

УДК 621.22

В. А. БУСАЛАЕВ, Р. А. СУНАРЧИН

## ОБОБЩЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УСТРОЙСТВ ГИДРОАВТОМАТИКИ АВИАЦИОННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Развитие аппаратных средств ЭВМ привело к существенному развитию численных методов. В статье на примере некоторых задач гидроавтоматики показано, что при использовании стандартного математического обеспечения иногда выгоднее усложнять математическое описание, вводя дифференциальные уравнения там, где раньше обходились алгебраическими уравнениями. *Устройства гидроавтоматики; регулятор; численное исследование; обобщенные переменные*

При анализе САР для упрощения расчётов стараются пренебречь малыми параметрами и понизить порядок дифференциального уравнения. Если это не влияет на устойчивость, то такая система является грубой (робастной) в смысле А. А. Андропова. Для частотных и особенно корневых методов наиболее приемлемым считается вариант, когда система получается не выше третьего порядка.

Дифференциальное уравнение, в котором пренебрегли малым параметром, обращается в алгебраическое так, что система обычно описывается совокупностью дифференциальных и алгебраических уравнений. К ним могут добавляться алгебраические выражения или уравнения, обусловленные различными причинами, например, изменением поведения (системы с гибридным поведением [1]). Если для рассматриваемой задачи составляется индивидуальная программа методом конечных разностей, то это не является препятствием, так как в данном случае все дифференциальные уравнения аппроксимируются алгебраическими. Совсем другая ситуация получается при использовании стандартного математического обеспечения. Здесь системы алгебраических и дифференциальных уравнений решаются разными решателями, что приводит к необходимости исключения алгебраических выражений путём включения их в состав дифференциальных уравнений. Последняя операция является нестандартной и, как правило, приводит к необходимости громоздких преобразований.

В круг обсуждаемых вопросов вводится несколько парадоксальная идея: что если даже там, где пренебрежение малым параметром вполне допустимо, не отказываться от

дифференциального описания? Оказывается, что в ряде случаев это усложнение математического описания приводит к значительному упрощению процедуры составления и решения задачи.

Рассмотрим гидроусилитель (рис. 1) с упругой обратной связью, обладающий рядом достоинств.

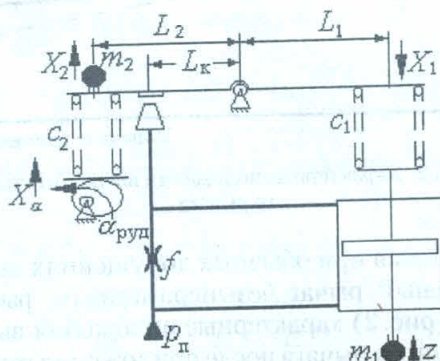


Рис. 1. Принципиальная схема гидроусилителя с упругой обратной связью

Вообще говоря, это типичная двухмассовая система массы поршня и рычага с упругим соединением посредством пружины  $c_1$ , подробно описанная, например, в [2]. Но если массой рычага пренебречь, то его динамику можно описать алгебраическим уравнением. Расчётную схему удобно изобразить в виде последовательных положений вычислительного рычага, показанных на рис. 2.

В исходном положении рычаг находится в состоянии равновесия под действием сил начальной затяжки пружин  $c_1$  и  $c_2$  (см. рис. 1). Поршень гидроцилиндра также находится в равновесии под действием сил давления жидкости и пружины  $c_1$ . После при-



ложения воздействия  $\Delta X_\alpha$  рычаг мгновенно (в силу отсутствия инерции) поворачивается по часовой стрелке и занимает максимально смещённое положение. При повороте рычага увеличивается ширина щели плоского клапана и, как следствие, уменьшается давление в верхней управляемой полости гидроцилиндра. Поршень начинает двигаться вверх, поворачивая при этом вычислительный рычаг против часовой стрелки. В некоторый момент времени рычаг принимает промежуточное положение, для которого составляется текущий баланс моментов.

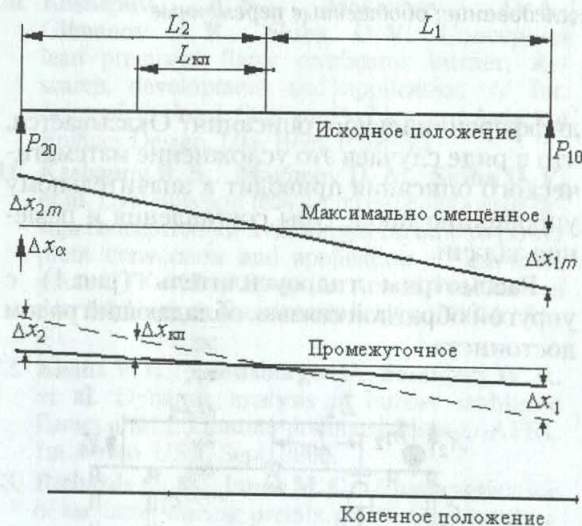


Рис. 2. Характерные положения вычислительного рычага

Полагая при обычных допущениях вычислительный рычаг безынерционным, рассмотрим (рис. 2) характерные положения вычислительного рычага после приложения ступенчатого воздействия  $X_\alpha$ .

Исходное состояние до приложения воздействия: пружины нагружены начальной зажаткой

$$c_2 x_{20} L_2 = c_1 x_{10} L_1. \quad (1)$$

После приложения ступенчатого входного воздействия  $\Delta X_\alpha$  рычаг мгновенно занимает максимально смещённое положение, так что левый его конец перемещается на величину  $\Delta X_{2m}$ , а правый — на  $\Delta X_{1m}$ . Баланс сил при этом имеет вид

$$c_2(x_{20} + \Delta X_\alpha - \Delta X_{2m})L_2 = c_1(x_{10} + \Delta X_{1m})L_1. \quad (2)$$

Так как при смещении рычага ширина щели плоского клапана увеличивается и дав-

ление в верхней управляемой полости гидроцилиндра уменьшается, то поршень начинает двигаться вверх, затягивая пружины и стремясь перевести рычаг в исходное положение (принцип отрицательной обратной связи). Так как рычаг считается безынерционным, то для промежуточного положения также можно записать уравнение равенства моментов сил:

$$c_2(x_{20} + \Delta X_\alpha - \Delta X_{2m} + \Delta X_2)L_2 = c_1(x_{10} + \Delta X_{1m} - \Delta X_1 + \Delta Z)L_1, \quad (3)$$

где  $\Delta X_1, \Delta X_2$  — текущее смещение крайних точек рычага.

Конечное положение теоретически должно совпадать с исходным. В этом случае баланс моментов сил имел бы вид

$$c_2(x_{20} + \Delta X_\alpha)L_2 = c_1(x_{20} + \Delta Z_m)L_1. \quad (4)$$

Вычитая предыдущие уравнения из последующих, можно получить ряд полезных выражений для максимальных перемещений и текущего значения ширины щели:

$$\begin{aligned} \Delta X_{1m} &= k_1 \Delta X_\alpha; \\ \Delta X_{2m} &= k_2 \Delta X_\alpha; \\ \Delta Z_m &= \frac{c_1 L_1}{c_2 L_2} \Delta X_\alpha; \end{aligned} \quad (5)$$

$$X_k(t) = x_0 + (k_1 \Delta X_\alpha - k_3 \Delta Z) \frac{L_k}{L_1},$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{c_2 L_1 L_2}{c_1 L_1^2 + c_2 L_2^2}, \\ k_2 &= \frac{c_2 L_2^2}{c_1 L_1^2 + c_2 L_2^2}, \\ k_3 &= \frac{c_1 L_1^2}{c_1 L_1^2 + c_2 L_2^2} \end{aligned}$$

— коэффициенты пропорциональности.

Выражение для ширины щели можно записать в другом виде:

$$X_k(t) = x_0 + k_r \Delta X_\alpha - k_{oc} \Delta Z, \quad (6)$$

где

$$k_r = k_1 \frac{L_k}{L_1}, \quad k_{oc} = k_3 \frac{L_k}{L_1}$$

— соответственно коэффициенты усиления рычага и обратной связи.



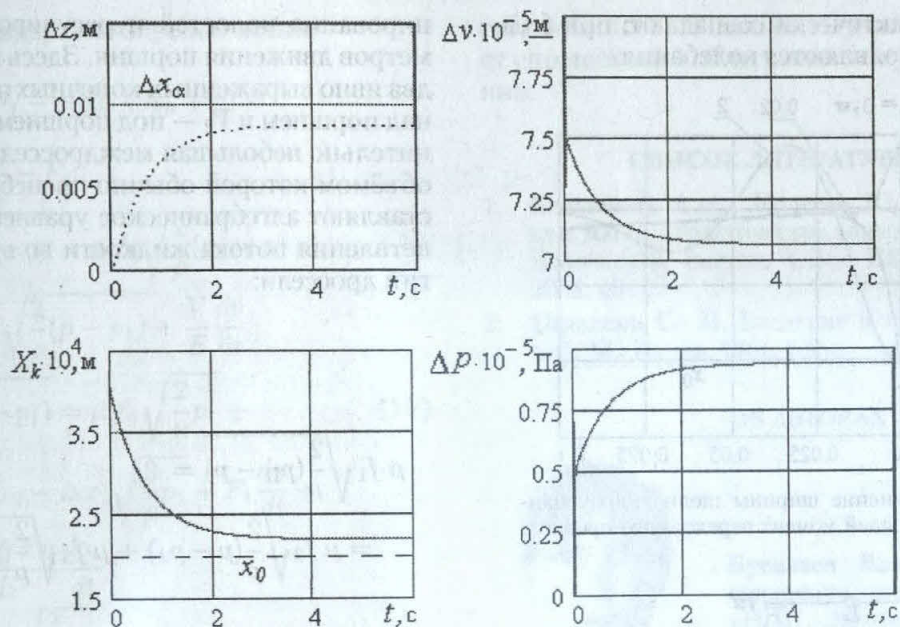


Рис. 3. Переходные процессы гидроусилителя с упругой обратной связью

Динамическая модель, описывающая работу механизма, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \Delta v; \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} \left( \Delta p F - k_v \frac{dv}{dt} - c_1(\Delta Z + k_1 \Delta X_\alpha - k_3 \Delta Z) - F_c \right); \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{E}{V} \left[ \mu b X_{кл}(t) \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_0 - \Delta p) - \mu f \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_0 + \Delta p) \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где ширина щели определяется по выражению (6).

Типовые переходные процессы для нулевых начальных условий и исходных данных показаны на рис. 3. Хорошо видно, что ширина щели клапана не возвращается к исходной, и это закономерно, так как затяжка пружины на величину  $\Delta X_\alpha$  должна быть уравновешена силой давления, которая определяется шириной щели.

А теперь рассмотрим динамику гидроусилителя, не пренебрегая массой рычага. При этом положим, что вся масса  $m_2$  сосредоточена на левом конце рычага и движется вдоль

оси пружины  $C_2$  и по направлению  $x_2$ .

$$\begin{aligned} m_2 \frac{dx_2^2}{dt^2} &= c_2(\Delta X_\alpha - \Delta x_2) - c_1(\Delta x_1 + \Delta Z) - k_{vx} \frac{dx_2}{dt} - F_{cx}; \\ \mu b(x_0 + \Delta x_2) \frac{L_{кл}}{L_2} \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_0 - \Delta p) &= \mu f \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_{II} - p_0 + \Delta p) + F \frac{dx_2}{dt} + \frac{V_0 - Fz}{E} \frac{dp}{dt}; \\ m_1 \frac{dZ^2}{dt^2} &= (p_{II} - p_0 + \Delta p) F - c_1(\Delta x_1 + \Delta Z) - k_{vz} \frac{dZ}{dt} - F_{cz}. \end{aligned} \quad (8)$$

Дотошный читатель, конечно же, заметит, что, отдавая качество (вводя дифференциальное уравнение вместо алгебраического), мы существенно усиливаем позицию. Если в первом случае пришлось буквально «слепить» выражение для ширины щели, то в системе (8) указано лишь начальное направление изменения. Но, самое главное, система (8) состоит только из дифференциальных уравнений и легко решается стандартными средствами.

На рис. 4 показано изменение ширины щели для различных масс рычага. Видно, что для масс  $m = 0$  (расчёт по системе (7)) и  $m = 0,02$  кг (расчёт по системе (8)) переходные



процессы практически совпадают; при больших массах появляются колебания.

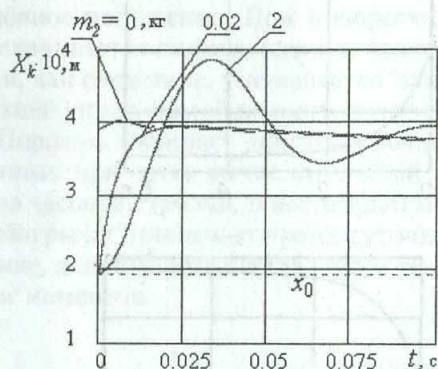


Рис. 4. Изменение ширины щели гидроусилителя в начальный момент переходного процесса

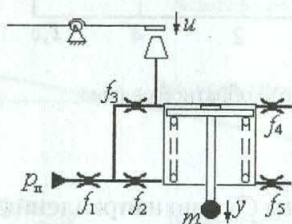


Рис. 5. Схема пропорционального гидроусилителя

Другой пример подобной тактики покажем на примере пропорционального гидроусилителя (рис. 5).

Избыточное, на первый взгляд, количество дросселей обусловлено необходимостью дре-

нирования полостей и регулирования параметров движения поршня. Здесь имеют место два явно выраженных конечных объема:  $V_1$  — над поршнем и  $V_2$  — под поршнем и  $V$  — сравнительно небольшая междроссельная камера, объемом которой обычно пренебрегают и составляют алгебраическое уравнение для разветвления потока жидкости во второй и третьей дроссели:

$$\begin{aligned} \mu f_1 \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p_{\Pi} - p) = \\ = \mu f_2 \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p - p_2) + \mu f_3 \sqrt{\frac{2}{\rho}} (p - p_1). \end{aligned} \quad (9)$$

Ситуация здесь намного тяжелее, чем в предыдущем случае: уравнение (9) трансцендентное, давление  $p$  через давления  $p_1$  и  $p_2$  без серьезных упрощений явно не выражается. Кроме того, необходимо иметь в виду, что направление потоков в динамике может меняться по сравнению со статическим случаем.

Выручить может тот же приём замены алгебраического уравнения дифференциальным. При этом модель будет состоять из одних дифференциальных уравнений и легко

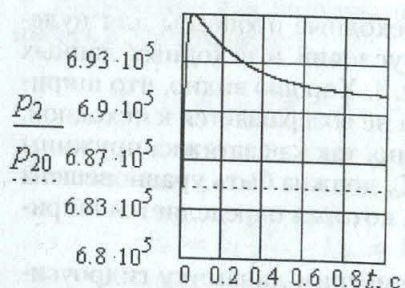
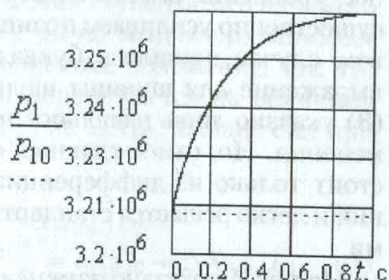
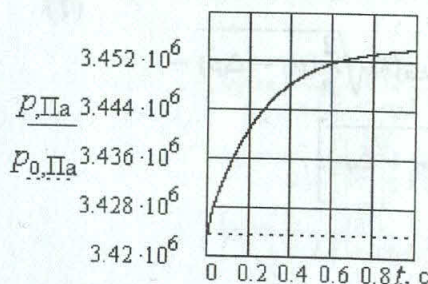
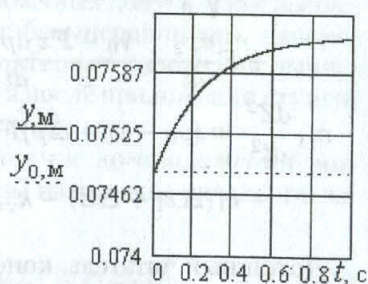


Рис. 6. Переходные процессы пропорционального гидроусилителя



решается стандартными решателями:

$$\begin{aligned}
 m \frac{d^2 y}{dt^2} &= p_1 F_1 - c(y_H + y_0 + y) - \\
 &- k_v \frac{dy}{dt} - F_c; \\
 \mu f_1 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_{II} - p)} + \mu f_2 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p)} &= \\
 &= \mu f_3 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p - p_1)} + \frac{V}{E} \frac{dp}{dt}; \\
 \mu f_3 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p - p_1)} &= \mu f_4 \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1} + \\
 &+ \mu b(x_0 - \Delta x) \sqrt{\frac{2}{\rho} p_1} + F_1 \frac{dy}{dt} + \\
 &+ \frac{V_1 + F_1 y}{E} \frac{dp_1}{dt}; \\
 F_2 \frac{dy}{dt} &= \mu f_5 \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} + \\
 &+ \mu f_2 \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p)} + \frac{V_2 - F_2 y}{E} \frac{dp_2}{dt}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

На рис. 6 показаны типичные переходные процессы, полученные в результате интегрирования системы (10).

### ВЫВОДЫ

Таким образом, развитие стандартного математического обеспечения приводит к несколько парадоксальному результату: отказ от традиционного упрощения математического описания (применение более сложного дифференциального уравнения взамен ал-

гебраического) в данном случае способствует упрощению и облегчению получения решения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенькович А. А., Колесов Ю. Б., Сениченков Ю. Б. Практическое моделирование динамических систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2002. 464 с.
2. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 430 с.

### ОБ АВТОРАХ



**Бусалаев Владимир Александрович**, вед. инж. ФГУП «НПП „Мотор“», асп. каф. прикладной гидромеханики УГАТУ. Дипл. инж.-механик (УГАТУ, 1998). Исследования в области гидроавтоматики двигателей.



**Сунарчин Роберт Авалевич**, доц. каф. прикладной гидромеханики УГАТУ. Дипл. инж.-механик (УАИ, 1962). Канд. техн. наук по двигателям ЛА (МАИ, 1971). Исследования в области автоматического регулирования авиационных двигателей.

