

УДК 517.958: 531.72

**В. А. БАЙКОВ, А. В. ГЛАДКОВ, В. А. КРАСНОВ, С. Е. СЫСОЕВ,  
Р. А. ХАБИБУЛЛИН, М. М. ХАСАНОВ, И. В. БАЙКОВ**

## **ПРИБЛИЖЕННО АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПЛАСТОВОГО ДАВЛЕНИЯ В НЕФТЯНОМ МЕСТОРОЖДЕНИИ ПРИ НАЛИЧИИ ДИЗЪЮНКТИВНЫХ НАРУШЕНИЙ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ**

Предлагается математическая модель для нахождения нестационарного распределения давления в нефтяных месторождениях с учетом непроницаемых границ, непротекаемых зон и других нарушений геологической структуры. Для решения краевой задачи, которая описывает условие отсутствия фильтрации жидкости через непроницаемые границы, применен модифицированный метод введения фиктивных источников-стоков. Получена формула, описывающая влияние этих фиктивных источников-стоков на распределение давления в месторождении. Разработан и реализован алгоритм нахождения распределения давления в месторождении. Для конкретных месторождений проведено сравнение с результатами расчетов, полученных с использованием алгоритмов, основанных на численном моделировании фильтрационных течений. Моделирование процессов нефтедобычи; фильтрация однородной жидкости; пластовое давление; приближенно аналитические методы расчета

### **ВВЕДЕНИЕ**

Распределение пластового давления, дающее картину энергетического состояния нефтяного пласта, является одним из важнейших показателей его разработки и обязательным атрибутом его геолого-промыслового анализа.

Методы построения карт пластовых давлений можно условно разделить на два: *интерполяционный метод* и *метод, основанный на численном моделировании фильтрационных течений*.

В первом методе производится формирование карт изобар методом интерполяции замеров пластовых давлений, заданных в нерегулярно расположенных точках-скважинах. Здесь существуют следующие проблемы: это, во-первых, низкая информативность исходных наборов данных; во-вторых, используемые методы интерполяции могут приводить к результатам, противоречащим физическому смыслу решаемой задачи; в-третьих, задача долгосрочного прогноза давления является неустойчивой относительно любых погрешностей, содержащихся в исходной информации. Поэтому построение карт изобар данным методом можно считать лишь как первые приближения и использовать их с большой осторожностью лишь для оперативного анализа

роста или падения давления в отдельных зонах пласта.

Второй метод состоит в решении системы дифференциальных уравнений многофазной фильтрации, что в настоящее время осуществлено на базе современных программных средств. Во-первых, для моделирования на этом уровне необходимы достоверные данные по фильтрационно-емкостным свойствам пласта, относительным фазовым проницаемостям и другим факторам. Так как значения фильтрационно-емкостных, геологических и других свойств пласта известны лишь в точках коллокации, а сейсмические данные о структуре дают лишь качественную картину, то интерполяция этих свойств на весь пласт, т. е. получение гидродинамической модели пласта, зачастую проблематична. Поэтому проводить сложные гидродинамические расчеты на их основе часто бывает бессмысленно, так как они приводят к результатам, не соответствующим данным разработки.

Процесс адаптации модели, т. е. подбор пластовых параметров, является наиболее трудоемким и выполняется на компьютере практически «вручную». Выбор регулируемых пластовых параметров (например, абсолютная проницаемость отдельных слоев) во многом является произвольным и зависит не

от объективных предпосылок, а от «квалификации» пользователя. Во-вторых, современные программные средства позволяют моделировать до 1500-2000 скважин, что не всегда достаточно. Так, Повховское, Мамонтовское, Самотлорское и другие месторождения Тюменской области имеют более 3500, 5000, 15000 скважин соответственно. Таким образом, с помощью известных стандартных пакетов можно моделировать лишь участки указанных месторождений. Но и в этом случае, даже для самых быстрых моделирующих систем, например Eclipse, один вариант расчета при  $10^5$  активных расчетных ячеек (около  $300 \times 600$  узлов и 1000 скважин) занимает около часа на компьютере с процессором Pentium 4 оперативной памятью 1 Гб. Отметим также, что расчет полей давлений в этих моделирующих системах отнимает значительные вычислительные ресурсы и может производиться лишь в условиях научных или проектных организаций. Более того, значительные затраты времени на проведение расчетов при одной итерации моделирования создают дополнительные трудности для процесса адаптации модели к условиям пласта и истории его разработки, поскольку процесс редактирования модели пласта с целью улучшения соответствия между результатами очередного цикла моделирования и историей разработки месторождения может значительно затянуться.

Таким образом, ясно, что моделирование пластового давления вышперечисленными методами либо не является надежным, либо требует огромных человеческих и машинных ресурсов. Поэтому в данной работе предлагается при моделировании применять метод, основанный на использовании приближенных аналитических решений. В его основе лежит приближенное аналитическое решение уравнений нестационарной фильтрации методом фундаментальных функций. Это позволило, в частности, получить аналитические выражения для распределения давления в пласте. На основе этого метода предлагается численная реализация достаточно простой схемы вычисления пластового давления, не требующая больших ресурсов и дающая достаточно надежный результат.

## 1. ОПИСАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Для построения поля давлений в произвольной точке нефтяного пласта рассматривается модель двухмерной нестационарной фильтрации цветной жидкости в неоднородной среде.

В предположении, что движение жидкости в неоднородной пористой среде следует обобщенному закону Дарси, а пласт и жидкость являются упруго деформируемыми, распределение давления в пласте описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка в частных производных при заданных начальных и граничных условиях. В такой постановке для нахождения полей давлений приходится использовать численные методы, поскольку к настоящему времени не известны методы построения аналитического решения для данной задачи. Поэтому для ее аналитического решения предлагается использовать некоторые упрощающие предположения в фильтрационной модели, что позволило свести решение задачи к нахождению приближенного решения уравнения, описывающего нестационарное распределение давления в пласте, методом фундаментальных функций.

Действительно, пусть в однородном и изотропном пласте толщины  $h$  функционируют  $N$  скважин, расположенных в точках с радиус-векторами  $\mathbf{r}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , которые в зависимости от типа скважины можно считать точечными источниками (нагнетательные скважины) или стоками (добывающие скважины). В такой ситуации можно рассмотреть модель двухмерной нестационарной фильтрации двух несмешивающихся жидкостей в области  $D \subset R^2$ . Тогда распределение давления  $p = p(\mathbf{r}, t)$  в области  $\Omega = D \times (0; +\infty)$  описывается уравнением [1-3]

$$Lp \equiv \beta \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \frac{k\varphi(s)}{\mu_1} \operatorname{grad} p \right) = - \sum_{j=1}^N q_j(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (1)$$

где  $\beta = m(s_1\beta_1^* + s_2\beta_2^*) + \beta_c^*$ ,  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ , — насыщенность  $i$ -й фазой (водой или нефтью соответственно),  $\beta_i^*$  — коэффициент сжимаемости  $i$ -й фазы,  $\beta_c^*$  — коэффициент сжимаемости среды,  $m = m(\mathbf{r})$  — пористость пласта,  $k$  — проницаемость среды,  $\varphi(s) = f_1(s) + \mu_0 f_2(s)$ , где  $f_i(s)$ ,  $i = 1, 2$ , — относительные фазовые проницаемости,  $\mu_0 = \mu_1/\mu_2$  — отношение вязкостей рассматриваемых жидкостей,  $\delta(\mathbf{r})$  — дельта-функция в  $R^2$ ,  $q_j(t) = Q_j(t)/h$  — дебит источника (стока) с номером  $j$ , приходящийся на единицу мощности пласта, при следующих начальных и граничных условиях:

$$p(r, 0) = p_0, \quad p(\mathbf{r}, t)|_{\partial D} = p_0, \quad (2)$$

где  $p_0$  — начальное пластовое давление. Кроме того, в заданных точках-скважинах должно выполняться равенство

$$\lim_{r_j \rightarrow 0} \int_{\gamma_j} \langle \mathbf{v}, \mathbf{n} \rangle dl = q_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где  $\gamma_j$  — окружность, охватывающая  $j$ -ю скважину,  $r_j$  — радиус этой окружности,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к окружности  $\gamma_j$ ,  $\mathbf{v}$  — скорость фильтрации,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение векторов. Если вместо  $p$  взять отклонение давления от начального пластового  $p^* = p - p_0$ , то тогда начальное условие запишется в виде  $p^*(r, 0) = 0$  и граничное условие  $p^* = 0$ .

Пусть  $\psi(r, t)$  является решением смешанной задачи

$$\begin{aligned} L\psi(r, t) &= \delta(r, t) \text{ в } \Omega, \\ \psi(r, 0) &= 0, \\ \psi(r, t)|_{\partial D} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку можно считать, что область  $D$  является кругом достаточно большого радиуса, поэтому на  $\partial D$  справедливо приближенное равенство  $\psi(r - r_j, t) = 0, j = 1, \dots, N$ , откуда получаем, что приближенное решение задачи (1)–(2) для  $p^*$  запишется в виде

$$\begin{aligned} p^*(r, t) &= - \sum_{j=1}^N \int_0^t d\lambda \times \\ &\times \int_{R^2} d\xi \psi(\xi, \lambda) q_j(t - \lambda) \delta(r - r_j - \xi) = \\ &= - \sum_{j=1}^N \int_0^t q_j(t - \lambda) \psi(r - r_j, \lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что  $p^* = p - p_0$ , окончательно получаем формулу для нахождения давления в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$

$$p(r, t) = p_0 - \sum_{j=1}^N \int_0^t q_j(t - \lambda) \psi(r - r_j, \lambda) d\lambda. \quad (5)$$

Функция  $\psi(r - r_j, t)$  имеет в точке  $\mathbf{r}_j$  особенность типа теплового источника, поэтому легко проверить [2], что для давления  $p(r, t)$ , найденного по формуле (5), выполнено условие (3).

Если функции  $q_j(t) = q_j = \text{const}, j = 1, \dots, N$ , то формула (5) запишется в виде

$$p(r, t) = p_0 - \sum_{j=1}^N q_j \int_0^t \psi(r - r_j, \lambda) d\lambda.$$

При эксплуатации скважин обычно приводятся средние дебиты за какой-либо промежуток времени, например, за месяц. Поэтому будем считать, что в течение каждого месяца дебиты скважины постоянны и равны  $Q_{ij}$ , где  $i$  — номер месяца с момента начала работы месторождения,  $j$  — номер скважины. Поскольку квантом изменения времени по исходным данным является один месяц, то мы можем определять давление лишь в дискретные моменты времени  $t_\tau = \tau \Delta t$ , где  $\Delta t = 25922000$  с — количество секунд в одном месяце,  $\tau = 1, 2, \dots$  — текущий номер месяца с момента начала работы месторождения. В этом случае функции  $q_j(t)$  являются кусочно-постоянными  $q_j(t) = q_{ij} = Q_{ij}/h, t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, \tau, t_0 = 0$  и формула (5) будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} p(r, t_\tau) &= \\ &= p_0 - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{\tau} q_{ij} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi(r - r_j, t_\tau - \lambda) d\lambda = \\ &= p_0 - \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{\tau} (q_{ij} - q_{i-1j}) \times \\ &\times \int_{t_{i-1}}^{t_\tau} \psi(r - r_j, t_\tau - \lambda) d\lambda, \quad (6) \end{aligned}$$

где  $q_{0j} = 0$ .

Если  $\varphi(s) = \text{const}$ , что имеет место в случае фильтрации однородной жидкости, то уравнение (1) является уравнением с постоянными коэффициентами и решением задачи (4) является функция

$$\psi(r, t) = \frac{\mu_1 \theta(t)}{4\pi k \varphi(s) t} \exp\left(-\frac{\beta \mu_1 r^2}{4k \varphi(s) t}\right),$$

где  $\theta(t)$  — функция Хевисайда. Поэтому после несложных преобразований из (6) получим, что в случае кусочно-постоянных функ-

ций  $q_j(t)$  давление находится по формуле

$$p(\mathbf{r}, t_\tau) = p_0 + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \times \left( \sum_{i=1}^{\tau} \frac{\mu}{kh} (Q_{ij} - Q_{i-1j}) \text{Ei} \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2}{4\kappa(t_\tau - t_{i-1})} \right) \right), \quad (7)$$

где опущена функция  $\varphi(s)$ ,  $k$  — проницаемость пласта,  $\mu$  — вязкость жидкости,  $\kappa = \frac{k}{\beta\mu}$  — коэффициент пьезопроводности,

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x e^t \frac{dt}{t}, \quad x < 0,$$

— интегральная показательная функция,  $Q_{0j} = 0$ .

Эта формула справедлива для однородного и изотропного пласта постоянной толщины  $h$ . Если пласт неоднороден и имеет переменную толщину, то формулу (7) необходимо записать в следующем виде:

$$p(\mathbf{r}, t_\tau) = p_0 + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{k_j h_j} \times \left( \sum_{i=1}^{\tau} (Q_{ij} - Q_{i-1j}) \text{Ei} \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2}{4\kappa_j(t_\tau - t_{i-1})} \right) \right), \quad (8)$$

где  $k_j$ ,  $h_j$ ,  $\kappa_j$ ,  $\mu_j$  — проницаемость среды, толщина пласта, коэффициент пьезопроводности и вязкость жидкости в районе скважины с номером  $j$ . Формула (8) записана в предположении, что изменение давления в пласте вследствие функционирования отдельной скважины определяется параметрами, заданными только вблизи этой скважины. Это предположение приемлемо, поскольку основное изменение давления происходит именно вблизи скважины. Если пласт состоит из  $n$  пропластков, то в (8) фигурируют средние значения проницаемости и пьезопроводности

$$k_j = \frac{\sum_{i=1}^n k_{ij} h_{ij}}{h_j}, \quad \kappa_j = \frac{\sum_{i=1}^n \kappa_{ij} h_{ij}}{h_j},$$

где  $h_j = \sum_{i=1}^n h_{ij}$ ,  $h_{ij}$  — толщина  $i$ -го пропластка в районе скважины с номером  $j$ ,  $k_{ij}$ ,  $\kappa_{ij}$  — проницаемость среды и коэффициент

пьезопроводности для  $i$ -го пропластка в районе скважины с номером  $j$ .

Таким образом, формула (8) позволяет найти распределение давления в нефтяном месторождении в любом месяце по данным ГИС и истории эксплуатации скважин.

Однако построенная модель применима в полной мере лишь для месторождений, имеющих «бесконечную протяженность», не имеющих зон выклинивания (непротекания), тектонических и других нарушений в строении пласта. Если месторождение содержит зоны выклинивания, то необходимо наложить условия, гарантирующие отсутствие фильтрации жидкости в этих зонах. Этим условием является равенство нулю проекции вектора градиента пластового давления на границах зон выклинивания. Точнее, если месторождение представляет собой многосвязную область  $D \subset R^2$  с границей  $\partial D = \bigcup_{i=0}^l \Gamma_i$ , где  $\Gamma_0$  — внешний контур месторождения, а  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, l$  — границы зон выклинивания, то для нахождения пластового давления нужно решать краевую задачу для уравнения пьезопроводности, где граничными условиями будут

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_i} \Big|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, \dots, l,$$

где  $\mathbf{n}_i$  — внешняя нормаль к  $\Gamma_i$ , и  $p|_{\Gamma_0} = p_0$ , если на внешнем контуре месторождения задано постоянное давление  $p_0$ , либо

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_0} \Big|_{\Gamma_0} = 0,$$

если нет перетоков жидкости через внешний контур.

Для решения этой краевой задачи применяется метод введения фиктивных источников [4–8]. Рассмотрим применение этого метода на примере одной зоны непротекания.

Сначала аппроксимируем эту зону многоугольником  $M_1 M_2 \dots M_{n'}$ . Граница этого многоугольника представляет объединение  $n'$  отрезков

$$\bigcup_{j=1}^{n'} [M_j, M_{j+1}], \quad \text{где } M_{n'+1} = M_1.$$

На каждом отрезке  $[M_j, M_{j+1}]$ ,  $j = 1, \dots, n'$ , входящем в границу многоугольника  $M_1 M_2 \dots M_{n'}$ , размещаем распределенный по этому отрезку непрерывный фиктивный источник. Изменение давления в пласте от функционирования такого источника

в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t_\tau = \tau \Delta t$  с начала работы месторождения определим по формуле

$$p_j^{\text{slot}}(\mathbf{r}, t_\tau) = \frac{1}{L_j} \sum_{i=1}^{\tau} (c_{ij} - c_{i-1j}) \times \int_{[M_j, M_{j+1}]} \text{Ei} \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^{\text{slot}})^2}{4\kappa_j^{\text{slot}}(t_\tau - t_{i-1})} \right) dl, \quad (9)$$

где  $j$  — номер распределенного фиктивного источника,  $\mathbf{r}_j^{\text{slot}}$  — радиус-вектор переменной точки на отрезке  $[M_j, M_{j+1}]$ ,  $L_j$  — длина отрезка  $[M_j, M_{j+1}]$ ,  $c_{ij}$  — параметр, характеризующий функционирование распределенного фиктивного источника с номером  $j$  в  $i$ -м месяце с начала работы месторождения,  $c_{0j} = 0$ ,  $\kappa_j^{\text{slot}}$  — коэффициент пьезопроводности для распределенного фиктивного источника с номером  $j$ . Параметры  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, \tau$ ,  $j = 1, \dots, n'$  неизвестны и подлежат определению из условия отсутствия перетоков жидкости через границу многоугольника  $M_1 M_2 \dots M_{n'}$ .

Изменение давления в месторождении от функционирования одной реальной скважины с номером  $j$  в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t_\tau = \tau \Delta t$  с начала работы месторождения находится по формуле (см. формулу (8)):

$$p_j(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mu_j}{k_j h_j} \times \left( \sum_{i=1}^{\tau} (Q_{ij} - Q_{i-1j}) \text{Ei} \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2}{4\kappa_j(t_\tau - t_{i-1})} \right) \right), \quad j = 1, \dots, N. \quad (10)$$

В результате значение давления в месторождении в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t_\tau = \tau \Delta t$  с начала работы месторождения определяется по формуле

$$p(\mathbf{r}, t_\tau) = p_0 + \sum_{j=1}^N p_j(\mathbf{r}, t_\tau) + \sum_{j=1}^{n'} p_j^{\text{slot}}(\mathbf{r}, t_\tau), \quad (11)$$

где  $p_0$  — начальное пластовое давление.

Условием отсутствия фильтрации жидкости через границу многоугольника  $M_1 M_2 \dots M_{n'}$  является равенство нулю проекции вектора градиента пластового давления, найденного по формуле (11), на границах этого многоугольника:

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_s} \Big|_{[M_s, M_{s+1}]} = 0, \quad s = 1, \dots, n',$$

где  $\mathbf{n}_s$  — внешняя нормаль к стороне  $[M_s, M_{s+1}]$ .

С учетом формулы (11) это условие записывается в виде

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial p_j}{\partial \mathbf{n}_s} + \sum_{j=1}^{n'} \frac{\partial p_j^{\text{slot}}}{\partial \mathbf{n}_s} = 0 \text{ на } [M_s, M_{s+1}], \quad (12)$$

$$s = 1, \dots, n',$$

куда нужно подставить найденные из (9) и (10) значения

$$\frac{\partial p_j^{\text{slot}}}{\partial \mathbf{n}_s}(\mathbf{r}, t_\tau) = 2 \sum_{i=1}^{\tau} (c_{ij} - c_{i-1j}) \times \int_0^1 \exp \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^{\text{slot}}(\lambda))^2}{4\kappa_j^{\text{slot}}(t_\tau - t_{i-1})} \right) \times \frac{\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_j^{\text{slot}}(\lambda), \mathbf{n}_s \rangle}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^{\text{slot}}(\lambda))^2} d\lambda, \quad (13)$$

$$\frac{\partial p_j}{\partial \mathbf{n}_s}(\mathbf{r}, t_\tau) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_j}{k_j h_j} \sum_{i=1}^{\tau} (Q_{ij} - Q_{i-1j}) \times \exp \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2}{4\kappa_j(t_\tau - t_{i-1})} \right) \frac{\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_j, \mathbf{n}_s \rangle}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2}, \quad (14)$$

$$j = 1, \dots, n',$$

где  $\mathbf{r}_j^{\text{slot}} = \mathbf{r}_j^{\text{slot}}(\lambda)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$  — параметрическое задание отрезка  $[M_j, M_{j+1}]$ ,  $\mathbf{r}_j$  — радиус-вектор скважины с номером  $j$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки, лежащей на отрезке  $[M_s, M_{s+1}]$ , через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначается скалярное произведение векторов.

Для нахождения параметров  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, \tau$ ,  $j = 1, \dots, n'$ , будем требовать, чтобы условие (13) выполнялось не во всех точках отрезка  $[M_s, M_{s+1}]$ ,  $s = 1, \dots, n'$ , а только в одной «контрольной» точке на этом отрезке — его середине. Для этого в формулах (13) нужно положить  $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_s + \mathbf{r}_{s+1})$  — радиус-вектор середины отрезка  $[M_s, M_{s+1}]$ , где  $\mathbf{r}_s$  — радиус-вектор вершины  $M_s$  многоугольника  $M_1 M_2 \dots M_{n'}$ .

Параметры  $c_{ij}$  находятся последовательно с ростом  $i$ . В первом месяце работы месторождения фиктивные источники характеризуются своими параметрами  $c_{1j}$ ,  $j = 1, \dots, n'$ ,

подлежащими определению. Взяв в формулах (13)  $\tau = 1$  и подставив результат в (13), получим  $n'$  алгебраических уравнений с  $n'$  неизвестными. Из получившейся системы уравнений параметры  $c_{1j}$ ,  $j = 1, \dots, n'$ , определяются однозначно.

Пусть найдены значения параметров  $c_{ij}$ ,  $i = 1, \dots, \tau - 1$ ,  $j = 1, \dots, n'$ . Для нахождения  $c_{\tau j}$ ,  $j = 1, \dots, n'$ , подставим формулы (13) в (13). Получится система из  $n'$  алгебраических уравнений с  $n'$  неизвестными  $c_{\tau j}$ ,  $j = 1, \dots, n'$ , которые однозначно определяются из этой системы. Таким образом, получается временной ряд параметров  $c_{ij}$ , характеризующих функционирование фиктивных источников, обеспечивающих отсутствие фильтрации жидкости через границу зоны выклинивания — многоугольник  $M_1 M_2 \dots M_{n'}$ .

В итоге в случае одной зоны выклинивания давление в любой точке пласта в момент времени  $t_\tau = \tau \Delta t$  находится по формуле

$$p(\mathbf{r}, t_\tau) = p_0 + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{k_j h_j} \times \left( \sum_{i=1}^{\tau} (Q_{ij} - Q_{i-1j}) \text{Ei} \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2}{4\kappa_j (t_\tau - t_{i-1})} \right) \right) + \sum_{j=1}^{n'} \frac{1}{L_j} \sum_{i=1}^{\tau} (c_{ij} - c_{i-1j}) \times \int_{[M_j, M_{j+1}]} \text{Ei} \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j^{\text{slot}})^2}{4\kappa_j^{\text{slot}} (t_\tau - t_{i-1})} \right) dl.$$

Если месторождение содержит несколько непротекательных зон, то, проводя аналогичные рассуждения, получим

$$p(\mathbf{r}, t_\tau) = p_0 + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j}{k_j h_j} \times \left( \sum_{i=1}^{\tau} (Q_{ij} - Q_{i-1j}) \text{Ei} \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)^2}{4\kappa_j (t_\tau - t_{i-1})} \right) \right) + \sum_{l=1}^K \sum_{j_l=1}^{n'_l} \frac{1}{L_{j_l}} \sum_{i=1}^{\tau} (c_{ij_l}^l - c_{i-1j_l}^l) \times \int_{[M_{j_l}, M_{j_l+1}]} \text{Ei} \left( -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{j_l}^{\text{slot}})^2}{4\kappa_{j_l}^{\text{slot}} (t_\tau - t_{i-1})} \right) dl, \quad (15)$$

где  $K$  — число непротекательных зон. Фигурирующие в формулах этого параграфа коэффициенты пьезопроводности для распределенных

фиктивных источников  $\kappa_{j_l}^{\text{slot}}$  полагаются равными одной величине — среднему значению коэффициента пьезопроводности для пласта.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ВЫВОДЫ

Наряду с введением непрерывных фиктивных источников рассматривался результат использования дискретных фиктивных источников, расположенных на границе непротекательной зоны либо внутри этой зоны. Создан пакет программ, позволяющих моделировать произвольное расположение зон выклинивания, расположение фиктивных источников и функционирование всего месторождения с учетом влияния фиктивных источников. Сравнительный анализ результатов моделирования показал, что метод введения распределенных по границам непротекательных зон непрерывных фиктивных источников является более предпочтительным.

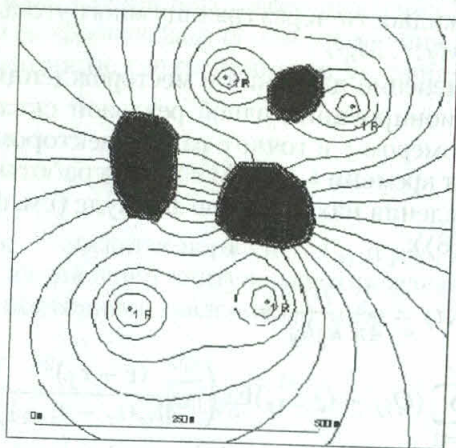


Рис. 1. Карта изобар для месторождения с тремя непротекательными зонами

На рис. 1–2 дебит добывающих скважин равен  $Q = 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ , а дебит нагнетательных равен  $Q = -10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ . На рис. 1 изображена карта изобар для модельного месторождения, содержащего три непротекательные зоны (выделены черным цветом) и четыре скважины — две добывающие в нижней части рисунка и две нагнетательные в верхней части рисунка. По границам зон непротекания расположены непрерывные фиктивные источники, по одному на каждой стороне границы. На рис. 2 изображена карта изобар для модельного месторождения с двумя зонами непротекания и непроницаемым внешним контуром и четырьмя скважинами — двумя добывающими (в левой части рисунка) и двумя нагнетательными (в правой части рисунка). По гра-

нице непроницаемого контура расположены непрерывные фиктивные источники.

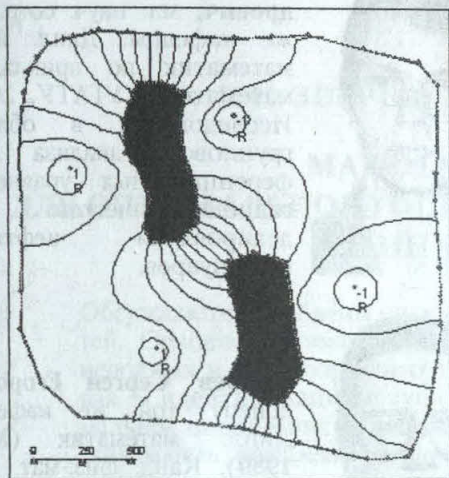


Рис. 2. Карта изобар для месторождения с двумя непротекательными зонами и непроницаемым внешним контуром

На основании формулы (15) построен алгоритм и создан пакет программ OSTOPUS для нахождения пластового давления в месторождении и построения карт изобар. Проведены расчеты для пласта БС-6 Восточно-Правдинского месторождения, не содержащего непротекательных зон. Полученные карты изобар позволяют рассчитывать не только воронки депрессии, расположенные около добывающих и нагнетательных скважин, но и выявить области высоких (в ряде нагнетательных скважин) и низких (отбор не компенсируется объемом нагнетания воды) пластовых давлений. Такие характерные особенности распределения пластового давления невозможно получить общепринятыми интерполяционными методами. На рис. 3 изображена карта пластового давления на июнь 1995 года.

Проведены расчеты для пласта АС-4 Мамонтовского месторождения, имеющего непротекательные зоны. На рис. 4 приведена карта пластового давления на июнь 1995 года для части пласта АС-4 Мамонтовского месторождения, имеющего непротекательные зоны (выделены черным цветом). Из карты видно, что около добывающих скважин, находящихся около зон выклинивания, происходит более быстрое падение давления со стороны непротекательных зон, что связано с отсутствием притока флюидов из этой зоны. А для нагнетательных скважин (скважина 2031) — наоборот. Изобары перпендикулярны границам непротекательных зон, что качественно верно и связано с отсутствием потока флюидов на этих границах.

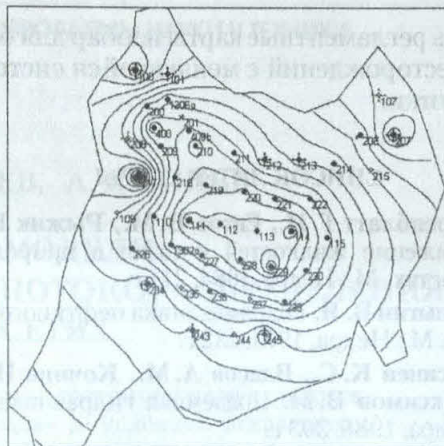


Рис. 3. Карта изобар для пласта БС-6 Восточно-Правдинского месторождения на июнь 1997 г.

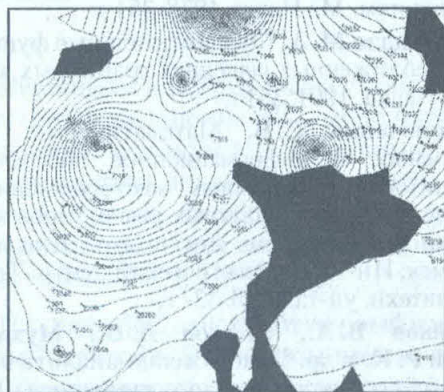


Рис. 4. Карта изобар для участка пласта АС-4 Мамонтовского месторождения на июнь 1995 г.

Аналогичные расчеты были проведены с использованием пакетов, в основе которых лежат численные методы вычисления давления. Сравнительный анализ полученных результатов показал, что по сравнению с алгоритмами, основанными на численном моделировании фильтрационных течений, предлагаемый алгоритм имеет следующие преимущества:

- скорость расчета поля давлений в десятки раз больше, что позволяет оперативно строить карты изобар для месторождений, имеющих несколько тысяч скважин;

- адаптация модели к условиям пласта и истории его разработки производится коррекцией фильтрационных свойств пласта, что позволяет повысить точность и достоверность расчетов. Благодаря высокой скорости расчетов, адаптация модели производится достаточно быстро.

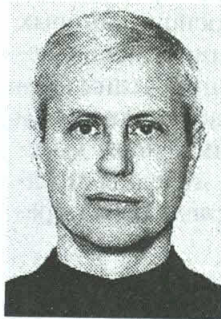
Поэтому использование предлагаемой модели позволит в условиях реального нефтедобывающего производства на месте быстро

строить регламентные карты изобар для больших месторождений с меняющейся системой разработки.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 211 с.
2. **Бульгин В. Я.** Гидромеханика нефтяного пласта. М.: Недра, 1974. 232 с.
3. **Басниев К. С., Власов А. М., Кочина И. Н., Максимов В. М.** Подземная гидравлика. М.: Недра, 1986. 303 с.
4. **Пирвердян А. М.** Нефтяная подземная гидравлика. Баку: Азнефтеиздат, 1956. 332 с.
5. **Алексидзе М. А.** Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978. 351 с.
6. **Алексидзе М. А.** Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. М.: Наука, 1991. 351 с.
7. **Костюченко С. В.** Математическое, программное и информационное обеспечение мониторинга нефтяных месторождений и моделирования нефтяных резервуаров методами декомпозиции. Дис. ... д-ра техн. наук. Томск: Ин-т "Кибернетический центр" Томск. политехн. ун-та, 2000. 327 с.
8. **Байков В. А., Гладков А. В., Мухамедшин Р. К. и др.** Приближенно-аналитические методы расчета пластового давления // Вестник инжинирингового центра ЮКОС. 2001. № 2. С. 8–12.

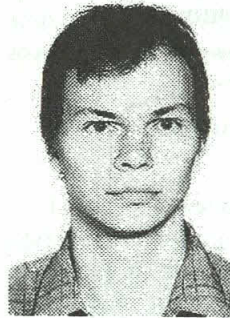
#### ОБ АВТОРАХ



**Байков Виталий Анварович**, проф., зав. каф. математики УГАТУ. Дипл. физик (БГУ, 1977). Д-р физ.-мат. наук в области математической физики (ИПМ им. М. В. Келдыша, 1991). Исследования в групповом анализе, нелинейной физике.



**Гладков Андрей Валерьевич**, мл. науч. сотр. той же кафедры. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 1998). Исследования в области группового анализа дифференциальных уравнений, гидродинамическое моделирование нефтяных резервуаров.



**Краснов Виталий Александрович**, мл. науч. сотр. той же кафедры. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 2000). Исследования в области группового анализа дифференциальных уравнений, гидродинамическое моделирование нефтяных резервуаров.



**Сысоев Сергей Егорович**, доцент той же кафедры. Дипл. математик (МГУ, 1989). Канд. физ.-мат. наук (МГУ, 1996). Исследования в области интегральной геометрии, компьютерной томографии, математического моделирования процессов нефтедобычи.



**Хабибуллин Ринат Альфредович**, асп. той же кафедры. Дипл. инж.-математик по прикладной математике (УГАТУ, 2000). Работает над диссертацией в области математического моделирования процессов нефтедобычи.



**Хасанов Марс Магнавиевич**, проф. каф. математики УГНТУ. Дипл. физик (БГУ, 1977). Д-р техн. наук по механике жидкости и газа (Азербайджанск. гос. нефтяная академия, 1992). Исследования в области математического моделирования.



**Байков Искандер Витальевич**, аспирант каф. техн. кибернетики УГАТУ. Дипл. инж. по управлению и информатике (УГАТУ, 2001). Работает над диссертацией в области математического моделирования процессов заводнения в нефтяных резервуарах.