

УДК 681.5

Г. Н. ЗВЕРЕВ, А. М. АМИНЕВ, А. В. ГИЛЕВ

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ИНЖЕНЕРНЫХ СЕТЯХ

Обсуждаются проблемы оптимального оценивания состояния инженерных сетей. Основное внимание уделено решению задач в условиях искаженных, неполных и противоречивых исходных данных. Рассмотрены две задачи: первая — идентификация текущей структуры инженерной сети, вторая — оптимальное оценивание потокораспределения в инженерной сети. *Математическая модель; оптимальное оценивание; инженерные сети; потокораспределение; метод наилучшей точности*

К инженерным сетям (далее ИС) относят сложные технологические системы, отличительными особенностями которых являются транспорт и преобразование потоков вещества и энергии как основной технологический процесс, существенная пространственная протяженность, большое количество образующих ИС структурных единиц. В качестве примеров можно привести следующие ИС: наземную технологическую инфраструктуру нефтегазодобывающего предприятия — сети добычи и транспорта жидкости, подготовки нефти, воды и газа, распределения и закачки воды, технологические комплексы нефтеперерабатывающих и нефтехимических предприятий, системы магистральных трубопроводов для транспорта нефти, газа и нефтепродуктов; системы транспорта и распределения электрической энергии.

Как объекты информационного анализа и синтеза различные ИС имеют много общего, что позволяет при определенном уровне абстрагирования от физических деталей использовать сходные подходы к их математическому моделированию, мониторингу, управлению. С этой точки зрения различные ИС характеризуются следующими, достаточно общими свойствами и проблемами:

- Основу математического моделирования ИС составляет представление ИС в виде направленного графа с числом вершин и ребер, достигающим 10 000. По ребрам графа распространяются потоки, физическая природа которых может быть самой различной. Потокораспределение, т. е. значения потока на ребрах графа, представляет основной предмет мониторинга и управления ИС.

- Вершинам и ребрам графа ставятся в соответствие компоненты ИС, моделирующие структурные единицы ИС. Основными типами компонентов являются генераторы и потребители потока, преобразователи и накопители потока, транспортные и переключающие компоненты.

- На графе ИС действуют первый и второй законы Кирхгофа. Эти законы вместе с моделями компонентов являются основой для построения математической модели ИС в виде системы линейных или нелинейных уравнений.

- Для ИС как системы в целом основным предметом анализа является стационарный (или квазистационарный) режим потокораспределения, поскольку анализ переходных процессов в системе (в общем случае, нелинейной) с числом степеней свободы порядка 10 000 представляет исключительно сложную задачу. Динамические свойства ИС, учитываемые при анализе, заключаются, прежде всего, в дискретных изменениях состояния переключающих компонентов ИС (технологические переключения).

- Состояние ИС выражается в терминах потокораспределения и величин, имеющих смысл потенциала — электрический потенциал, давление, температура. Для контроля состояния в ИС устанавливается большое число измерительных приборов, подсистем телеметрии и сбора данных. Для большинства ИС качество измерительной информации — полнота и точность измерений — невысокое, что существенно затрудняет решение таких задач, как контроль текущего потокораспределения,



производственный учет, оптимальное управление технологическим режимом ИС, диагностика неисправностей оборудования. В связи с резким ростом стоимости энергоносителей и реализацией различных программ энерго- и ресурсосбережения проблема повышения точности контроля и учета потокораспределения актуальна для всех типов ИС.

• Наряду с повышением качества измерительной системы основным резервом увеличения степени наблюдаемости и управляемости ИС является использование методов оптимальной обработки дискретно-непрерывной информации. В этой области имеется ряд теоретических исследований [1–4] и коммерческих программных комплексов [5–7], однако их анализ показывает недостаточную адекватность используемых моделей ИС и методов оптимального оценивания их потокораспределения: 1) структура графа ИС предполагается известной, в реальности же, вследствие технологических переключений и недостаточного уровня контроля переключений, структура графа ИС в общем случае является неопределенной; 2) для оптимального оценивания потокораспределения на графе ИС используются, как правило, методы наименьших квадратов (МНК), максимального правдоподобия (ММП) и им подобные. Как показано в [8, 9], недостатки подобных методов состоят в трудности учета в алгоритмах решения систем уравнений хорошо известной априорной информации, в использовании косвенных критериев точности решения, что приводит к некорректным постановкам обратных задач и необходимости использования искусственного метода регуляризации.

Из всего многообразия проблем в области моделирования и оптимального оценивания состояния ИС в данной статье выделены постановки и решения двух задач:

1) Оптимальное по точности оценивание структуры графа ИС для наиболее распространенной и важной в практическом отношении ситуации, когда граф является деревом.

2) Оптимальное по точности оценивание потокораспределения на произвольном графе ИС с известной структурой.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНЖЕНЕРНОЙ СЕТИ

Математическая модель ИС, используемая для решения отмеченных выше задач,

формализуется в следующем виде:

$$BX_t = 0; \quad (1)$$

$$Y_t = A_t X_t + V_t; \quad (2)$$

$$D_t = \Psi(U_t, \zeta_t); \quad (3)$$

$$Z_t = \Phi_t(D_t, \vartheta_t); \quad (4)$$

$$B^+ S_t + B^- S_t = 0; \quad (5)$$

$$d_1 = s_1, \quad d_i + \bar{d}_i \bar{s}_i = 1, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (6)$$

где  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  — вектор потоков ИС; (1) — уравнение, отражающее 1-й закон Кирхгофа на графе ИС;  $B$  — матрица инцидентности графа размерами  $m \times n$ ,  $m < n$ ,  $m$  — количество узлов сети;  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)^T$  — вектор измерений значений потоков;  $V = (v_1, v_2, \dots, v_k)^T$  — вектор аддитивных погрешностей измерений;  $A$  — матрица чувствительности измерений размерами  $k \times n$ , элемент матрицы  $a_{i,j}$  определяет вклад  $j$ -й переменной в  $i$ -е измерение;  $D_t$  — вектор двоичных переменных, характеризующих состояние переключаемых компонентов ИС (0 — выключен, 1 — включен); изменение значения вектора  $D_t$  является технологическим переключением;  $U_t$  — двоичный вектор программного управления инженерной сетью, отражающий целевое значение вектора  $D_t$ , (3) — уравнение, отражающее реализацию управления  $U_t$ ;  $\zeta$  — вектор помех при реализации управления;  $\Psi$  — двоичный оператор; (4) — модель подсистемы измерений переменных  $D_t$ , двоичный вектор  $Z_t$  — выход подсистемы;  $\vartheta$  — вектор двоичных помех;  $\Phi$  — двоичный оператор; уравнение (5) есть результат бинарной дискретизации уравнения (1); компоненты  $s_{t,i}$  вектора  $S_t$  отражают факт существования или несуществования потоков  $x_{t,i}$ , 1 — поток существует, 0 — не существует;  $B^+$  — матрица, получаемая из матрицы  $B$  подстановкой вместо значений «-1» нулевых значений, а  $B^-$  — подстановкой нулевых значений вместо «+1»; уравнения (6) отражают логику распространения потока по графу: если  $d_i = 0$ , то  $s_i = 0$ , т.е. поток  $x_i$  существовать не может, если же  $d_1 = 1$ , то  $s_i = 0$  или 1; знак «+» в (5) и (6) есть знак логического суммирования.

## 2. ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ СТРУКТУРЫ ГРАФА ИС

Технологические переключения  $D_t$  для графовой модели ИС эквивалентны подключению или отключению (коммутации) определенных ребер графа, т.е. определяют структуру ИС. Штатным средством получения ин-



формации о переключениях  $D_t$  является наблюдаемый вектор контроля переключений  $Z$ , однако неполнота контроля (вектор  $Z$  короче вектора  $D_t$ ) и наличие в составе вектора  $Z$  помехи  $\vartheta$  требуют оптимальной обработки с целью получения оценки  $\hat{D}_t$ , максимально близкой к вектору  $D_t$ . Отсутствие подобной обработки на практике часто приводит к противоречивым ситуациям, например: в соответствии с сигналом  $z_{ti}$   $i$ -е ребро графа отключено, а в соответствии с измерением  $y_{ti}$  поток через это ребро существует или, наоборот, ребро включено, а потока через него нет; в соответствии с управлением  $u_{ti}$   $i$ -е ребро графа отключено, а в соответствии с наблюдением  $z_{ti}$  ребро включено; в узле дерева существует «верхний» поток (т.е. тот, который ближе к корню дерева), но не существует ни одного из «нижних» потоков этого узла и т.д.

Для получения максимально точной и непротиворечивой оценки вектора  $D_t$ , помимо штатного вектора  $Z_t$ , необходимо привлекать дополнительную информацию — вектор непрерывных измерений потоков  $Y_t$  и результат его бинарной дискретизации двоичный вектор  $Y_t^d$ , вектор управления  $U_t$ , уравнения (5) и (6), условные функции распределения вероятности  $p(Z_t|D_t)$ ,  $p(U_t|D_t)$ ,  $p(Y_t^d|S_t)$ , определяемые статистическими свойствами помех  $\vartheta_t$ ,  $\zeta_t$ , и погрешности измерений  $V_t$ .

Задача оптимального оценивания структуры графа ИС ставится следующим образом: для каждого момента времени  $t$  необходимо найти такие оценки

$$\hat{D}_t = \hat{D}_t(Z_t, Y_t^d, U_t), \quad \hat{S}_t = \hat{S}_t(Z_t, Y_t^d, U_t), \quad (7)$$

которые при ограничениях (5) и (6) обеспечивают максимальную вероятность правильного решения  $\max_{\hat{D}_t} p(\hat{D}_t = D_t)$  и  $\max_{\hat{S}_t} p(\hat{S}_t = S_t)$ .

С формальной стороны постановка задачи и методы ее решения хорошо известны, здесь могут быть использованы подходы классической теории проверки сложных гипотез, теории распознавания образов, теории неклассических логик и т.п. Основной проблемой является большой размер входящих в задачу векторов (порядка  $n$ , где  $n$  — число ребер в графе ИС) и то, что сложность решения дискретных оптимизационных задач растет, в общем случае, экспоненциально с увеличением длины векторов — так называемое «проклятие размерности». При решении подобных задач главный интерес заключается в поиске конструктивного способа снижения ее

сложности (объема перебора) так, чтобы задача стала практически реализуемой при заданных ресурсах и требованиях к точности решения. Покажем, что в данном случае такой конструктивный способ снижения сложности существует.

Оптимальная оценка  $\hat{S}_t$  обеспечивает максимум совместной функции распределения

$$\begin{aligned} p(S_t, Z_t, Y_t^d, U_t) &= \\ &= p(S_t|Z_t, Y_t^d, U_t)p(Z_t, Y_t^d, U_t) = \\ &= p(Z_t, Y_t^d, U_t|S_t)p(S_t). \end{aligned} \quad (8)$$

Векторы  $Z_t$ ,  $Y_t^d$  и  $U_t$  считаем взаимно независимыми вследствие стандартного предположения о независимости случайных помех  $\vartheta_t$ ,  $\zeta_t$  и  $V_t$ . Кроме того, достаточно оснований сделать предположение и о независимости компонентов векторов  $Z_t$ ,  $Y_t^d$  и  $U_t$ , поскольку они возникают внутри существенно физически и территориально разнесенных информационных каналов. Отдельным вопросом является вид априорного распределения  $p(S_t)$ . На двоичный вектор  $S_t = \{s_{ti}\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  наложено ограничение (5), которое разбивает всю область (объемом  $2^n$ ) возможных значений вектора  $S_t$  на два множества  $\Omega_{\text{доп}}$  и  $\Omega_{\text{недоп}}$ :  $\Omega_{\text{доп}}$  — множество допустимых значений вектора  $S_t$ , удовлетворяющих условию (5);  $\Omega_{\text{недоп}}$  — множество недопустимых значений вектора  $S_t$ , не удовлетворяющих условию (5).

Пусть для простоты внутри множества  $\Omega_{\text{доп}}$  значения  $s_{ti}$  независимы, тогда

$$p(S_t) = \prod_{i=1}^n p(s_{ti})$$

при условии  $s_{ti} \in \Omega_{\text{доп}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Опуская в (7) нижние индексы  $t$ , получим

$$\begin{aligned} p(S, Z, Y^d, U) &= p(Z, Y^d, U|S)p(S) = \\ &= p(Z|S)p(Y^d|S)p(U|S)p(S) = \\ &= \prod_{i=1}^n p(z_i|S)p(y_i^d|S)p(u_i|S)p(S) = \\ &= \prod_{i=1}^n p(z_i|s_i)p(y_i^d|s_i)p(u_i|s_i)p(s_i), \\ & \quad s_i \in \Omega_{\text{доп}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

Обозначим в (8) произведение  $i$ -х условных вероятностей через  $p(J_i|s_i)$ , т.е.

$$p(z_i|s_i)p(y_i^d|s_i)p(u_i|s_i) = p(J_i|s_i),$$



Таблица 1

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\dots s_n$	$\Omega_{\text{доп}}$
0	0	0	0	$\Omega_{\text{доп},0}$
1	1	0	0	$\Omega_{\text{доп},1}$
1	0	1	0	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
1	1	1	1	

Таблица 2

$s_1$	$s_2$	$s_3$	$\dots s_n$	$\Omega_{\text{недоп}}$
1	0	0	0	$\Omega_{\text{недоп},0}$
0	1	0	0	$\Omega_{\text{недоп},1}$
0	0	1	0	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
0	1	1	1	

где  $J_i$  есть суммарная наблюдаемая информация, на основании которой оценивается  $s_i$ . Тогда

$$\max_S p(S, Z, Y^d, U) = \max_{s_1, s_2, \dots, s_n} \prod_{i=1}^n p(J_i | s_i) p(s_i), \quad s_i \in \Omega_{\text{доп}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

Если бы в этой задаче не было условия  $s_i \in \Omega_{\text{доп}}, i = 1, 2, \dots, n$ , тогда решение было бы тривиальным:

$$\begin{aligned} \max_S p(S, Z, Y^d, U) &= \\ &= \max_{s_1, s_2, \dots, s_n} \prod_{i=1}^n p(J_i | s_i) p(s_i) = \\ &= \prod_{i=1}^n \max_{s_i} p(J_i | s_i) p(s_i), \quad (11) \end{aligned}$$

однако при наличии условия такое решение некорректно, поскольку вектор  $\hat{S}$ , доставляющий максимум в (10), может оказаться в недопустимом множестве  $\Omega_{\text{недоп}}$ .

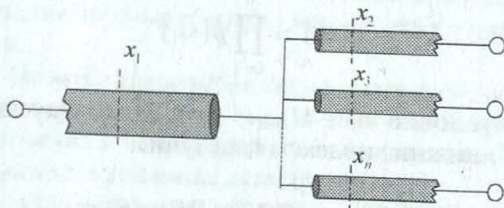


Рис. 1

В общем случае при произвольном виде множества  $\Omega_{\text{доп}}$  задача нахождения максимума в (9) требует вычисления значения функции  $\prod_{i=1}^n p(J_i | s_i) p(s_i)$  в каждой точке множества  $\Omega_{\text{доп}}$  и нахождения максимального из этих значений, т. е. имеет NP сложность [10]. Если множество  $\Omega_{\text{доп}}$  имеет объем того же порядка, что и объем возможных значений вектора  $S$ , т. е.  $2^n$ , тогда даже при сравнительно небольших значениях  $n$  порядка 100 (а для реальных

ИС величина  $n$  достигает значений 10 000) решение задачи становится нереализуемым, так как число переборов при  $n = 100$  больше  $10^{30}$ . Покажем, что если множество  $\Omega_{\text{доп}}$  определяется ограничением (5), то существует способ решения задачи (9), сложность которого (число операций) растет не как  $2^n$ , а как  $n$ . Рассмотрим для простоты, сокращения объема изложения и без ограничения общности участок ИС с одним вытекающим потоком  $x_1$  и  $(n - 1)$  втекающими потоками  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , рис. 1.

Матрица инцидентности  $B$  есть вектор  $[-1, 1, 1, \dots, 1]$ ,  $B^+$  есть вектор  $[0, 1, 1, \dots, 1]$ , а  $B^-$  — вектор  $[-1, 0, 0, \dots, 0]$ . В соответствии с (5)  $-B^-S = B^+S$ , т. е.  $[1, 0, 0, \dots, 0]S = [0, 1, 1, \dots, 1]S$ . Таким образом, ограничение на допустимые значения вектора  $S$  определяется уравнением  $s_1 = s_2 + s_3 + \dots + s_n$  и иллюстрируется табл. 1 и 2.

Вычислим значения величин  $p(J_1 | s_1 = 0) \times p(s_1 = 0)$ ,  $p(J_1 | s_1 = 1) p(s_1 = 1)$ ,  $\max_{s_2, \dots, s_n} \prod_{i=2}^n p(J_i | s_i) p(s_i) = \prod_{i=2}^n \max_{s_i} p(J_i | s_i) p(s_i)$  и  $\prod_{i=2}^n p(J_i | s_i = 0) p(s_i = 0)$ .

Сравним величины  $\max_{s_2, \dots, s_n} \prod_{i=2}^n p(J_i | s_i) p(s_i)$  и  $\prod_{i=2}^n p(J_i | s_i = 0) p(s_i = 0)$ .

а) Рассмотрим ситуацию, когда эти величины не равны, т. е. максимум  $\prod_{i=2}^n p(J_i | s_i) p(s_i)$  достигается в точке  $s'_2, s'_3, \dots, s'_n$ , принадлежащей подмножеству  $\Omega_{\text{доп},1}$ . Вычислим и сравним между собой величины

$$\begin{aligned} p(J_1 | s_1 = 0) p(s_1 = 0) \prod_{i=2}^n p(J_i | s_i = 0) p(s_i = 0) \text{ и} \\ p(J_1 | s_1 = 1) p(s_1 = 1) \max_{s_2, \dots, s_n} \prod_{i=2}^n p(J_i | s_i) p(s_i). \end{aligned}$$

Если



$$p(J_1|s_1 = 0)p(s_1 = 0) \prod_{i=2}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0) >$$

$$> p(J_1|s_1 = 1)p(s_1 = 1) \max_{s_2, \dots, s_n} \prod_{i=2}^n p(J_i|s_i)p(s_i),$$

то максимум  $\prod_{i=1}^n p(J_i|s_i)p(s_i)$  достигается в точке  $S = (0, 0, \dots, 0)$ , принадлежащей допустимому множеству  $\Omega_{\text{доп}}$ . Если же

$$p(J_1|s_1 = 0)p(s_1 = 0) \prod_{i=2}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0) <$$

$$< p(J_1|s_1 = 1)p(s_1 = 1) \max_{s_2, \dots, s_n} \prod_{i=2}^n p(J_i|s_i)p(s_i),$$

то максимум  $\prod_{i=1}^n p(J_i|s_i)p(s_i)$  достигается в точке  $S = (1, s'_2, s'_3, \dots, s'_n)$ , также принадлежащей допустимому множеству  $\Omega_{\text{доп}}$ .

б) Рассмотрим теперь ситуацию, когда величины  $\max_{s_2, \dots, s_n} \prod_{i=2}^n p(J_i|s_i)p(s_i)$  и  $\prod_{i=2}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0)$  равны, т. е. максимум  $\prod_{i=2}^n p(J_i|s_i)p(s_i)$  достигается в точке  $(0, 0, \dots, 0)$ , принадлежащей подмножеству  $\Omega_{\text{доп},0}$ .

Найдем максимум  $\prod_{i=2}^n p(J_i|s_i)p(s_i)$  на подмножестве  $\Omega_{\text{доп},1}$ . Очевидно, его необходимо искать на точках  $s_2, s_3, \dots, s_n$  вида  $(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ . Вычислим  $(n - 1)$  величин  $p(J_r|s_r = 1)p(s_r = 1) \prod_{i=2, i \neq r}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0), r = 2, 3, \dots, n$  и найдем максимум из них, который достигается при некотором значении  $r'$ , т. е. в точке  $s_2, s_3, \dots, s_n = 0, 0, \dots, 1, \dots, 0$ , где 1 стоит на  $r'$ -м месте.

Вычислим и сравним величины

$$p(J_1|s_1 = 0)p(s_1 = 0) \prod_{i=2}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0) \text{ и}$$

$$p(J_1|s_1 = 1)p(s_1 = 1)p(J_{r'}|s_{r'} = 1)p(s_{r'} = 1) \times$$

$$\times \prod_{i=2, i \neq r'}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0), r = r'.$$

$$\text{Если } p(J_1|s_1 = 0)p(s_1 = 0) \prod_{i=2}^n p(J_i|s_i = 0) \times$$

$$\times p(s_i = 0) > p(J_1|s_1 = 1)p(s_1 = 1) \times$$

$$\times p(J_{r'}|s_{r'} = 1)p(s_{r'} = 1) \prod_{i=2, i \neq r'}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0),$$

$r = r'$ , то максимум  $\prod_{i=1}^n p(J_i|s_i)p(s_i)$  достигается в точке  $S = (0, 0, \dots, 0)$ , принадлежащей допустимому множеству  $\Omega_{\text{доп}}$ . Если же  $p(J_1|s_1 = 0)p(s_1 = 0) \prod_{i=2}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0) <$

$< p(J_1|s_1 = 1)p(s_1 = 1)p(J_{r'}|s_{r'} = 1)p(s_{r'} = 1) \prod_{i=2, i \neq r'}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0), r = r'$ , то максимум  $\prod_{i=1}^n p(J_i|s_i)p(s_i)$  достигается в точке  $S = (1, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$  (где 1 стоит на  $r'$ -м месте), также принадлежащей допустимому множеству  $\Omega_{\text{доп}}$ .

Самая объемная операция в приведенном алгоритме — это вычисление  $(n - 1)$  величин  $p(J_r|s_r = 1)p(s_r = 1) \times \prod_{i=2, i \neq r}^n p(J_i|s_i = 0)p(s_i = 0), r = 2, 3, \dots, n$  и поиск максимума среди них. Сложность этой операции, т. е. поиска максимума из  $(n - 1)$  величин, оценивается как  $n$  [10], тем самым сложность и всей задачи определения оптимальной оценки  $\hat{S}$  оценивается не как  $2^n$ , а как  $n$ . Нахождение далее оптимальной оценки  $\hat{D}$  по оценке  $\hat{S}$  не представляет принципиальных проблем.

### 3. ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПОТОКОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ГРАФЕ ИС

Оптимальное оценивание потокораспределения является центральной задачей мониторинга инженерных сетей. Основные проблемы ее решения связаны с существенной неполнотой измерений потоков (вектор измерений  $Y$  короче вектора потоков  $X$ ) и наличием погрешностей измерений  $V$  (индекс  $t$  опущен, поскольку рассматривается стационарное потокораспределение). Известные постановки этой задачи обладают некорректностью, для устранения которой используется формализм схемы косвенного обращения [8], основанный на построении информационной модели ИС и использовании принципа точностного обращения операторов сети (максимум точности или минимум погрешности) вместо традиционных критериев равенства теоретических  $Y_T$  и фактически наблюдаемых значений  $Y_T = Y$  либо наибольшего согласия теории и эксперимента  $\min \|Y_T - Y\|$ . Задача оптимального по точности оценивания потокораспределения ставится здесь как



нахождение вектора оценки  $\hat{X}$ , обеспечивающего минимум математического ожидания среднеквадратичной ошибки решения

$$\min_S pM((\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T) = \min \sum_{i=1}^n M(\Delta_i), \text{ где } \Delta_i = \hat{x}_i - x_i. \quad (12)$$

В точностном критерии (12) минимизация погрешности производится по алгоритмам решения, так как критериальная функция — мера средней суммарной погрешности — не зависит от связанных переменных — истины  $X$  и ее оценки  $\hat{X}$ . Для получения конструктивных алгоритмов решения этой задачи используется метод наилучшей точности (МНТ) [8, 9], суть которого заключается в следующем.

Оптимальная оценка  $\hat{X}$  ищется в виде линейной комбинации измерений  $\hat{X} = B_{\text{опт}}Y + b_{\text{опт}}$ , где  $B_{\text{опт}}$  — матрица чувствительности алгоритма оптимального оценивания размерами  $n \times k$ ,  $b_{\text{опт}}$  — вектор оптимального сдвига размерности  $n$ . При использовании точностного критерия, который в данном случае сводится к требованию  $\min_{B,b} SpM((\hat{X} - X)(\hat{X} - X)^T)$  выражения для  $B_{\text{опт}}$  и  $b_{\text{опт}}$  имеют вид  $B_{\text{опт}} = K_{xy}K_y^{-1}$ ,  $b_{\text{опт}} = X_0 - B_{\text{опт}}Y_0$ , где  $X_0 = M(X)$  — математическое ожидание искомого вектора  $X$ ,  $Y_0 = M(Y)$  — математическое ожидание измерений  $Y$ ,  $K_y = M((Y - Y_0)(Y - Y_0)^T)$  — ковариационная матрица измерений, предполагаемая невырожденной,  $K_{xy} = M((X - X_0)(Y - Y_0)^T)$  — взаимная ковариация  $X$  и  $Y$ .

При этом систематическая погрешность оптимальной оценки  $\Delta_{0,\text{опт}} = M(X - \hat{X}) = 0$ , а случайная (неустраняемая) составляющая погрешности оптимального оценивания характеризуется ковариационной матрицей (апостериорной неопределенностью вектора  $X$ )  $K_{\Delta,\text{опт}} = M((X - \hat{X})(X - \hat{X})^T) = K_x - B_{\text{опт}}K_{yx}$ , где  $K_x = M((X - X_0)(X - X_0)^T)$  — ковариационная матрица искомого вектора  $X$  (априорная неопределенность).

Примем для простоты и без ограничения общности предположения, что измеряемые величины  $X$  и погрешности измерений  $V$  не коррелированы и что матрица измерений  $A$  является диагональной матрицей порядка  $n$ , т.е. каждому потоку соответствует по одному измерению. Пусть, кроме того, измерительные каналы нормированы так, что все компоненты матрицы  $A$  равны 1, т.е.  $A =$

$= E_n$ , где  $E_n$  — единичная матрица порядка  $n$ . Ситуация с отсутствующими измерениями (неполнота измерений) моделируется при этом устремлением к бесконечности погрешности этих измерений, т.е. соответствующих диагональных компонентов матрицы  $K_v$ . Тогда с учетом уравнения (2) следуют более конкретные выражения для  $Y_0$ ,  $K_{xy}$ ,  $K_y$ ,  $B_{\text{опт}}$ ,  $K_{\Delta,\text{опт}}$  и  $\hat{X}$ :

$$\begin{aligned} Y_0 &= X_0 + V_0, \\ K_y &= K_x + K_v, K_{xy} = K_x, \\ B_{\text{опт}} &= K_x [K_x + K_v]^{-1}, \\ \hat{X} &= X_0 + K_x [K_x + K_v]^{-1} (Y - X_0 - V_0) = \\ &= K_v [K_x + K_v]^{-1} X_0 + \\ &+ K_x [K_x + K_v]^{-1} (Y - V_0), \\ K_{\Delta,\text{опт}} &= K_x - K_x [K_x + K_v]^{-1} K_x = \\ &= K_v [K_x + K_v]^{-1} K_x, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $V_0$  — среднее значение, а  $K_v$  — ковариационная матрица погрешности  $V$ .

Основной задачей при использовании метода наилучшей точности применительно к инженерной сети является учет условия (1), которое накладывает на компоненты вектора  $X$   $m$  линейных ограничений. Таким образом, только  $(n - m)$  компонент этого вектора являются независимыми, причем в качестве зависимых можно выбрать любые  $m$  компонент, а в качестве независимых — оставшиеся  $(n - m)$  компонент. В соответствии с этим вектор  $X$  разбивается на два вектора — зависимый вектор  $X_1$ , имеющий  $m$  компонент, и независимый вектор  $X_2$  с  $(n - m)$  компонентами, так что  $X^T = (X_1^T, X_2^T)$ . Разбиение вектора  $X$  на независимый и зависимый векторы естественным образом выполняется для графа ИС, являющегося деревом. Лесом деревьев является граф ИС распределения электрической энергии или граф ИС нефтедобычи, например, дерево сбора добываемой жидкости или дерево распределения закачиваемой воды. В дереве, содержащем  $n$  ребер и  $m$  внутренних вершин, число ребер на нижнем уровне дерева равно как раз  $(n - m)$ . Кроме того, для потоков, соответствующих «нижним» ребрам дерева, как правило, задается плановый технологический режим — расход электроэнергии конечными потребителями для ИС электроснабжения или дебит жидкости для добывающих скважин и приемистость воды для нагнетательных скважин ИС нефтедобычи. Таким образом, независимый вектор  $X_2$  состоит из «нижних» потоков



дерева (деревьев) графа ИС, а зависимый вектор  $X_1$  — из внутренних потоков дерева. Плановый технологический режим интерпретируется как математическое ожидание независимого вектора  $X_{02}$ , а неопределенность планового режима выражается через ковариационную матрицу  $K_{x2}$ .

Введем обозначения: (14)

$K_{v1}$  — ковариационная матрица погрешности измерений зависимого вектора  $X_1$ ;

$K_{v2}$  — ковариационная матрица погрешности измерений независимого вектора  $X_2$ ;

$T_2 = [K_{v2}^{-1} + K_{x2}^{-1}]^{-1}$  — матрица, имеющая смысл суммарной априорной неопределенности вектора  $X_2$ ;

$T = \begin{bmatrix} K_{v1} & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$  — блочная матрица, имеющая смысл суммарной априорной неопределенности вектора  $X$ . С использованием этих обозначений основной результат решения задачи наилучшего по точности оценивания потокораспределения на графе ИС имеет вид

$$B_{\text{опт}} = [E_n - TB^T(BTB^T)^{-1}B]TK_{v}^{-1};$$

$$\hat{X} = B_{\text{опт}}(Y - V_0) + (E_n - B_{\text{опт}})X_0;$$

$$K_{\Delta\text{опт}} = B_{\text{опт}}K_v = [E_n - TB^T(BTB^T)^{-1}B]T. \quad (15)$$

Формулы (15) являются компактными конструктивными выражениями для получения оптимальных по точности оценок потокораспределения на графе ИС, допускают ясную физическую интерпретацию. В частности, с использованием (15) можно показать, что погрешность оптимальной оценки меньше как погрешности измерений, так и априорной неопределенности оцениваемого вектора  $X$ , при этом оптимальная оценка обеспечивает нулевые дисбалансы потоков в каждом узле графа ИС.

Представляет интерес исследование свойств оптимальной оценки состояния ИС, связанное с различными предположениями об объеме априорной информации о векторе  $X$ , величине погрешности измерений  $V$  и структуре матрицы инцидентности  $B$ .

1. Рассмотрим вырожденную ситуацию, когда при оптимальном оценивании графовая модель ИС вообще не учитывается, т. е. линейные ограничения (1) на компоненты вектора  $X$  отсутствуют, матрицы  $K_x$  и  $K_v$  диаго-

нальны, систематическая погрешность измерения отсутствует  $V_0 = 0$ . Тогда с учетом диагональности всех входящих матриц формулы для оптимальной оценки и погрешностей оценки распадаются на  $n$  независимых скалярных выражений для каждого компонента вектора  $X$ :

$$\hat{x}_i = \frac{K_{v,i}x_{0,i}}{K_{v,i} + K_{x,i}} + \frac{K_{x,i}y_i}{K_{v,i} + K_{x,i}} = \frac{\mu_i x_{0,i} + y_i}{1 + \mu_i},$$

$$K_{\Delta\text{опт},i} = \frac{K_{v,i}K_{x,i}}{K_{v,i} + K_{x,i}} = \frac{K_{v,i}}{1 + \mu_i},$$

$i = 1, 2, \dots, n,$

где  $\hat{x}_i$ ,  $x_{0,i}$ ,  $y_i$ ,  $K_{v,i}$ ,  $K_{x,i}$ ,  $\mu_i = K_{v,i}/K_{x,i}$  — оптимальная оценка, априорное значение, измерение, погрешность измерения, априорная неопределенность и отношение «шум/сигнал» для  $i$ -го компонента вектора  $X$  соответственно. Этот результат наглядно отражает «механизм» взаимодействия априорной и измерительной информации в методе наилучшей точности. Рассмотрим три крайние ситуации:

*Очень точное измерение* — погрешность измерения мала, т. е.  $K_{v,i} \rightarrow 0$ ,  $\mu_i \rightarrow 0$  и, как и следовало ожидать, в качестве оценки переменной  $\hat{x}_i$  используется измерение  $y_i$ .

*Очень большая погрешность измерения* —  $K_{v,i} \gg K_{x,i}$ ,  $\mu_i \gg 1$ , измерение не несет информации о величине переменной  $x_i$  и в качестве оценки  $\hat{x}_i$  используется априорная информация, т. е. ожидаемое значение  $x_{0,i}$ .

*Очень точная априорная информация («априорное зажатие»)* — область неопределенности ожидаемого значения переменной  $x_{0,i}$  очень мала,  $\mu_i \gg 1$  и  $\hat{x}_i \rightarrow x_{0,i}$ ; измерение с «обычной» точностью не вносит дополнительной информации к уже имеющейся, очень точной априорной информации.

2. Пусть априорная информация о состоянии ИС отсутствует, погрешности измерений некоррелированы, отсутствует систематическая погрешность измерений, в этой ситуации вектор  $X_0$  имеет неопределенное (но конечное) значение, возможная вариация вектора  $X$  велика, т. е.  $\|K_x\| \rightarrow \infty$ , матрица  $K_v$  является диагональной и вектор  $V_0 = 0$ .

Именно такой является ситуация при оптимальном оценивании состояния ИС методом наименьших квадратов, и представляет интерес сравнение оптимальных оценок состояния ИС для двух различных методов — МНК и МНТ — при одинаковых исходных условиях.



При  $\|K_x\| \rightarrow \infty$  слагаемое в выражении для  $\hat{X}$  в (13)  $K_v [K_x + K_v]^{-1} X_0 \rightarrow 0$ . Поэтому для оптимальной оценки получаем  $\hat{X} = B_{\text{опт}} Y$ . При  $\|K_{x2}\| \rightarrow \infty$   $T_2 = K_{v2}$  и  $T = K_v$ , отсюда из (15)  $\hat{X} = Y - K_v B^T (B K_v B^T)^{-1} B Y$ , что полностью совпадает с выражением для оптимальной оценки по МНК, полученным в [5]. Таким образом, при отсутствии априорных данных оптимальная оценка состояния ИС, полученная на основе МНТ, равна оценке состояния ИС, получаемой на основе МНК. Этот факт имеет большое значение, поскольку МНК широко распространен в инженерной практике и в соответствии с данным результатом его можно интерпретировать просто как частный случай МНТ.

3. Рассмотрим участок ИС с одним вытекающим (зависимым) потоком  $x_1$ , ( $X_1 = x_1$ ) и  $(n - 1)$  втекающими (независимыми) потоками  $X_2 = (x_2, x_3, \dots, x_n)$  (см. рис. 1). Предположим вначале, что некоррелированы и погрешности измерений, и вариации вектора  $X$ , т.е. матрицы  $K_{v2}$  и  $K_{x2}$  диагональны. Пусть, кроме того, суммарные априорные неопределенности  $T_{2,i,i}$  потоков  $x_i$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  примерно одинаковы и  $\sigma_{v1}^2 \ll T_{2,i,i}$ . Последнее предположение соответствует тому распространенному случаю, когда средство измерения на верхнем уровне дерева графа ИС имеет существенно большую точность, чем средства измерений на нижнем уровне дерева. Тогда погрешность оптимального оценивания зависимого потока  $K_{\Delta, \text{опт}, 1} \approx \sigma_{v1}^2$ , а  $K_{\Delta, \text{опт}, i} = T_{2,i,i} (1 - \frac{1}{n-1})$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ . В последнем выражении член  $T_{2,i,i}$  в соответствии с (14) меньше, чем и  $\sigma_{x2,i}^2$  и  $\sigma_{v2,i}^2$  обеспечивает выигрыш в точности, обусловленный оптимальным сочленением априорных данных  $\sigma_{x2,i}^2$  и  $\sigma_{v2,i}^2$ , но без учета модельной информации  $\sigma_{v1}^2 \ll T_{2,i,i}$  и  $BX = 0$ . Член  $(1 - \frac{1}{n-1})$  дает дополнительный выигрыш в точности, обусловленный учетом модельной информации  $\sigma_{v1}^2 \ll T_{2,i,i}$  и  $BX = 0$ . Отсюда, в частности, следует важный практический вывод, что наличие точного средства измерения на верхнем уровне дерева графа ИС при оптимальном оценивании по МНТ позволяет увеличить точность оценки состояния «нижних» потоков дерева. Например, при  $n = 3$  (узел с двумя втекающими и одним вытекающим потоками) дисперсия погрешности оценивания величины втекающих потоков при точном измерении вытекающего потока уменьшается в два раза.

4. Пусть теперь и погрешности измерений и вариации вектора  $X$  коррелированы, т.е. матрицы  $K_{v2}$ ,  $K_{x2}$  и  $T_2$  имеют ненулевые недиагональные элементы. Предположим для наглядности результатов, что по-прежнему  $\sigma_{v1}^2 \ll T_{2,i,i}$ , диагональные элементы  $T_{2,i,i}$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$ , примерно одинаковы, а недиагональные элементы  $T_{2,i,j} = T_{2,j,i} = r T_{2,i,i}$ ,  $i \neq j$ , где  $r$  — коэффициент корреляции,  $-1 \leq r \leq 1$ . Тогда из (15) следует, что

$$K_{\Delta, \text{опт}, i} = T_{2,i,i} (1 - r) (1 - \frac{1}{n-1}), i = 2, 3, \dots, n,$$

т.е. учет положительной корреляции между компонентами матрицы суммарной априорной неопределенности  $T_2$  (дополнительная априорная информация) приводит к дополнительному снижению погрешности оптимального оценивания независимых потоков и при  $r \rightarrow 1$  эта погрешность стремится к нулю. Таким образом, с точки зрения повышения точности оценивания состояния ИС актуальными являются задачи выявления факта и оценки величины положительной корреляции между независимыми потоками ИС и / или погрешностями их измерений. В инженерных сетях нефтедобычи физической причиной такой положительной корреляции может быть, например, общность гидродинамических процессов в подземном нефтяном резервуаре для потоков жидкости добывающих скважин из этого резервуара; при изменении пластового давления в резервуаре дебиты скважин могут изменяться достаточно «дружно».

Рассмотрим численный пример, иллюстрирующий свойства оптимальных оценок потокораспределения в зависимости от объема учитываемой модельной и априорной информации.

Задан узел инженерной сети с одним вытекающим потоком  $x_1$  и двумя втекающими потоками  $x_2$  и  $x_3$  (рис. 2). Для каждого потока имеются измерения —  $y_1$ ,  $y_2$  и  $y_3$ .

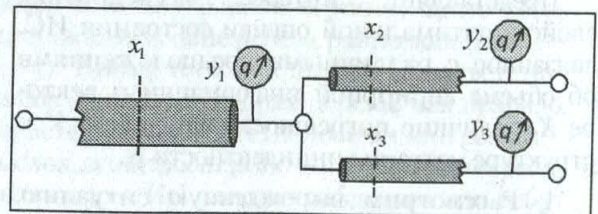


Рис. 2

Для этого примера:



Таблица 3

Ситуация	$i$	$y_i$	$x_i$	$\hat{x}_i$	$ x_i - y_i $	$ x_i - \hat{x}_i $	$K_{\Delta, \text{опт}, i}$
1. Не учитывается графовая модель ИС, $r = 0$	1	203,0	202,0	202,88	1,0	0,88	3,84
	2	96,0	101,0	97,33	5,0	3,67	16,66
	3	105,0	101,0	103,33	4,0	2,33	16,66
2. Не учитывается ожидаемое потокораспределение, $r = 0$	1	203,0	202,0	202,92	1,0	0,92	3,85
	2	96,0	101,0	96,96	5,0	4,04	13,0
	3	105,0	101,0	105,96	4,0	4,96	13,0
3. Учитывается модельная и априорная информация, $r = 0$	1	203,0	202,0	202,74	1,0	0,74	3,81
	2	96,0	101,0	99,10	5,0	1,90	8,33
	3	105,0	101,0	103,64	4,0	2,64	8,33
4. Учитывается модельная и априорная информация, $r = 0,2$	1	203,0	202,0	202,72	1,0	0,72	3,80
	2	96,0	101,0	99,47	5,0	1,53	6,66
	3	105,0	101,0	103,25	4,0	2,25	6,66
5. Учитывается модельная и априорная информация, $r = 0,5$	1	203,0	202,0	202,67	1,0	0,67	3,80
	2	96,0	101,0	99,89	5,0	1,11	4,16
	3	105,0	101,0	102,78	4,0	1,78	4,16

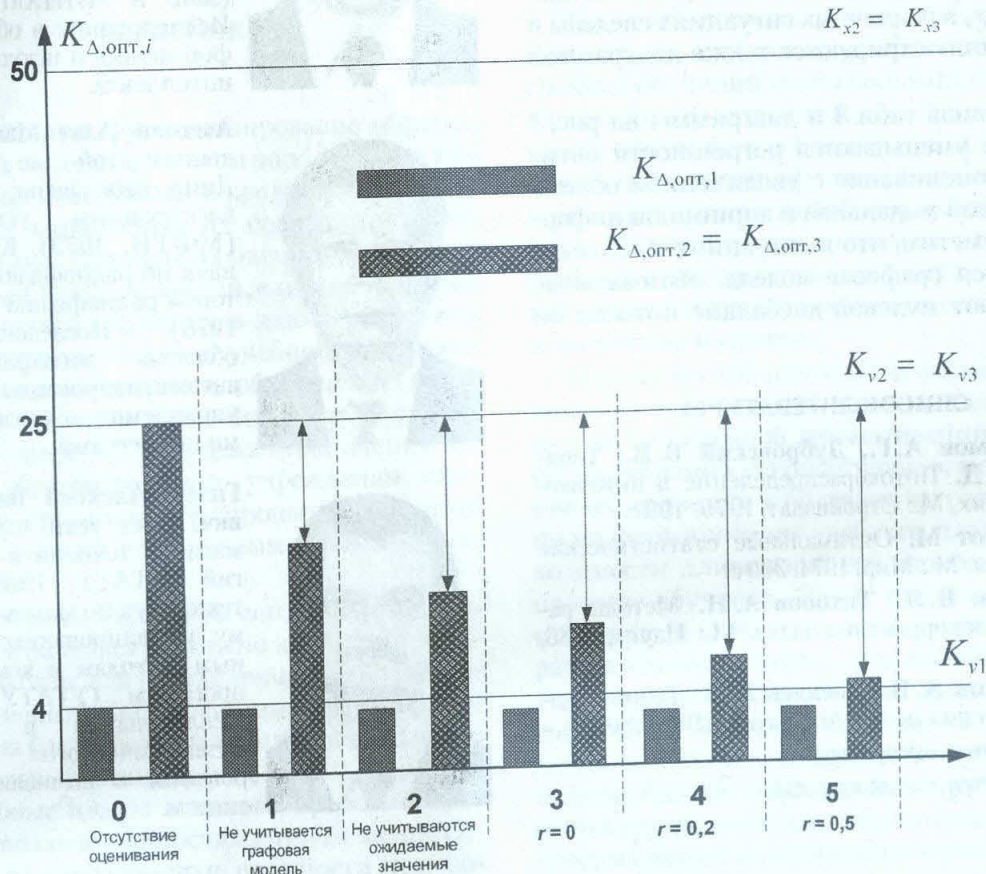


Рис. 3

• классы точности расходомеров Кл.т.<sub>1</sub> = 1,0, Кл.т.<sub>2</sub> = Кл.т.<sub>3</sub> = 5,0;

•  $X^T = (x_1, x_2, x_3) = (202, 101, 101)$  — фактическое потокораспределение;

•  $Y^T = (y_1, y_2, y_3) = (203, 96, 105)$  — результаты измерений;

•  $X_0^T = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) = (200, 100, 100)$  — ожидаемое (плановое) потокораспределение;



• измерения независимы, т. е. ковариационная матрица погрешности диагональна с диагональными элементами  $\sigma_{vi}^2 = (x_{0i \text{ Кл.Т.}i})^2$

$$\text{и равна } K_V = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix};$$

• систематическая погрешность измерений отсутствует:  $V_0 = 0$ ;

• независимый вектор  $X_2 = (x_2, x_3)$  имеет ковариационную матрицу  $K_{x_2} =$   
 $= \begin{bmatrix} 50 & r50 \\ r50 & 50 \end{bmatrix}$ , где коэффициент корреляции  $r$  принимает одно из значений: 0; 0,2; 0,5.

Результаты вычислений оптимальных оценок  $\hat{x}_i$ , абсолютных значений погрешностей измерений  $|x_i - y_i|$ , абсолютных значений погрешностей оптимальных оценок  $|x_i - \hat{x}_i|$  и теоретических значений среднеквадратических погрешностей оптимальных оценок  $K_{\Delta, \text{опт}, i}$  в различных ситуациях сведены в табл. 3 и иллюстрируются также диаграммой на рис. 3.

Из анализа табл. 3 и диаграммы на рис. 3 видно как уменьшаются погрешности оптимального оценивания с увеличением объема учитываемой модельной и априорной информации. Отметим, что в ситуациях 2–5, когда учитывается графовая модель, оптимальные оценки дают нулевой дисбаланс потоков по узлу.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евдокимов А. Г., Дубровский В. В., Тевяшев А. Д. Потокораспределение в инженерных сетях. М.: Стройиздат, 1979. 199 с.
2. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974. 300 с.
3. Арсенин В. Я., Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
4. Меренков А. П., Хасилев В. Я. Теория гидравлических цепей. М.: Наука, 1985. 280 с.
5. <http://www.osisoft.com>
6. <http://www.ropnet.ru/potok>

7. <http://www.simsci.com>

8. Зверев Г. Н. Основания теоретической информатики. Разд. 1–10. Уфа: УГАТУ, 1995–2001.

9. Зверев Г. Н., Дембинский С. И. Оценка эффективности геофизических исследований скважин. М.: Недра, 1982. 224 с.

10. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.

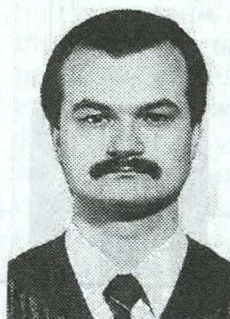
#### ОБ АВТОРАХ



**Зверев Геннадий Никифорович**, профессор кафедры проектирования средств информатики УГАТУ. Дипл. инж.-геофизик (Грозненский нефтяной ин-т, 1958). Д-р техн. наук по геофизике (защ. в МИНХиП, 1982). Исследования в области информатики и искусственного интеллекта.



**Аминев Азат Махмудович**, доцент той же кафедры. Дипл. инж.-физик по радиоэлектронным устройствам (МФТИ, 1973). Канд. техн. наук по радиофизике и квантовой радиофизике (МФТИ, 1978). Исследования в области интегрированных автоматизированных систем управления технологическими процессами.



**Гилёв Алексей Вячеславович**, канд. техн. наук. Дипл. магистр техники и технологий (УГАТУ, 1998). Канд. техн. наук по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ (УГАТУ, 2002). Исследования в области математического моделирования и вычислительных систем.