка требует достаточно высокой вычислительной мощности, а решение задач большой размерности может потребовать применения суперкомпьютеров. Поэтому размерность и структуру модели предлагается оптимизировать по критериям точности и быстродействия на мощной вычислительной технике, после чего упрощенные модели могут обрабатываться на персональных компьютерах или специализированных процессорах с нечеткой логикой.

Представление динамических свойств детерминированной модели в виде системы нечеткой логики позволяет существенно сократить требуемый объем памяти без потери точности. В данном случае нечеткая логика используется, прежде всего, как инструмент интерполяции, а исходная динамическая модель задается базовыми точками в пространстве состояний и управлений.

На рис. 4 представлены поверхности решений нечеткой системы для динамической модели первого порядка при дефазификации методом максимума (а) и методом центра тяжести (б). Оптимальный выбор метода дефазификации обеспечивает наиболее гладкую аппроксимацию, соответствующую исходной линейной модели не только в базовых точках, но и между ними.

Методика нечеткого марковского моделирования включает этапы:

- формирования вектора значений нового состояния $X(t+1) : \mathbf{Z} = [Z_1, \dots, Z_K]$;
- задания начального состояния системы $X(0)$;
- циклических вычислений при $t < T_{\text{мод}}$;
- фазификации текущего и нового состояний $\mu(X(t)), \mu(X(t+1) = Z_k), k = 1..K$;
- вывода правил для определения вероятности $P(X(t+1))$;

- дефаззификации вероятностей ;
 - нормализации функции распределения
- $$F_k(i) = \sum_{j=1}^k P_{ij} / \sum_{j=1}^K P_{ij}, k = 1..K;$$
- генерирования случайного числа $y \in [0, 1]$;
 - определения нового состояния: $X(t + 1) = F^{-1}(y)$.

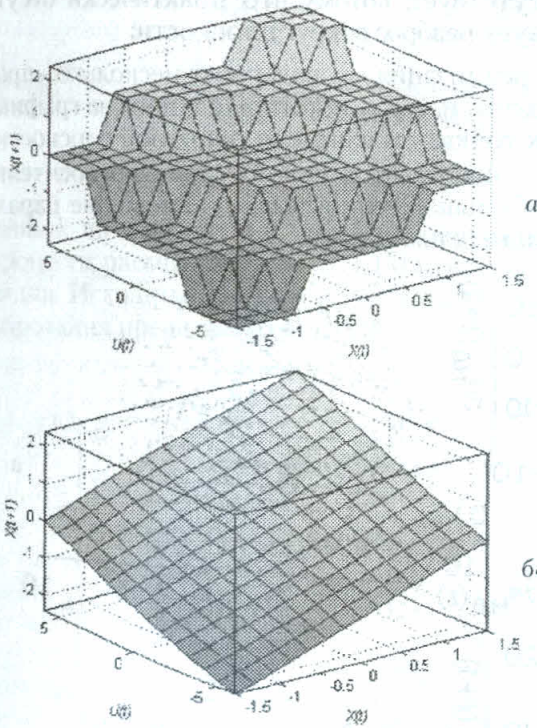


Рис. 4. Поверхности решений нечеткой системы

На рис. 5 приведены результаты моделирования с использованием линейной динамической модели (ЛДМ), марковской и нечеткой марковской моделей.

В результате исследования нечетких марковских моделей методами имитационного моделирования установлено, что максимальная ошибка аппроксимации не превышает 1% диапазона значений выходной переменной.

Остаточная методическая погрешность объясняется тем, что операции фаззификации и дефаззификации являются нелинейными.

Непараметрические марковские модели открывают дополнительные возможности исследования идентифицируемости динамических моделей в аспекте информативности экспериментальных данных. Идентифицируемость марковских моделей и детерминированных динамических моделей по экспериментальным данным определяется следующими характеристиками:

- расположение данных в виде поверхности или эллипсоида рассеяния на трехмерном графике;
- равномерность рассеяния данных (оптимальный план эксперимента);
- доля незаполненных строк в идентифицированной МВП;
- унимодальность распределения в строках МВП;
- устойчивость марковской модели (наклон статической линии, ФСМ);
- возможность построения ФФТ по МВП;
- отсутствие пересечений линий семейства ФФТ между собой;
- совпадение общего характера ФФТ с априорной моделью;
- соответствие статических и динамических моделей.

Графическое изображение набора данных в форме марковской модели дает дополнительные возможности для анализа идентифицируемости моделей. Данные могут иметь случайный разброс вокруг плоскости, что является показателем зашумленности измерений. Когда на графическом представлении набора данных в определенных проекциях просматривается нелинейная поверхность, следует выбрать нелинейную модель. Кроме того, ЛДМ следует считать неидентифицируемой, если на графиках не наблюдается яв-

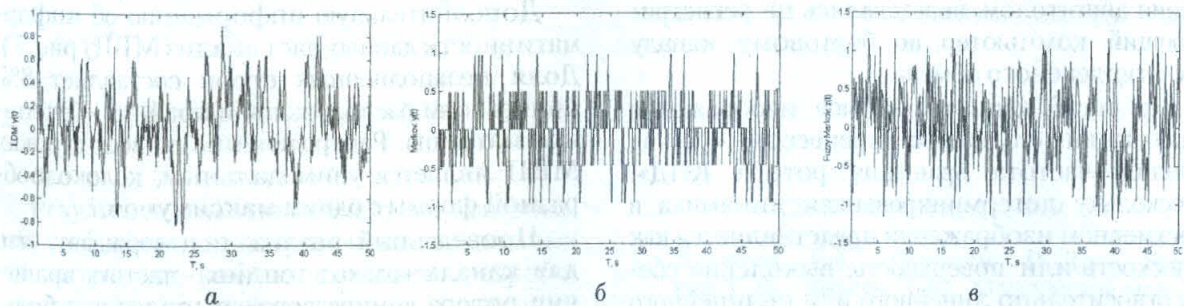


Рис. 5. Фрагменты реализаций случайных процессов на выходе линейной (а), марковской (б) и нечеткой марковской (в) моделей

ной взаимосвязи между координатами, а виден только эллипсоид рассеяния.

Перечисленные условия являются необходимыми, но не достаточными условиями; выполнение одного из них не влечет автоматического выполнения остальных. Поэтому условия идентифицируемости должны использоваться комплексно, а решение о возможности идентификации должно приниматься по мажоритарной схеме.

После положительного заключения об идентифицируемости модели проводится идентификация путем аппроксимации исходных данных или марковской цепи параметрической моделью либо геометрически. В последнем случае исследователь формирует плоскость или поверхность по трехмерному изображению с учетом априорной информации. Поскольку идентификация является плохо обусловленной задачей, различные методы идентификации должны использоваться параллельно с последующим сравнением или объединением полученных моделей [5].

При построении параметрической модели по матрице МВП марковской цепи определяют ФСМ и ФФТ, по которым затем оценивают коэффициенты и постоянные времени K и T . При многоступенчатой идентификации возможны различные варианты, например:

$$\begin{aligned} (X(t), U(t)) \cdot &\rightarrow \text{МВП} \rightarrow \text{ФСМ} \rightarrow K; \\ &\text{МВП} \rightarrow \text{ФФТ}; \\ (K, \text{ФФТ}) \cdot &\rightarrow (K, T); \quad (22) \\ \text{или} \quad \text{ФФТ} \cdot &\rightarrow (K, T); \\ \text{или} \quad \text{ФФТ} \cdot &\rightarrow T. \end{aligned}$$

Рассмотрим пример анализа идентифицируемости моделей ЦСАУ ГТД с использованием предложенных выше условий для реализаций случайных процессов на наземном моторном испытательном стенде для установившихся режимов работы. Измерения сигналов, которые используются ЦСАУ для управления двигателем, передавались на регистрирующий компьютер по бортовому каналу мультиплексного обмена.

На рис. 6 дано трехмерное изображение реализаций случайных процессов «расход топлива–частота вращения ротора КНД». Поскольку детерминированная динамика в трехмерном изображении представляется как плоскость или поверхность, выявление сбоев относительно линейного или нелинейного прогноза существенно упрощается [6]. Сбой на трехмерном представлении выглядит как точка, достаточно удаленная от плоскости,

образуемой отдельными отсчетами исходной реализацией (рис. 6, б). Визуальный анализ данных позволяет сделать следующие выводы относительно исходных данных и моделей объекта управления:

- связь между переменными линейна, поскольку ясно видна плоскость;
- выходной аддитивный шум практически отсутствует, потому что практически отсутствует разброс вокруг плоскости;

реализация $n_{\text{нд}}$ содержит несколько «промахов», или сбоев, которые видны на графике как точки, удаленные от основной плоскости;

- шаг квантования по уровню относительно большой, что вызывает появление параллельных плоскостей.

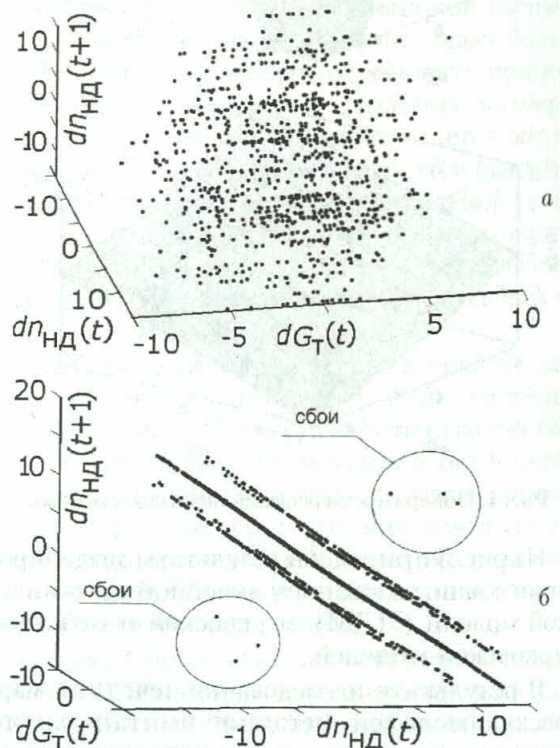


Рис. 6. Трехмерное представление реализаций $G_T-n_{\text{нд}}$: а – вид «спереди»; б – вид «сбоку»

Дополнительную информацию об информативности данных дает анализ МВП (рис. 7). Доля незаполненных строк составляет 8%, причем они расположены в крайних «сечениях» матрицы. Распределение во всех строках МВП является унимодальным, колоколообразной формы с одним максимумом.

Проведенный анализ подтверждает, что для канала «расход топлива–частота вращения ротора компрессора» выполняется большинство предложенных выше условий идентифицируемости на основе марковских моделей. На рис. 8 дается сравнение ФФТ, полу-

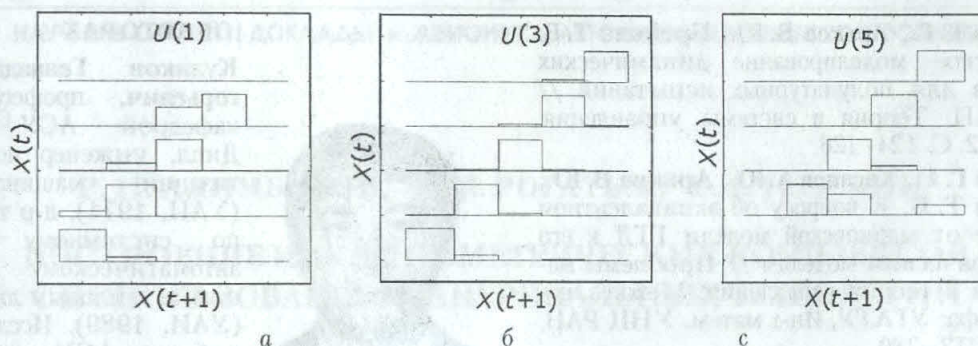


Рис. 7. Анализ распределения по строкам МВП с расслоением по управлению: а — для $u = u(1)$; б — для $u = u(3)$; в — для $u = u(5)$

ченной по марковской МВП, и переходного процесса, рассчитанного по ЛДМ первого порядка. Исходные данные и результаты моделирования представлены на рис. 9.

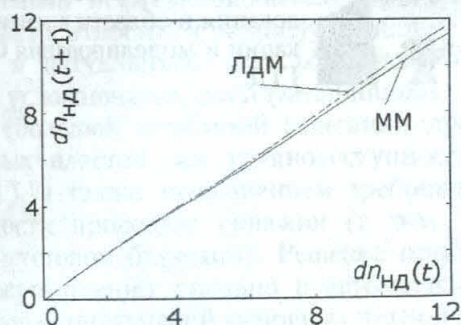


Рис. 8. ФФТ марковской модели и ЛДМ

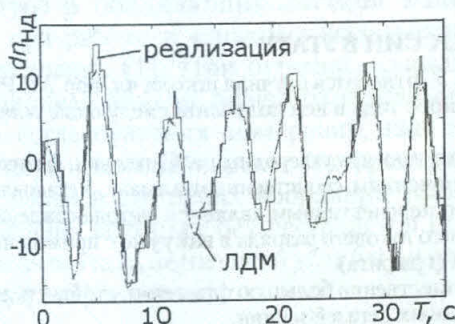


Рис. 9. Сигнал n_{HD} и выход ЛДМ

Результаты имитационного моделирования и обработки экспериментальных данных демонстрируют работоспособность разработанного метода идентификации и высокий уровень точности воспроизведения динамических свойств САУ ГТД с помощью марковских цепей [7].

ВЫВОДЫ

Разработан новый класс нечетких марковских цепей для моделирования ГТД и элементов МСАУ. Получены соотношения, связывающие статистические свойства цепей Маркова (среднее, дисперсия, плотность распределения, корреляционная функция) с матрицей вероятностей переходов и подтверждающие возможность одновременного описания свойств распределения и спектрального состава сигнала в форме единой модели. Для решения проблемы большой размерности, характерной для представления марковских моделей с учетом нелинейности динамических характеристик, предложен метод построения нечетких марковских моделей, основанный на частичной параметризации многомерной функции плотности вероятности, представленной в виде матрицы вероятностей переходов.

Разработаны условия идентифицируемости динамических моделей САУ ГТД на основе марковских моделей в двух формах: в форме количественных условий (критериев) и в когнитивной форме путем представления фазовых траекторий в фазовом пространстве. Полученные условия дополняют схему идентификации динамических моделей и позволяют делать более обоснованные выводы о возможности идентификации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куликов Г. Г., Флеминг П. Дж., Брейкин Т. В., Арьков В. Ю. Марковские модели сложных динамических систем: идентификация, моделирование и контроль состояния (на примере цифровой САУ ГТД). Уфа: УГАТУ, 1998. 103 с.

2. **Куликов Г. Г., Арьков В. Ю., Брейкин Т. В.** Марковское моделирование динамических объектов для полунатурных испытаний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 2. С. 124–128.
3. **Куликов Г. Г., Хасанов А. Ю., Арьков В. Ю., Брейкин Т. В.** К вопросу об эквивалентном переходе от марковской модели ГТД к его параметрическим моделям // Проблемы математики и теории управления: Межвуз. науч. сб. Уфа: УГАТУ, Ин-т матем. УНЦ РАН, 1998. С. 272–280.
4. **Зенкин А. А.** Когнитивная компьютерная графика. М.: Наука, 1991. 192 с.
5. Пат. 2057365 (РФ). Способ идентификации матрицы коэффициентов передачи ГТД и устройство для его осуществления / Г. Г. Куликов, В. Ю. Арьков, Т. В. Брейкин 1996. Б.И. № 9.
6. **System identification strategies applied to aircraft gas turbine engines / V. Yu. Arkov, D. C. Evans, P. J. Fleming, et al // Annual Reviews in Control. 2000. № 24. P. 67–81.**
7. **Kulikov G., Breikin T., Fleming P., Arkov V.** On evolutionary optimization of Markov models of aero engines // Proc. of 2000 IEEE Int. Symp. on Intelligent Control ISIC2000. Patras, Greece, 2000. P. 235–239.



ОБ АВТОРАХ

Куликов Геннадий Григорьевич, профессор, зав. кафедрой АСУ УГАТУ. Дипл. инженер по автоматизации машиностроения (УАИ, 1971), д-р техн. наук по системному анализу, автоматическому управлению и тепловым двигателям (УАИ, 1989). Исследования в области АСУ и автоматического управления силовыми установками ЛА.



Арьков Валентин Юльевич, ст. науч. сотр., доцент каф. АСУ УГАТУ. Дипл. инж. по промышленной электронике (УАИ, 1986). Канд. техн. наук по системному анализу и автоматическому управлению (УГАТУ, 1993). Исследования в области идентификации и моделирования САУ ГТД.

К юбилею университета

Продолжение со с. 126

ВЕДУЩИЕ НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ РОССИИ В УГАТУ

К числу ведущих научных школ России, работающих в УГАТУ, относится научная школа чл.-кор. АН РБ, д-ра техн. наук, проф. В. С. Мухина. По итогам прошлого учебного года в ней получены следующие новые научные результаты.

Установлено, что вакуумно-дуговые методы позволяют синтезировать углеродные а-С-пленки, физико-механические характеристики которых могут приближаться к значениям, свойственным алмазу. Установлено, что из всех методов синтеза углеродных а-С пленок наиболее перспективным является метод осаждения алмазоподобного углеродного конденсата из плазмы стационарного дугового разряда в вакууме с применением средств очистки плазмы от макрочастиц катодного материала (графита).

Установлено, что ионная имплантация азота обеспечивает существенно большую фреттинг-стойкость деталей, чем другие методы модификации поверхностей ответственных деталей машин.

Разработанный системотехнический нейросетевой метод оптимизации технологических процессов позволил осуществить структурную многокритериальную оптимизацию проектных технологических процессов изготовления изделий и использовать его в составе нейросетевой САПР технического перевооружения авиадвигателестроительного производства.

Полученные в прошлом учебном году научные результаты опубликованы в нашей стране в двух монографиях, а за рубежом в различных научных изданиях в Китае, Хорватии, Англии, Сингапуре, Италии.

Материалы подготовил С. Г. Селиванов