

## НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ И РАЗВИТИЕ УГАТУ

УДК 539.3

**В. С. ЖЕРНАКОВ, В. С. КУЛИКОВ****ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
И ПРИКЛАДНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ И КОНСТРУКЦИЙ****Жернаков  
Владимир Сергеевич**

профессор, зав. кафедрой сопротивления материалов, проректор по научной работе УГАТУ. Дипл. инж.-механик по авиационным двигателям (УАИ, 1967). Д-р техн. наук по тепловым двигателям ЛА (УГАТУ, 1992). Заслуж. деятель науки и техники РФ. Исследования в области механики деформируемого твердого тела. Соавтор монографий «Проектирование составного холодновысадочного инструмента» (М.: Машиностроение, 1999), «Сопротивление разрушению элементов разъемных соединений высоконагруженных конструкций» (М.: Наука, 2000) и других, учебных пособий с грифом Минобразования «Что нужно знать о сопротивлении материалов» (М.: Машиностроение, 2001) и других.

**Куликов  
Владимир Сергеевич**

профессор кафедры сопротивления материалов УГАТУ. Дипл. инж.-механик (УАИ, 1964), д-р техн. наук по тепловым двигателям ЛА (заш. в ПермГТУ, 1994). Автор более 100 научных трудов и учебных пособий. Исследования в области механики деформируемых тел и конструкций.

С конца 60-х – начала 70-х годов прошлого столетия под влиянием и руководством выдающегося советского ученого, заместителя начальника ЦИАМ им. П. И. Баранова, заслуженного деятеля науки и техники РСФСР, лауреата Государственных премий СССР, доктора технических наук, профессора И. А. Биргера и его ученика – доктора технических наук, профессора Г. Б. Иосилевича на кафедре сопротивления материалов УАИ (УГАТУ) стало интенсивно развиваться новое научное направление и формироваться научная школа в области создания и развития новых численных и экспериментальных методов механики деформируемых тел, решения фундаментальных и прикладных задач теории упругости, пластичности и ползучести, изучения усталостной и длительной прочности элементов конструкций.

Решающую роль в становлении и развитии этого научного направления сыграл ректор института, член-корреспондент РАН, профессор Р. Р. Мавлютов, под руководством которого в

короткий срок кафедры была укомплектована высококвалифицированными научными работниками и педагогами, существенно укреплена ее материальная база.

Была организована отраслевая лаборатория прочности авиационных конструкций Минавиапрома СССР, в которой сформировался коллектив ученых, обладающий высоким научным и творческим потенциалом, создана мощная экспериментальная база. В лаборатории, руководимой проф. Г. Б. Иосилевичем, затем — проф. В. С. Жернаковым, начались систематические исследования в области механики и прочности деформируемых тел и элементов конструкций. Основное внимание было сосредоточено на решении следующих проблем.

### 1. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В разработке нового научного направления значительное место занимали исследования, связанные с решением одной из наиболее сложных задач механики деформируемых тел — задачи оценки концентрации напряжений в элементах авиационных конструкций, работающих в условиях высокоинтенсивных механических и тепловых воздействий, при которых в зонах концентрации напряжений возникают деформации пластичности и ползучести. В 70-е годы эта проблема была крайне актуальной для отечественного авиадвигателе- и самолетостроения, решавших задачу создания изделий нового поколения с повышенными тактико-техническими данными, а также характеристиками надежности и долговечности.

Для теоретического исследования концентрации напряжений Г. Б. Иосилевичем и И. В. Рокитянской в сотрудничестве с учеными Горьковского университета разработан [1, 2] комплекс алгоритмов и программ решения плоских и осесимметричных задач теории упругости и пластичности вариационно-разностным методом, сочетавшим преимущества известных вариационных и конечно-разностных методов решения задач математической физики. Детально исследована концентрация напряжений в элементах резьбовых соединений при упругих деформациях.

С применением вариационно-разностного метода Р. Р. Мавлютовым впервые решен ряд нелинейных задач концентрации напряжений в элементах авиационных конструкций с учетом пластичности конструкционных материалов, формы и размеров концентраторов, а также характера нагружения. Получены новые научные данные о характере распределения и уровне напряжений при упругопластических деформациях в зонах концентрации в пластинах и стержнях с отверстиями и выточками, в замковых соединениях лопаток турбомашин, резьбовых и фланцевых соединениях, а также других конструкциях [3, 4].

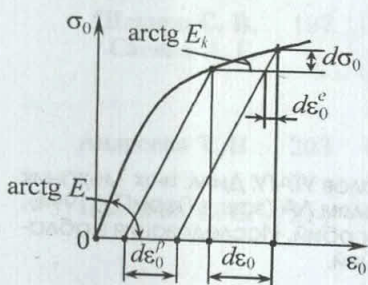


Рис. 1.1

Обнаружено, в частности, что учет пластических деформаций вносит существенные коррективы в характер распределения и уровень напряжений. Максимум напряжений обнаруживается не на контурах концентраторов, как считалось ранее, а на некотором удалении от них, на границах зон упругости и пластичности. Показано, что одновременно с резким повышением напряжений вблизи концентратора возникает неоднородное плоское и объемное напряженное состояние даже при простом растяжении. Эти факты наглядно иллюстрирует пример расчета концентрации напряжений в пластине (60×60 мм) с отверстием (∅10 мм) из сплава ХН77ТЮР ( $\sigma_T = 570$  МПа) при ее одноосном растяжении (рис. 1.1).

Углубляя эти исследования, В. С. Жернаков решил контактную задачу термовязкоупругопластичности о распределении нагрузки и концентрации напряжений в резьбовых соединениях, в которой, помимо деформаций упругости и пластичности, дополнительно учитывались также деформации ползучести конструкционного материала, возникновение которых характерно для теплонапряженных конструкций [5, 6]. Выполнено детальное исследование явления концентрации напряжений в элементах конструкций, деформирующихся в условиях ползучести материалов, получены новые научные данные о его влиянии на термоусталостную и длительную прочность.

Численные методы анализа напряженно-деформированного состояния и концентрации напряжений в элементах конструкций получили дальнейшее развитие в исследованиях Т. Н. Мардимасовой [7], разработавшей алгоритм и программу численной реализации метода

конечных элементов (МКЭ) — одного из наиболее эффективных методов решения краевых задач математической физики. На основе МКЭ ею выполнен цикл исследований концентрации напряжений в элементах конструкций при так называемом «сложном» нагружении, характеризующемся немонотонным изменением компонентов тензоров напряжений и деформаций, развитием деформаций пластичности и ползучести, а также сменой процессов нагружения и разгрузки в расчетных точках тела.

Обнаружено, в частности, что концентрация напряжений существенным образом зависит от «истории» нагружения, т. е. закономерностей изменения внешних нагрузок и температур. Это, например, достаточно убедительно подтверждают результаты расчета пластины с отверстием (рис. 1.2) при ее двухосном растяжении.

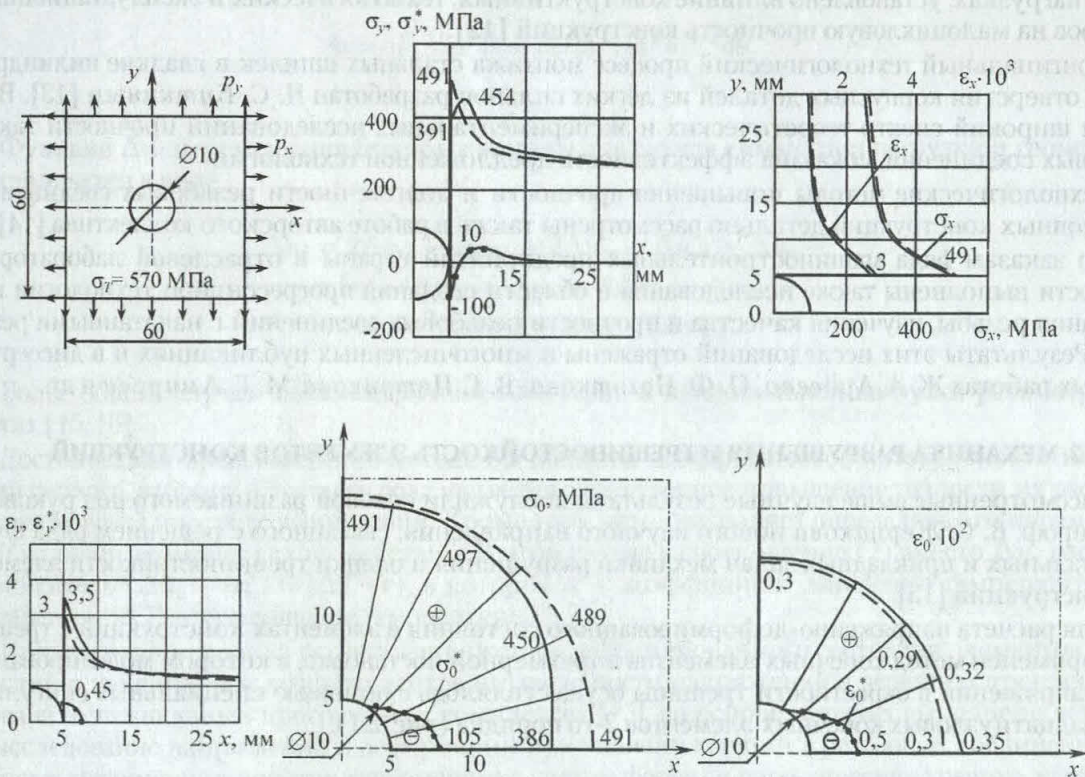


Рис. 1.2. НДС и остаточные напряжения в пластине: - - - - простое нагружение; — сложное нагружение; ●—●— остаточные напряжения и деформации

Так, при одновременном приложении усилий  $p_x$  и  $p_y$  («простое» нагружение) пластина испытывает только упругие деформации и максимум напряжений на контуре отверстия достигает порядка 490 МПа. Совершенно иная картина наблюдается при нагружении пластины сначала усилием  $p_y$ , затем —  $p_x$ . В этом типичном случае «сложного» нагружения в пластине появляются (при тех же конечных значениях внешних нагрузок) пластические деформации, максимум напряжений смещается от контура отверстия в тело пластины и снижается до значений порядка 450 МПа.

Подобное различие концентраций напряжений при простом и сложном упругопластическом деформировании обнаружено и для других типов конструкций.

Следует отметить, что сложившийся подход к исследованию концентрации напряжений предполагал ее расчет при заданных внешних нагрузках без учета их реального распределения вследствие контактного воздействия на рассматриваемую конструкцию. Понятно, что такой подход приводил к серьезным погрешностям, особенно при близком расположении зон контакта и концентрации напряжений. Учитывая это, Г. Б. Иосилевич разработал [8] оригинальный численно-аналитический метод решения так называемых «конструкционно-контактных» задач, в котором напряженно-деформированное состояние и концентрация напряжений во взаимодействующих деталях устанавливались в рамках общего алгоритма решения контактной задачи, причем известные функции влияния находились одним из численных методов, в частности,

вариационно-разностным или методом конечных элементов. Этот подход был успешно применен в работах Г. В. Осиповой [9] и Ю. В. Лукашука [10] для исследования концентрации напряжений в элементах авиационных двигателей. С. Т. Ковганом разработан комплекс моделей и алгоритмов расчета фланцевых соединений [11].

Помимо рассмотренных выше теоретических разработок, в отраслевой лаборатории прочности активно развивались экспериментальные исследования, связанные с изучением влияния напряженно-деформированного состояния и концентрации напряжений на усталостную и длительную прочность элементов конструкций, а также технологических методов повышения их прочности и долговечности.

Ю. А. Кувшиновым исследована прочность резьбовых соединений при ударных и динамических нагрузках, установлено влияние конструктивных, технологических и эксплуатационных факторов на малоцикловую прочность конструкций [12].

Оригинальный технологический процесс монтажа стальных шпилек в гладкие цилиндрические отверстия корпусных деталей из легких сплавов разработан Н. С. Буткиным [13]. Выполнен широкий спектр теоретических и экспериментальных исследований прочности таких резьбовых соединений, показана эффективность предложенной технологии.

Технологические методы повышения прочности и долговечности резьбовых соединений авиационных конструкций детально рассмотрены также в работе авторского коллектива [14].

По заказам ряда машиностроительных предприятий страны в отраслевой лаборатории прочности выполнены также исследования в области создания прогрессивной технологии накатывания резьбы, изучения качества и прочности резьбовых соединений с накатанными резьбами. Результаты этих исследований отражены в многочисленных публикациях и в диссертационных работах Ж. А. Ардеева, О. Ф. Ноготкова, В. Г. Петрикова, М. Г. Амирова и др.

## 2. МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ И ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Рассмотренные выше научные результаты послужили основой развиваемого под руководством проф. В. С. Жернакова нового научного направления, связанного с решением ряда фундаментальных и прикладных задач механики разрушения и оценки трещиностойкости элементов конструкций [15].

Для расчета напряженно-деформированного состояния в элементах конструкций с трещинами применен метод конечных элементов в трехмерной постановке, в котором моделирование поля напряжений в окрестности трещины осуществлялось с помощью специальных сингулярных двадцатиузловых конечных элементов 2-го порядка (рис. 2.1).

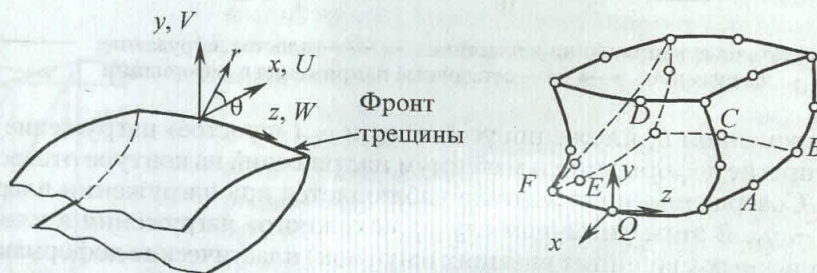


Рис. 2.1

Функции формы изопараметрического конечного элемента для узловых и промежуточных точек соответственно приняты в виде

$$\begin{aligned} N_j &= \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_j)(1 + \eta\eta_j)(1 + \zeta\zeta_j)(\zeta\zeta_j + \eta\eta_j + \xi\xi_j - 2), \\ N_j &= \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_j)(1 + \eta\eta_j)(1 + \zeta\zeta_j)(1 - \xi^2\eta_j^2\zeta_j^2 - \eta^2\xi_j^2\zeta_j^2 - \zeta^2\xi_j^2\eta_j^2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Остальные соотношения метода конечных элементов использованы в обычной форме. Коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины при нормальном отрыве ( $K_1$ ), при поперечном сдвиге ее поверхностей в направлении оси  $x$  ( $K_2$ ) и продольном сдвиге по

оси  $z$  ( $K_3$ ) выражены через узловые перемещения элементов, окружающих вершину эллиптической трещины:

$$K_i = \frac{2G\sqrt{2\pi}}{F_i(\theta)\sqrt{L}} \frac{\Phi}{[(a/b)^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta]^{1/4}} \Delta u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.2)$$

где  $a, b$  — оси элемента;  $L$  — длина трещины;  $\theta$  — полярная координата (рис. 2.1);  $F_i(\theta)$  — тригонометрические функции ( $i = 1, 2, 3$ ) [15];  $\Phi$  — полный эллиптический интеграл второго рода, определяемый из уравнения

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} [\sin^2 \theta + (a/b)^2 \cos^2 \theta]^{1/2} d\theta. \quad (2.3)$$

Функция  $\Delta u_i$  перемещения берегов трещины для случая симметрии нагрузки и геометрии представляется в виде

$$\begin{aligned} \Delta u_i = & 2\Delta u_{ia} - \Delta u_{ib} + 2\Delta u_{ie} - \Delta u_{id} + \Delta u_{ic} + \\ & + 0,5\eta(-4\Delta u_{ia} + \Delta u_{ib} + 4\Delta u_{ie} - \Delta u_{id}) + \\ & + 0,5\eta^2(2\Delta u_{id} + \Delta u_{ib} - 2\Delta u_{ic}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Более общий случай несимметричной геометрии и произвольной нагрузки рассмотрен в работах [15, 16].

Достоинством предложенного метода вычисления коэффициентов интенсивности напряжений первого, второго и третьего рода является существенное повышение точности их расчета при достаточной простоте вычислений. Кроме того, метод позволяет определить эти параметры и при наличии термических воздействий. В этом случае в соотношение (2) вместо  $\Delta u_i$  вводится множитель  $(\Delta u_i - \alpha(1+\nu)\Delta T \cdot r)$ , в котором  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения;  $\Delta T$  — приращение температуры.

Приведенная методика расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций с трещинами и коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах трещин реализована в специальных программных комплексах [15], на основе которых выполнено детальное исследование напряжений и деформаций при наличии трещин в резьбовых соединениях и замковых соединениях лопаток турбомашин с учетом формы и расположения трещин, контактного взаимодействия элементов этих конструкций, а также конструктивно-технологических факторов.

На основе этих результатов выполнено экспериментальное исследование кинетики роста трещин при малоцикловом и многоцикловом нагружении, установлены пределы работоспособности разъемных соединений с дефектами типа трещин. Предложены ряд новых методик экспертной оценки их живучести и ресурса, а также практические рекомендации по повышению трещиностойкости в условиях реальной эксплуатации.

Для резьбовых соединений, в частности, описанным выше методом решена наиболее актуальная и сложная контактная задача о распределении нагрузки по виткам резьбы и напряженно-деформированном состоянии соединения при наличии трещин.

Для моделирования контактного взаимодействия витков резьбы и гайки использовались специальные объемные или плоские контактные конечные элементы, а условия контакта устанавливались путем подбора их жесткости и величины «проникновения» деталей друг в друга. В процессе решения задачи менялась жесткость контакта между отдельными шагами по нагрузке. Таким образом обеспечивалась большая устойчивость итерационного процесса и эффективность вычислений.

На рис. 2.2 в качестве примера приведено распределение нагрузки  $Q$  по виткам резьбы М10×1,5 из сплавов ВТЗ-1 и 30ХГСА без учета и с учетом развивающейся внутренней (кривая 2) и выходящей на поверхность (кривая 3) трещины ( $N$  — номер витка).

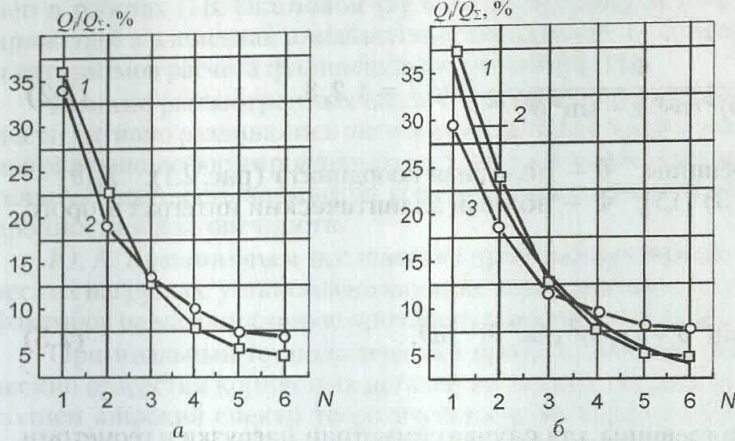


Рис. 2.2. Распределение нагрузки по виткам резьбы: а — ВТЗ-1; б — 30ХГСА; 1 — без учета трещины; 2 — трещина подповерхностная,  $h = 1,6$  мм; 3 — трещина на поверхности,  $h = 1,6$  мм

нескольких положений вершины трещины. На рис. 2.3, а показано изменение приведенного коэффициента интенсивности напряжений (КИН) первого рода  $Y_1 = K_1/\sigma_n \cdot (\pi h)^2$  в зависимости от высоты гайки, погрешностей шага резьбы. А также даны соотношения модулей упругости материалов болта и гайки.

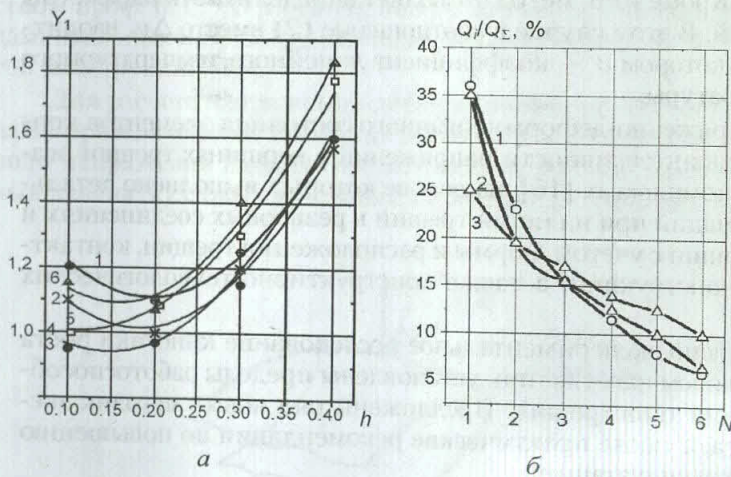


Рис. 2.3. Значения приведенного КИН первого рода (а) и распределение нагрузки по виткам (б) для трещины, расположенной в зоне первого нагруженного витка резьбы

бы примерно на 10–25% меньше значения, полученного без учета этого перераспределения, причем это различие уменьшается с ростом глубины трещины.

Интересно, что в исследованной области длин трещин величина коэффициента  $K_2$  интенсивности напряжений второго рода, характеризующего разрушение сдвигом, составляет менее 10% от значений КИН первого рода.

### 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Учитывая актуальность и практическую значимость задачи совершенствования методов расчета и проектирования роторов авиационных газотурбинных двигателей, под руководством

Установлено, что с изменением относительной глубины трещины  $\bar{h} = h/d$  ( $d$  — внутренний диаметр резьбы) происходит перераспределение опорного давления по виткам, причем изменение нагрузки на первый виток составляет от 3,2 до 13,8% в зависимости от материалов болта и гайки, глубины и места залегания усталостной трещины. При  $\bar{h} = 0,2 = \text{const}$  и выходе трещины на поверхность происходит дополнительная разгрузка первого витка примерно на 12%, приводящая к изменению поля напряжений в области вершины трещины.

По формуле (2.2) выполнен расчет коэффициента  $K_1$  интенсивности напряжений для

Кривые 1 и 2 на рис. 2.3, а получены без учета и с учетом перераспределения нагрузки  $Q_i$  по виткам резьбы соответственно; кривая 3 соответствует наличию подповерхностной трещины и отношению модулей упругости  $E_B/E_T = 1,0$ ; для кривой 4 это отношение равно 1,9; зависимости 5, 6 получены для температур 200 и 400°C соответственно.

Рис. 2.3, б иллюстрирует характер распределения нагрузки по виткам резьбы без учета (кривая 1) и с учетом наличия трещины во впадине первого витка резьбы при ее глубине 2 мм (кривая 2) и 3 мм (кривая 3).

Анализ показывает, что величина  $Y_1$  приведенного КИН первого рода для случая перераспределения нагрузки по виткам резьбы

проф. В. С. Жернакова разработаны теоретические основы и численный метод решения геометрических нелинейных задач теории тонких упругих оболочек [17].

Построена конечноэлементная модель оболочки с независимой аппроксимацией линейных перемещений и поворотов в узлах сетки с привлечением кинематической модели Коши–Пуассона (аппроксимационный подход), согласно которой вектор перемещения любой точки тонкой оболочки записывается в виде

$$\mathbf{u}^c(\xi, \eta, \varsigma) = \mathbf{u}(\xi, \eta) + \varsigma \boldsymbol{\theta}(\xi, \eta), \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{u}(\xi, \eta)$  – вектор перемещения,  $\boldsymbol{\theta}(\xi, \eta)$  – вектор-функция, ответственная за изгибно-крутильную часть деформаций в точке  $(\xi, \eta)$  – лагранжевы координаты срединной (координатной) поверхности ( $\varsigma$  – «толщинная» координата). Причем, в отличие от аксиоматического подхода Кирхгофа–Лява, функция  $\boldsymbol{\theta}(\xi, \eta)$  не отождествляется с вектором поворота  $\boldsymbol{\beta}(\xi, \eta)$  нормального элемента. Установлено, что такая трактовка возможна лишь в рамках линейной и «среднего» изгиба теории оболочек ( $|\boldsymbol{\beta}| \ll 1$ ):

$$\mathbf{u}^c(\xi, \eta, \varsigma) = \mathbf{u}(\xi, \eta) + \varsigma \boldsymbol{\beta}(\xi, \eta) \times \mathbf{k}_3, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{k}_3$  – единичный вектор нормали к срединной поверхности.

Показано, что модель (3.2) с пятью степенями свободы узла приводит к появлению нулевых строк в глобальной матрице жесткости конструкции и подвержена эффекту «машинного записания». Модель (3.1) свободна от первого из указанных недостатков; в роли шестой степени свободы выступает не компонента вектора поворота  $\boldsymbol{\beta}$ , а деформация нормального элемента.

Получено уравнение движения конечноэлементной геометрически нелинейной модели в приращениях

$$\mathbf{M} \Delta \mathbf{v}_{,tt} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_\sigma + \mathbf{K}_q) \Delta \mathbf{v} = \mathbf{P}, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{M}, \mathbf{K}$  – матрицы масс и жесткости (как в линейной теории);  $\mathbf{K}_\sigma$  – матрица начальных напряжений;  $\mathbf{K}_q$  – матрица начального нагружения;  $\Delta \mathbf{v}$  – вектор приращений узловых перемещений и поворотов.

Предложен способ диагонализации матрицы масс, позволяющий свести обобщенную проблему о собственных значениях к стандартной, сводящейся к замене инерционных сил узловыми, совершающими ту же работу, что и распределенные силы.

При решении нелинейных задач методом последовательных нагружений, сколь малой не была бы величина шага нагружения, накапливается погрешность. Разработана итерационная процедура уточнения численного решения, заключающаяся в минимизации невязки уравнений движения (3.3), записанных в напряжениях, после вычисления последних.

Для решения задач, где нелинейности вызваны неупругими деформациями, предложен модифицированный вариант теории малых упругопластических деформаций Ильюшина. Суть модификации заключается в следующем: как известно, первая из трех гипотез теории течения устанавливает линейную связь между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций (объемная деформация происходит упруго). Установлено, что при конечных деформациях объемная деформация определяется не первым, а третьим инвариантом тензора деформаций Грина. С учетом этого первая гипотеза теории течения заменена уравнением, выражающим линейную связь между приращениями первого инварианта тензора напряжений и третьим инвариантом тензора деформаций. Показано, что полученные уравнения в случае малых деформаций совпадают с теорией Ильюшина, а при конечных – описывают изохорическую деформацию.

Уравнения (3.3) позволяют не только решать геометрически нелинейные задачи теории оболочек (при малых поворотах) методом последовательных нагружений, но и исследовать поведение предварительно нагруженных статической нагрузкой оболочек. В частности, вести расчеты на жесткость вращающихся роторов газотурбинных двигателей с учетом «ужесточающего» влияния центробежных сил, оценить влияние этих сил на частоты собственных колебаний и т. д.

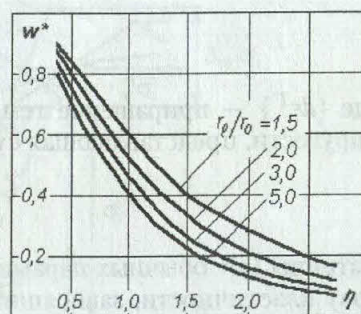


Рис. 3.1

В качестве примера на рис. 3.1 приводятся результаты численных экспериментов на плоских дисках, иллюстрирующие «ужесточающее» влияние центробежных сил — зависимость от отношения максимального прогиба (обода), опертого по узкому краю, вращающегося плоского кольцевого диска постоянной толщины под действием гироскопических сил по отношению к этой же величине для «невращающегося» диска от параметра  $\eta = r_l V_{\max} / (ah)$  ( $V_{\max}$  — окружная скорость обода,  $a$  — скорость звука в материале,  $h$  — толщина) для различных отношений радиуса обода  $r_l$  к радиусу ступицы  $r_0$ . Представленные результаты, в частности, показывают, что при  $\eta \geq 2,5$  действительные прогибы становятся на порядок меньше, чем результаты, полученные без учета центробежных сил. Более детальный анализ этой задачи и ряда других приведен в работе [17].

#### 4. ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

В последние годы на кафедре интенсивно развивается научное направление, связанное с разработкой теоретических основ, моделей и алгоритмов расчета процессов образования и релаксации остаточных напряжений. Эта проблема относится к числу давно поставленных, но не потерявших своей актуальности, проблем механики деформируемых тел и конструкций. Ее специфика прежде всего в том, что остаточное напряжение — это особый вид напряженного состояния, в котором находится деформируемое тело при отсутствии внешних механических, тепловых или иных нагрузок. Его нельзя рассчитать на основе обычной краевой задачи без знания и учета всей предшествующей «истории» нагружения и деформации тела. Необходимо моделирование всего процесса деформирования остаточных напряжений, включая и процесс их релаксации.

В данном разделе сначала рассматривается один из аспектов этой проблемы, касающийся определения остаточных напряжений, формирующихся в процессах упругопластического деформирования при «сложном» нагружении, когда имеет место непропорциональное и немонотонное изменение компонентов тензоров напряжений и деформаций. Такие процессы присущи элементам конструкций из металлов и сплавов.

Наиболее общий подход к решению этой задачи развивается в работах Т. Н. Мардимасовой [18, 19]. При этом процесс «сложного» нагружения и упругой или упругопластической разгрузки разбивается на малые этапы по параметру нагружения и на каждом из них решается упругая или упругопластическая задача на основе теории пластического течения. Расчет последнего этапа дает значения остаточных напряжений.

Существенной особенностью алгоритма расчета является построение итерационного процесса вычислений не только по физической нелинейности (пластичности) материала, но и по характеру деформирования (нагружение или разгрузка) в расчетных точках тела.

Линеаризация упругопластической задачи осуществляется методом переменных параметров упругости, в котором приращение полной деформации представляется в форме

$$\{d\varepsilon\} = [a^*]\{d\sigma\} + \{d\varepsilon^T\}, \quad (4.1)$$

где  $\{d\varepsilon^T\}$  — приращение температурной деформации;  $[a^*]$  — матрица переменных параметров упругости, представляющая сумму

$$[a^*] = [a]^e + [a]^p, \quad (4.2)$$

матрицы  $[a]^e$  обычных параметров упругости ( $E, \nu$ ) и матрицы  $[a]^p$  параметров (коэффициентов) пластичности, зависящих от напряженного состояния, элементы которой находятся по формуле

$$a_{kl}^p = F_{\sigma}(\sigma_i) \frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}^{(l)}} S_{ij}^{(k)}, \quad (4.3)$$

где  $F_{\sigma}(\sigma_i)$  — функция напряженного состояния; индексы  $(k, l)$  в правой части представляют собой номера элементов (строк) в матрицах  $\{S\} = \{S_x, \dots, \tau_{xy}, \dots\}^T$  и  $\{\sigma\} = \{\sigma_x, \dots, \tau_{xy}, \dots\}^T$



соответственно. Производную  $\frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}^{(e)}}$  в формуле (4.3) можно определить, дифференцируя интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \dots + 6(\tau_{xy}^2 + \dots)]}, \quad (x, y, z) \quad (4.4)$$

по компонентам напряжений. Получим

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \sigma_{ij}^{(l)}} = \begin{cases} \frac{2}{3\sigma_i}(\sigma_{ij}^{(l)} - \sigma) & \text{при } i = j, \quad l = 1, 2, 3, \\ \frac{3}{2\sigma_i} 2\sigma_{ij}^{(l)} & \text{при } i \neq j, \quad l = 4, 5, 6, \end{cases} \quad (4.5)$$

где  $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3$  — среднее напряжение.

Для анализа характера деформации в расчетных точках тела условно выделяются по две зоны упругости  $V_A^e + V_B^e = V^e$  и пластичности  $V_A^p + V_B^p = V^p$ , в которых точки  $A_{m-1}$  и  $A_m^{(i)}$  относятся к кривой нагружения, а  $B_{m-1}$  и  $B_m^{(i)}$  — к кривой разгрузки (рис. 4.1). Анализ процесса нагружения ( $d\sigma_i > 0$ ) ведется по обычной кривой деформирования  $\sigma_i = f(\varepsilon_i)$  (рис. 4.1, а), а разгрузки ( $d\sigma_i < 0$ ) — по кривой  $\tilde{\sigma}_i = f(\tilde{\varepsilon}_i)$  (рис. 4.1, б). Мгновенные пределы текучести  $\sigma_{T^p}$  и  $\tilde{\sigma}_T$  на этих кривых определяют по интенсивности накопленной пластической деформации  $\varepsilon_{i*}^p$ .

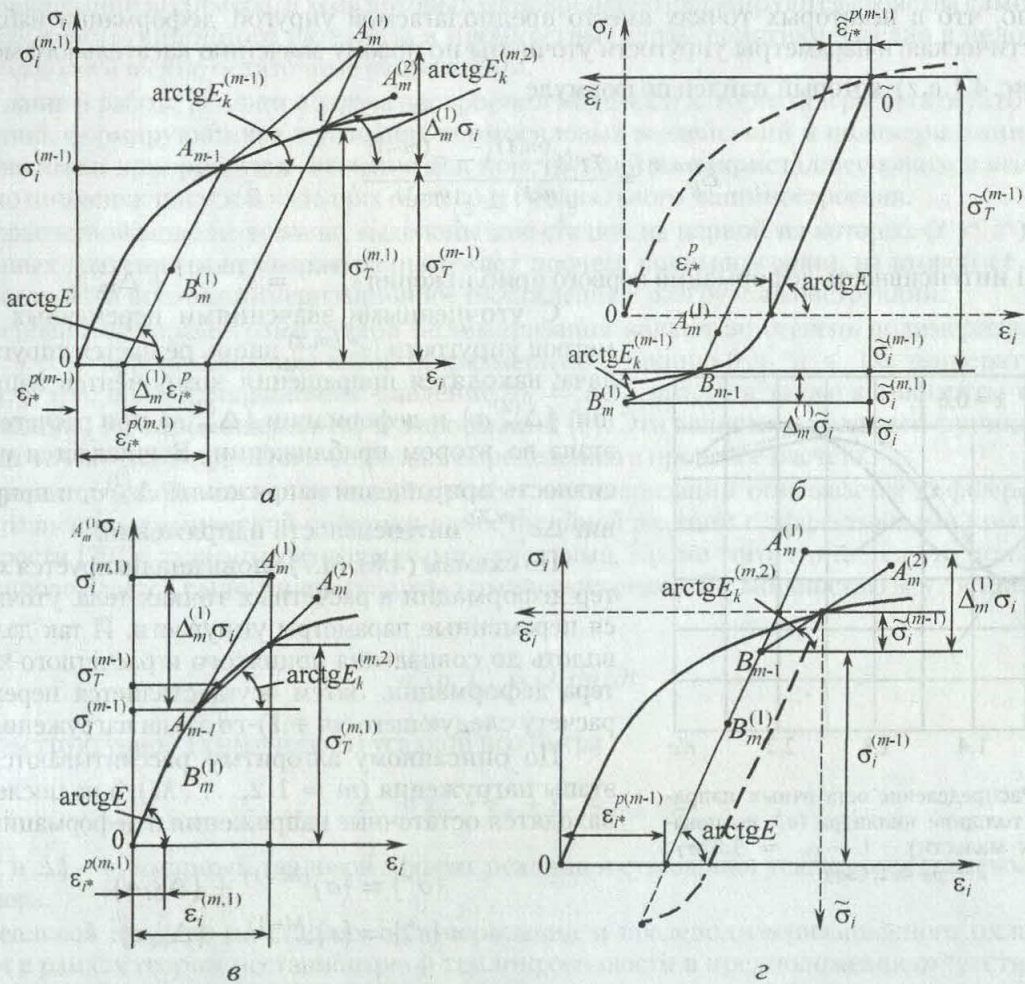


Рис. 4.1. Схема расчета этапа методом переменных параметров упругости в точках области пластичности (а, б) и в точках области упругости (в, з)

В первом приближении для точек области пластичности  $V^{p(m,1)}$  принята следующая схема анализа характера деформации в расчетных точках тела и корректировки переменных парамет-

ров упругости:

$$[a^*]^{(m,2)} = \begin{cases} [a^*]^{(m,1)} & \text{при } \Delta\sigma_i^{(m,1)} > 0, \sigma_i^{(m,1)} > \sigma_{Tp}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_A^{p(m,1)}, \\ & \Delta\sigma_i^{(m,1)} < 0, \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{Tc}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_B^{p(m,1)}, \\ [a]^e & \text{при } \Delta\sigma_i^{(m,1)} < 0, \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{Tp}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_A^{p(m,1)}, \\ & \Delta\sigma_i^{(m,1)} > 0, \sigma_i^{(m,1)} > \sigma_{Tc}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_B^{p(m,1)}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Аналогичный анализ проводится и для точек принятой в первом приближении области  $V^{e(m,1)} = V_A^{e(m,1)} + V_B^{e(m,1)}$  упругих деформаций («упругие точки»). В результате получается следующая схема уточнения переменных параметров упругости:

$$[a^*]^{(m,2)} = \begin{cases} [a^*]^{(m,1)} = [a]^e & \text{при } \Delta\sigma_i^{(m,1)} > 0, \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{Tp}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_A^{e(m,1)}, \\ & \Delta\sigma_i^{(m,1)} < 0, \sigma_i^{(m,1)} > \sigma_{Tc}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_B^{e(m,1)}, \\ [a^*(E_k^{(m,2)}, \sigma_{ij}^{(m-1)})] & \text{при } \Delta\sigma_i^{(m,1)} < 0, \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{Tp}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_A^{e(m,1)}, \\ & \Delta\sigma_i^{(m,1)} < 0, \sigma_i^{(m,1)} < \sigma_{Tc}^{(m-1)}, (x, y, z) \in V_B^{e(m,1)}, \end{cases} \quad (4.7)$$

где учтено, что в некоторых точках вместо предполагаемой упругой деформации наблюдалась пластическая, и параметры упругости уточнены по новому значению касательного модуля  $E_k^{(m,2)}$  (рис. 4.1, в, з), который найден по формуле

$$E_k^{(m,2)} = \frac{\sigma_T(\varepsilon_i^{(m,1)}) - \sigma_i^{(m-1)}}{\varepsilon_i^{(m,1)} - \varepsilon_i^{(m-1)}}, \quad (4.8)$$

в которой интенсивность деформаций первого приближения  $\varepsilon_i^{(m,1)} = \varepsilon_i^{(m-1)} + \Delta_m^{(1)} \varepsilon_i$ .

С уточненными значениями переменных параметров упругости  $[a^*]^{(m,2)}$  вновь решается упругая задача: находятся приращения компонентов напряжений  $\{\Delta_m^{(2)} \sigma\}$  и деформации  $\{\Delta_m^{(2)} \varepsilon\}$  при расчете  $m$ -го этапа во втором приближении. Вычисляется интенсивность приращений напряжений  $\Delta_m^{(2)} \sigma_i$  и приращение  $\Delta\sigma_i^{(m,2)}$  интенсивности напряжений.

По схемам (4.6), (4.7) вновь анализируется характер деформации в расчетных точках тела, уточняются переменные параметры упругости. И так далее — вплоть до совпадения принятого и расчетного характера деформации. Затем осуществляется переход к расчету следующего  $(m+1)$ -го этапа нагружения.

По описанному алгоритму рассчитываются все этапы нагружения  $(m = 1, 2, \dots, M)$ , а на последнем находятся остаточные напряжения и деформации:

$$\begin{aligned} \{\sigma^*\} &= \{\sigma\}^{(M-1)} + \{\Delta_M \sigma\}, \\ \{\varepsilon^*\} &= \{\varepsilon\}^{(M-1)} + \{\Delta_M \varepsilon\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Различие в характере распределения остаточных напряжений, рассчитанных по приведенному алгоритму и по теореме об упругой разгрузке А. А. Ильюшина, наглядно иллюстрирует пример расчета цилиндра (рис. 4.2) с отношением радиусов  $b/a = 2,5$  и коэффициентом упрочнения материала  $k = 1 - E_k/E = 0,6$ , где  $E_k$  — касательный модуль линейного участка упрочнения на диаграмме деформирования.

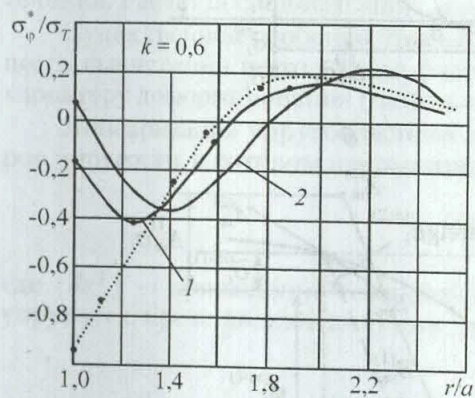


Рис. 4.2. Распределение остаточных напряжений по толщине цилиндра ( $\sigma_r^*$  не показаны ввиду малости):  $1 - p_a = 1,35\sigma_T$ ;  $2 - p_a = 1,62\sigma_T$

Обнаружено, что при нагружении цилиндра давлением  $p_a > 0,82\sigma_T$  и последующей разгрузке возникают «вторичные» пластические деформации, а остаточные напряжения меняются по радиусу немонотонно (сплошные линии на рис. 4.2), достигая максимума в области  $r/a \cong 2,0-2,2$ . Совершенно иной характер распределения остаточных напряжений получается (рис. 4.2, пунктир), если их рассчитывать без учета пластических деформаций, возникающих при разгрузке. Интересно отметить, что такие же особенности распределения остаточных напряжений обнаружены и при расчете дисков, нагружаемых внутренним давлением, а также ряда других элементов конструкций.

Приведенные результаты убедительно показывают, насколько существенно различие в характере распределения и уровне остаточных напряжений, рассчитанных по предлагаемой методике, учитывающей реальный характер нагружения и разгрузки тела, от общепринятой, основанной на модели простого упругопластического деформирования и упругой разгрузки.

Обратимся теперь к проблеме моделирования процессов образования остаточных напряжений в изделиях из полимерных материалов, которая разрабатывается в исследованиях [20] Т. Н. Мардимасовой и В. С. Куликова. В отличие от металлов и сплавов в полимерах, которые ведут себя как вязкоупругие тела, пластические деформации не возникают и реализуются совершенно иные механизмы и закономерности возникновения остаточных напряжений.

В большинстве случаев изготовление конструкций из полимерных материалов и формирование остаточных напряжений происходит в условиях комплекса взаимосвязанных тепловых, механических и физико-химических процессов полимеризации, кристаллизации или структурного стеклования полимера, в ходе которых одновременно формируются свойства самого полимера как конструкционного материала и прочностные характеристики изделия в целом, включая и технологические остаточные напряжения.

В данной работе решается задача построения моделей и алгоритмов расчета остаточных напряжений, формирующихся в условиях термосиловых воздействий и полимеризации материала. Она имеет приоритетное значение для конструкций из некристаллизующихся полимеров, широко применяющихся в изделиях общего и специального машиностроения.

В расчетной модели условно выделены две стадии, на первой из которых ( $t < t^*$ ) при повышенных давлении и температуре протекает процесс полимеризации, на второй ( $t \geq t^*$ ) — осуществляется послеполимеризационное охлаждение и разгрузка конструкции.

Основными параметрами стадии полимеризации являются: степень полимеризации  $\eta = \eta(x, y, z, t)$ , представляющая собой безразмерную функцию  $0 \leq \eta \leq 1,0$ , температура  $T = T(x, y, z, t)$ , полимеризационное давление  $\sigma_0 = \sigma_0(x, y, z, t)$ , а также компоненты векторов напряжений  $\{\sigma\}$ , перемещений  $\{u\}$  и деформаций  $\{\varepsilon\}$ . Эти величины являются функциями координат точек тела и времени и подлежат определению в процессе расчета.

Принято, что физико-химический процесс полимеризации описывается дифференциальным уравнением химической кинетики одностадийной реакции с эффективными константами ее скорости [20] и заданными начальными условиями. Кроме того, считается что полимеризация сопровождается выделением теплоты химических реакций с мощностью внутренних источников

$$q_v^*(\eta, T) = Q^* \partial \eta / \partial t, \quad (4.10)$$

а также структурной (химической) усадкой полимера

$$\Delta^s = \varepsilon_x^s + \varepsilon_y^s + \varepsilon_z^s = \Delta_0^s \cdot \eta, \quad (4.11)$$

где  $Q^*$  и  $\Delta_0^s$  — суммарный тепловой эффект реакции и суммарная усадка, определяемые типом полимера.

Тепловой процесс на стадиях полимеризации и послеполимеризационного охлаждения описан в рамках теории нестационарной теплопроводности в предположении отсутствия течения полимера, связанного с оформлением конфигурации изделия. Объемная теплоемкость  $c\rho = c\rho(\eta, T)$  и коэффициент теплопроводности  $\lambda = \lambda(\eta, T)$  приняты зависящими от степени полимеризации и температуры. Для общности принято, что на части  $S_1$  поверхности полимерного тела заданы граничные условия I рода с заданной функцией температур  $\psi(x, y, z)$ , на границе  $S_2$  предполагается наличие конвективного теплообмена с окружающей средой с коэффициентом

теплоотдачи  $h_{\Sigma}$  и температурой  $T_c$ . Поверхность  $S_3$  считается поверхностью идеального теплового контакта с другими элементами конструкции, и здесь предполагается наличие поверхностных источников тепла плотностью  $q_{s3}$ .

Напряженно-деформированное состояние конструкции описывалось в рамках линейной теории термовязкоупругости, причем на стадии полимеризации упругие и реологические характеристики полимера считались зависящими от степени полимеризации и температуры, а ядро ползучести строилось на основе принципа полимеризационно-температурно-временной аналогии. Для этапа послеполимеризационного охлаждения свойства полимера (при  $\eta = 1,0$ ) принимались зависящими только от температуры.

Численная реализация краевых задач теплопроводности и термовязкоупругости осуществлялась методом конечных элементов, а кинетические уравнения решались для узловых точек конечно-элементной модели.

В результате для стадии полимеризации материала построена следующая модель итерационного процесса расчета на некотором временном слое  $\Delta t_m = \Delta t_m - \Delta t_{m-1}$ :

$$\left. \begin{aligned} m = 1, 2, 3, \dots; \quad i = 1, 2, 3, \dots; \quad \lambda_m^{(i)} &= \lambda(\eta_m^{(i-1)}, \theta_m^{(i-1)}); \quad c\rho_m^{(i)} = c\rho(\eta_m^{(i-1)}, \theta_m^{(i-1)}); \\ q_{Vm}^{(i)} &= q_{Vm}^*(\eta_m^{(i-1)}, \theta_m^{(i-1)}); \quad \eta_m^{(0)} = \eta_{m-1}, \theta_m^{(0)} = \theta_{m-1}; \\ \{\theta\}_m^{(i)} &= \{\theta\}_{m-1} + \left( \{\Phi\}_m^{(i-1)} + \{\Phi\}_{m-1} \right) \Delta t_m / 2; \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} E_m^{(i)} &= E(\eta_m^{(i-1)}, \theta_m^{(i-1)}); \quad \nu_m^{(i)} = \nu(\eta_m^{(i-1)}, \theta_m^{(i-1)}); \quad \alpha_m^{(i)} = \alpha(\eta_m^{(i-1)}, \theta_m^{(i-1)}); \\ B_{0m}^{(i)} &= B_0(\eta_m^{(i-1)}, \theta_m^{(i-1)}); \\ t_m^* &= \sum_{i=0}^{m-1} \beta_{\eta}(\eta(t_i)t_i) \cdot \beta_T(T(t_i)t_i) \Delta t_i; \quad \xi_m^* = \sum_{k=0}^{i-1} \beta_{\eta}(\eta(t_k)t_k) \cdot \beta_T(T(t_k)t_k) \Delta t_k; \\ \{P_0\}_m^{(i)} &= \{P_0(\eta_m^{(i-1)}, \theta_m^{(i-1)})\}; \quad [K]_m^{(i)} \{U\}_m^{(i)} = \{P_V\}_m + \{P_S\}_m + \{P_0(\eta_m^{(i-1)}, \theta_m^{(i-1)})\}; \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} k = 1, 2, 3, \dots; \quad \{\eta_j\}_m^{(k)} &= \{\eta_j\}_{m-1} + \left( \{f_j\}_m^{(k-1)} + \{f_j\}_{m-1} \right) \Delta t_m / 2; \\ 0 \leq \eta_j \leq 1, 0; \quad t_0 \leq t_m \leq t_j^*; \quad \{\eta_j(t_0)\} &= \{\eta_j\}_0; \quad \eta_j = 1, 0; \quad t_m > t_j^*; \\ \{\eta_j(t_j^*)\} &= \{\eta_j(t_0)\} + \int_{t_0}^{t_j^*} \{f_j\} dt = 1, 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

где  $m$  — номер временного слоя;  $i$  — номер итерации при решении задач теплопроводности и термовязкоупругости;  $k$  — то же для соотношений кинетики полимеризации.

Система уравнений (4.12)–(4.14) отражает следующую схему вычислений. В начальном приближении характеристики полимера принимаются по степени полимеризации  $\eta_{m-1}$  и узловой температуре  $\theta_{m-1}$  конца предыдущего временного слоя. Реализуется итерационный процесс (4.12) решения нелинейной задачи, затем решается задача (4.13) термовязкоупругости. Находится первое приближение для векторов узловых температур  $\{\theta\}_m^{(1)}$ , перемещений  $\{U\}_m^{(1)}$ , деформаций  $\{\varepsilon\}_m^{(1)}$ , напряжений  $\{\sigma\}_m^{(1)}$  и давлений  $\sigma_{0m}^{(1)}$ . Методом последовательных приближений ( $k = 1, 2, \dots$ ) решаются кинетические уравнения (4.14), находится первое приближение  $\{\eta_j\}_m^{(1)}$  для степени полимеризации. Далее по ее величине уточняются теплофизические и реологические характеристики полимера и вновь повторяется процесс решения системы (4.12)–(4.14) во втором приближении. И так далее, вплоть до достаточной близости двух соседних приближений. Затем осуществляется переход к расчету следующего временного слоя.

Существенное упрощение алгоритма вычислений получается в случае, когда кинетическая функция  $f = f(\eta, T)$  не зависит от давления  $\sigma_0$ . Система уравнений (4.12)–(4.14) распадается на две независимых: первая — из уравнений (4.12), (4.14) термохимической кинетики, вторая — из соотношений (4.13) термовязкоупругости. При этом сначала решается линейная система (4.12), (4.14), затем, с учетом найденных значений степени полимеризации и температуры, — задача (4.13) термовязкоупругости.

Следует отметить, что система уравнений (4.12)–(4.14) описывает процесс неоднородной объемной полимеризации, поэтому при ее решении учитывается, что в точках, где этот процесс завершился ( $t_m = t^*$ ), степень полимеризации считается постоянной и равной  $\eta = 1,0$ . Характеристики полимера принимаются зависящими только от температуры.

Для полностью заполимеризованного полимера завершающая стадия послеполимеризационного охлаждения и разгрузки, на которой формируются остаточные напряжения, может быть описана следующей системой независимых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m = 1, 2, 3, \dots; \quad i = 1, 2, 3, \dots; \quad \lambda_m^{(i)} = \lambda(1, \theta_m^{(i-1)}); \quad c\rho_m^{(i)} = c\rho(1, \theta_m^{(i-1)}); \quad q_{V_m}^{*(i)} \equiv 0; \\ \theta_m^{(0)} = \theta_{m-1}; \quad \eta_m^{(0)} = 1 = \text{const}; \quad \{\theta\}_m^{(i)} = \{\theta\}_{m-1} + (\{\Phi\}_m^{(i-1)} + \{\Phi\}_{m-1}) \Delta t_m / 2; \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} E_m = E(1, \theta_m); \quad \nu_m = \nu(1, \theta_m); \quad \alpha_m = \alpha(1, \theta_m); \quad B_{0m} = B_0(1, \theta_m); \\ t_m^* = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_T(T(t_i)) \Delta t_i; \quad \xi_m^* = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_T(T(t_k)) \Delta t_k; \\ [K]_m \{U\}_m = \{P_V\}_m + \{P_S\}_m + \{P_0\}_m, \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

где итерационный процесс решения нелинейной задачи теплопроводности (4.15) строится только по температуре, а конечно-элементная модель (4.16) задачи термовязкоупругости реализуется при известном поле температур.

В работе [20] выполнено детальное тестирование предложенных алгоритмов расчета, показана устойчивость и сходимость вычислительных процедур, приведены примеры исследования остаточных напряжений в элементах неоднородных конструкций.

### 5. ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СО СРЕДОЙ

Значительное место в исследованиях, выполняемых В. С. Жернаковым и Р. Г. Якуповым [6, 21, 22], занимает решение проблемы изучения динамики конструкций, взаимодействующих со средой. Среда, как известно, оказывает существенное влияние на динамические характеристики и механическое поведение конструкции, определяя в конечном счете ее напряженно-деформированное состояние и прочность. Сложность и многоплановость рассматриваемой проблемы, прежде всего, обусловлены необходимостью представления и совместного решения краевых задач нестационарной гидродинамики, динамики и строительной механики конструкций. При этом первая из этих задач описывает динамику течения жидкости или газа и их силовое воздействие на твердые тела или граничную среду, вторая - рассматривает движение тела (конструкции) под действием известных внешних механических или гидродинамических сил, а строительная механика определяет напряженно-деформированное состояние конструкции.

В работе [21] построена достаточно общая математическая модель процесса взаимодействия конструкции со средой. Рассмотрена конструкция (рис. 5.1), в которой область 1 заполнена акустической средой, в которой со скоростью  $a = \sqrt{dp/d\rho}$  распространяется «слабая» волна, характеризующаяся незначительным изменением давления ( $p$ ) и плотностью ( $\rho$ ).

При этом движение жидкости потенциальное и описывается волновым уравнением

$$\nabla^2 \varphi_1 = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad (5.1)$$

в котором  $\nabla^2$  — оператор Лапласа в декартовой системе координат;  $\varphi_1$  — потенциал скорости падающей волны, связанной со скоростью  $\vec{V}_1$  и давлением  $p$  соотношениями

$$\vec{V}_1 = \text{grad } \varphi_1; \quad p = -\rho_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}, \quad (5.2)$$

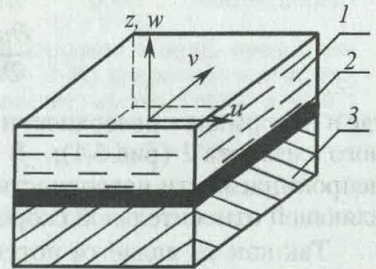


Рис. 5.1

где  $\rho_0$  — начальная плотность среды.

Граничные и начальные условия для уравнения (5.1) следуют из конкретной задачи.

Если среда граничит с непроницаемой для жидкостей и газов поверхностью  $\Sigma$ , то должно выполняться равенство нормальных составляющих скоростей частиц  $\vec{v}$  и точек поверхности  $\vec{v}_\Sigma$ , т. е.

$$\vec{v} \cdot \vec{n}|_\Sigma = \vec{v}_\Sigma \cdot \vec{n}, \quad (5.3)$$

где  $\vec{n}$  — местная нормаль к поверхности  $\Sigma$ .

В случае, когда в направлении  $r$  среда имеет безграничное простираение ( $r \rightarrow \infty$ ), то на бесконечном удалении от препятствия движение затухает и

$$\varphi = \text{grad } \varphi = 0; \quad r \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Если в начальный момент времени ( $t = 0$ ), принимаемый за момент соприкосновения падающей волны с поверхностью элемента 2, возмущения отсутствуют, то начальное условие имеет вид

$$\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad t = 0. \quad (5.5)$$

В рассматриваемой модели (рис. 5.1) с акустической средой 1 граничит конструкция, на тонкостенный элемент которой 2 падает звуковая волна, которая затем отражается. Уравнение движения этого элемента может быть представлено в форме

$$\sum_{j=1}^3 \Lambda_{ij}(u_j) = \rho_0 h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - X_1, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.6)$$

где  $\Lambda_{ij}$  — известный дифференциальный оператор [21];  $u_1$  — перемещение срединной поверхности;  $h$  — толщина элемента 2.

Решение системы (5.6) должно удовлетворять приведенным в работе [21] начальным и специальным граничным условиям, соответствующим характеру закрепления элемента.

Под действием падающей акустической волны элемент 2 (рис. 5.1) деформируется и излучает волну в окружающую среду. В результате отражения и излучения в среде возникают дополнительные скорости, потенциалы которых  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  удовлетворяют волновому уравнению (5.1), условию затухания на бесконечности (5.4), а также начальным условиям (5.5).

Сформулируем теперь граничные условия, свойственные задачам взаимодействия.

Потенциал  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в акустической среде и вектор скорости смещения точек на поверхности конструкции в зоне контакта ее со средой должны удовлетворять динамическим и кинематическим граничным условиям. Для линейной задачи полное гидродинамическое давление среды на конструкцию в уравнениях (5.6) можно представить в виде

$$X_1 = 0; \quad X_2 = 0; \quad X_3 = p_1 + p_2 + p_3, \quad (5.7)$$

где давления  $p_i$  соответствуют потенциалам  $\varphi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Это так называемые динамические граничные условия.

Из условия совместности движения конструкции и прилегающих к ней частиц жидкости следует равенство нормальных скоростей жидкости и стенки:

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial n}, \quad r = R \pm h, \quad (5.8)$$

где  $n$  — нормаль к поверхности взаимодействия;  $R$  — радиус срединной поверхности тонкостенного элемента 2 (рис. 5.1);  $h$  — его толщина. Соотношение (5.8) представляет собой условие непроницаемости поверхности конструкции и определяет равенство нулю нормальной составляющей относительной скорости среды.

Так как  $\varphi_2$  является потенциалом скорости волны, отраженной от жесткой неподвижной преграды, он удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0, \quad r = R \pm h, \quad (5.9)$$

а потенциал  $\varphi_3$  — условию излучения

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = \frac{\partial u_3}{\partial t}, \quad r = R \pm h. \quad (5.10)$$

Таким образом, три волновых уравнения типа (5.1) для потенциалов  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ , три уравнения движения конструкции (5.6), соотношения (5.7)–(5.10), условия (5.3), (5.4) для потенциалов  $\varphi_i$  и специальные граничные условия для конструкции совместно с начальными условиями (5.5) в совокупности представляют математическую постановку задачи взаимодействия.

В модели, представленной на рис. 5.1, элемент 2 взаимодействует с упругим телом 3. Если они соединены жестко, то динамические и кинематические граничные условия формируются в виде

$$X_1 = -\tau_{xz}, \quad X_2 = -\tau_{yz}, \quad X_3 = -\sigma_x; \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \quad U_3 = W, \quad r = R \pm h/2. \quad (5.11)$$

Если сопряжение элементов допускает их относительной скольжение, то следует принять  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ . При этом вначале решаются уравнения движения упругой среды 3 [21], выраженные через перемещения (уравнения Ляме), затем — уравнения движения конструкции. Соотношения (5.11) позволяют определить постоянные интегрирования.

## 6. МЕХАНИКА И ПРОЧНОСТЬ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Наряду с перечисленными выше, в научно-исследовательской лаборатории композитных материалов и конструкций ведутся исследования механизмов снижения упругих и прочностных характеристик слоистых материалов (стеклопластиков) при воздействии нестационарных температурно-силовых факторов, обусловленных сложными физико-химическими и механическими взаимодействиями на поверхности раздела армирующих волокон и матрицы, а также разупрочнением самих компонент.

Исследования по изучению влияния нестационарных температурно-силовых факторов на упругие и прочностные характеристики тканых стеклопластиков при растяжении, сжатии, сдвиге проводились при следующих условиях:

- циклически изменяющихся температурах;
- одновременном воздействии теплоты и длительных статических нагрузок;
- длительных статических нагрузках при стационарных температурах;
- совместном воздействии циклических температур и циклических изгибных деформаций по схеме жесткого нагружения.

На рис. 6.1 представлены зависимости относительных модулей продольной упругости и линейного сдвига от числа циклов теплосмен при различных амплитудах  $T_a$  и средней температуре  $T_c = 125^\circ\text{C}$ .

Анализ результатов испытаний показывает, что амплитуда термоциклов существенно влияет на упругие характеристики. С увеличением амплитуды термоциклов воздействие теплосмен приводит к снижению упругих характеристик, особенно в направлении сдвиговых деформаций. При постоянной температуре, равной максимальной температуре цикла, модули практически остаются неизменными или имеют небольшую тенденцию к увеличению в связи с дополнительным структурированием связующего.

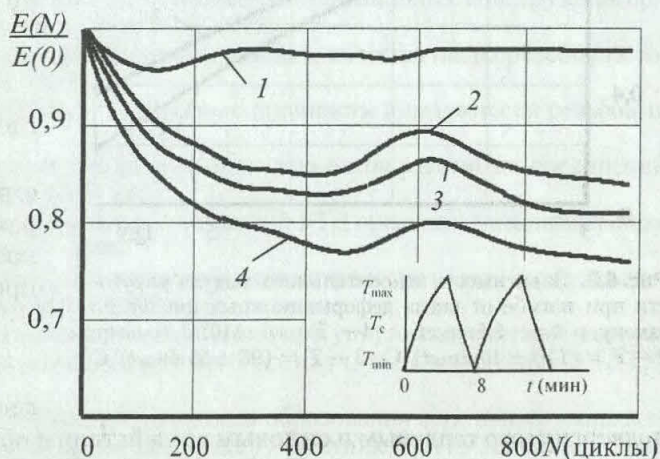


Рис. 6.1. Зависимость относительного модуля продольной упругости стеклопластика ЭФ-32-301 при растяжении от числа циклов теплосмен (направление вырезки образца  $\varphi = 45^\circ$ ) при режимах: 1 —  $T_a = 0^\circ\text{C}$  ( $T = 200^\circ\text{C}$ ); 2 —  $T_a = 25^\circ\text{C}$ ; 3 —  $T_a = 50^\circ\text{C}$ ; 4 —  $T_a = 75^\circ\text{C}$ ;  $T_c = 125^\circ\text{C}$

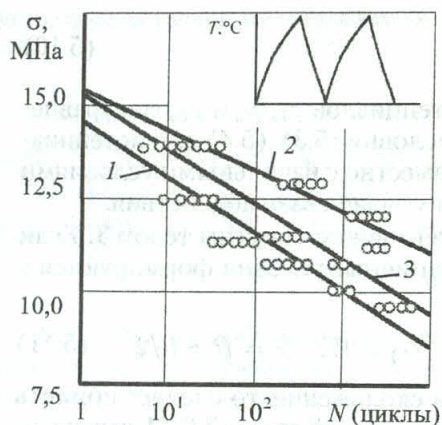


Рис. 6.2. Зависимость длительной прочности стеклопластика от числа циклов теплосмен: 1 — при растяжении в условиях теплосмен  $T = 50^\circ\text{C} \leftrightarrow 200^\circ\text{C}$  (образцы вырезаны под углом  $45^\circ$  к осям армирования); 2 — при растяжении в условиях  $T = 200^\circ\text{C}$  (const); 3 — при сжатии трубчатых образцов (намотка продольно-поперечная) в условиях теплосмен  $T = 50 \leftrightarrow 200^\circ\text{C}$ .

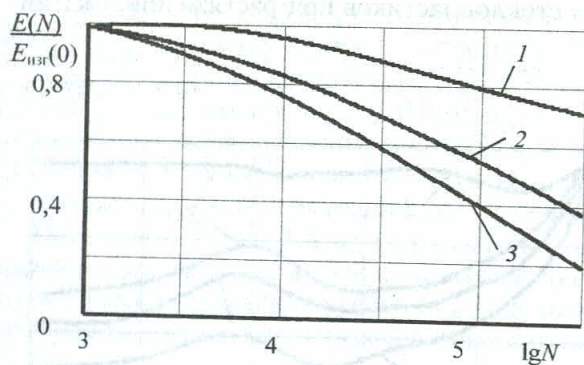


Рис. 6.3. Зависимость относительного модуля упругости при изгибе от числа деформационных циклов по закону  $\nu = 5,5 \sin \omega t$ : 1 —  $T = 110^\circ\text{C}$  (const); 2 —  $T = (110 \pm 40 \sin \omega t)^\circ\text{C}$ ; 3 —  $T = (95 \pm 55 \sin \omega t)^\circ\text{C}$ .

подвергнутого тепловым и силовым воздействиям образца;  $\Delta$  — прогиб образца, подвергнутого циклическим воздействиям. Измерения прогибов  $\Delta_0$  и  $\Delta$  проводились при  $T = 20^\circ\text{C}$ .

На рис. 6.3 представлены зависимости относительного модуля упругости при изгибе от числа деформационных циклов при постоянной температуре  $T = 110^\circ\text{C}$  (кривая 1) при режиме нагрева  $T = (110 + 40 \sin \omega t)^\circ\text{C}$  (кривая 2) и при  $T = (95 + 55 \sin \omega t)^\circ\text{C}$  (кривая 3). Режим циклического деформирования для всех случаев одинаковый ( $\nu = 5,5 \sin \omega t$ ).

Представленные зависимости наглядно показывают, что наложение циклических температур существенно снижает жесткость стеклопластика при изгибе по сравнению с действием постоянных температур. Увеличение амплитуды термоцикла приводит к большему снижению жесткости.

Имеющееся локальное во времени увеличение модулей упругости объясняется суммарным воздействием двух факторов: увеличением модулей упругости матрицы при действии теплосмен и накоплением повреждений в композите вследствие переменных напряжений, возникающих на поверхности раздела матрица-волокно и в межволоконном пространстве. В определенном диапазоне циклов теплосмен увеличение жесткости матрицы превалирует над уменьшением жесткости вследствие накопления повреждений.

Повреждения, вызванные циклическими температурами, негативно сказываются и на длительной прочности композита. Снижение длительной прочности при теплосменах значительно интенсивней (в три и более раз), чем при изотермической температуре, равной максимальной температуре цикла.

На рис. 6.2 представлены зависимости длительной прочности образцов, вырезанных под углом  $45^\circ$  к осям армирования, при постоянной температуре  $T = 200^\circ\text{C}$  (кривая 2) и при температуре  $T = 50 \leftrightarrow 200^\circ\text{C}$  (кривая 1).

Одним из существенных, но еще не изученных факторов является совместное воздействие циклических температур и изгибных деформаций на жесткость при изгибе.

В данном исследовании циклическое деформирование производилось по схеме жесткого трехточечного нагружения, при котором в центре образца задавался прогиб  $\nu$ , изменяющийся во времени по гармоническому закону

$$\nu = \nu_a \sin \omega t,$$

где  $\nu_a$  — максимальный прогиб.

Образцы имели прямоугольное сечение с рабочей базой  $t = 100$  мм. В качестве параметра, характеризующего изменение жесткости при изгибе, был выбран относительный прогиб

$$\delta = \Delta / \Delta_0,$$

где  $\Delta_0$  — прогиб при трехточечном изгибе не подвергнутого образцу;  $\Delta$  — прогиб образца, подвергнутого циклическим воздействиям.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье дан обзор и анализ основных научных исследований, проводимых на кафедре сопротивления материалов УГАТУ под руководством заслуж. деятеля науки и техн. РФ, д-ра техн. наук, проф. В. С. Жернакова. Обсуждены новые результаты, характеризующие научное лицо коллектива кафедры, в областях исследования концентрации напряжений, механики упругопластического разрушения, геометрически нелинейных задач теории оболочек, динамики тел, взаимодействующих со средой, теории и расчета остаточных напряжений, а также механики и прочности композитных материалов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иосилевич Г. Б.** Исследование прочности резьбовых соединений авиационных конструкций: Дис. ... д-ра техн. наук. М.: МАТИ, 1970.
2. **Рокитянская И. В.** Исследование напряженного состояния резьбовых соединений: Дис. ... канд. техн. наук. Уфа: УАИ, 1974.
3. **Мавлютов Р. Р.** Концентрация напряжений в элементах конструкций двигателей: Дис. ... д-ра техн. наук. Казань: КАИ, 1974.
4. **Мавлютов Р. Р.** Концентрация напряжений в элементах авиационных конструкций. М.: Наука, 1981. 141 с.
5. **Жернаков В. С.** Прочность болтовых и заклепочных соединений в конструкциях авиационных двигателей: Дис. ... д-ра техн. наук. Уфа: УГАТУ, 1992.
6. **Жернаков В. С., Якупов Р. Г.** Расчет болтовых и заклепочных соединений при высоких температурах, динамических нагрузках. М.: Изд-во МАИ, 1997. 260 с.
7. **Мардимасова Т. Н.** Исследование напряженного и деформированного состояния в элементах конструкций: Дис. ... канд. техн. наук. Уфа: УАИ, 1977.
8. **Иосилевич Г. Б.** Концентрация напряжений и деформаций в деталях машин. М.: Машиностроение, 1981. 224 с.
9. **Иосилевич Г. Б., Осипова Г. В.** Решение конструкционно-контактных задач численными методами // Машиноведение. 1976. № 4. С. 69–73.
10. **Лукашук Ю. В.** Исследование концентрации напряжений и деформаций в элементах авиационных конструкций: Дис. ... канд. техн. наук. Уфа: УАИ, 1981.
11. **Иосилевич Г. Б., Ковган С. Т.** Основы и методы расчета и проектирования фланцевых соединений. Свердловск: УПИ, 1989. 164 с.
12. **Кувшинов Ю. А.** Исследование прочности резьбовых соединений авиационных конструкций при динамических нагрузках: Дис. ... канд. техн. наук. Уфа: УАИ, 1972.
13. **Буткин Н. С.** Исследование взаимозаменяемости, технологичности и качества гладкорезьбовых соединений: Дис. ... канд. техн. наук. М.: МАИ, 1974.
14. **Мавлютов Р. Р., Якушев А. И., Мустаев Р. Х.** Повышение прочности и надежности резьбовых соединений. М.: Машиностроение, 1979.
15. **Будилов И. Н., Жернаков В. С.** Сопротивление разрушению элементов разъемных соединений высоконагруженных конструкций. М.: Наука, 1999. 221 с.
16. **Будилов И. Н.** Сопротивление разрушению разъемных соединений ГТД при сложном напряженном состоянии: Дис. ... д-ра техн. наук. Уфа: УГАТУ, 1998.
17. **Жернаков В. С., Газизов Х. Ш.** Метод конечных элементов в геометрически нелинейных задачах теории тонких упругих оболочек. М.: Изд-во МАИ, 2002. 144 с.
18. **Мардимасова Т. Н.** Особенности расчета остаточных напряжений при упругопластической разгрузке // Механика и прочность авиационных конструкций: Тр. Рос. науч.-техн. конф. Уфа: УГАТУ, 2001. С. 171–175.
19. **Куликов В. С., Мардимасова Т. Н.** Моделирование процессов образования остаточных напряжений при сложном нагружении и упругопластической разгрузке // Вестник УГАТУ. 2002. Т. 3, № 2. С. 99–109.
20. **Куликов В. С., Мардимасова Т. Н.** Остаточные напряжения в изделиях из полимерных материалов // Механика деформируемых тел и конструкций: Межвуз. науч. сб. Уфа: УГАТУ, 1998. С. 162–171.
21. **Якупов Р. Г., Жернаков В. С.** Динамика конструкций, взаимодействующих со средой. М.: Изд-во МАИ, 1995. 217 с.
22. **Якупов Р. Г., Жернаков В. С.** Температурные напряжения в соединениях и элементах конструкций. М.: Изд-во МАИ, 1998. 175 с.