

УДК 534.1

СОБСТВЕННЫЕ ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

В. П. ПАВЛОВ¹, Л. Р. НУСРАТУЛЛИНА²

¹victor.pavlov.51@yandex.ru, ²mardliliya@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 19.11.2019

Аннотация. Излагается метод численного расчета частот собственных колебаний естественно закрученного стержня, рассматриваемого как первое приближение модели реальных лопаток газотурбинных двигателей (ГТД). Метод базируется на разрабатываемом авторами методе сплайнов пятой степени, позволяющем весьма точно решать дифференциальные уравнения четвертого порядка, возникающие в задачах о поперечных колебаниях стержней. В отличие от известных работ, где рассматриваются изгибные колебания только в одной плоскости, данные исследования ориентированы на изучение более сложного процесса колебаний при пространственном изгибе стержня.

Ключевые слова: естественно закрученный стержень; метод сплайнов; собственные колебания, пространственный изгиб стержня.

ВВЕДЕНИЕ

Для обеспечения усталостной прочности лопаток газотурбинных двигателей (ГТД) уровень переменных напряжений в них должен быть достаточно низким. Повышенные переменные напряжения возникают в лопатках, в основном, на резонансных частотах, когда частота внешних возбуждающих сил совпадает с одной из собственных частот колебаний лопатки. Для отстройки от резонансов необходимо уже на стадии проектирования правильно определять собственные частоты колебаний лопаток, особенно низшие частоты изгибных колебаний [1–3].

Лопатки ГТД представляют собой естественно закрученные стержни с переменным по длине поперечным сечением, что не позволяет для определения спектра частот собственных колебаний воспользоваться традиционными аналитическими формулами, разработанными только для стержней с постоянным поперечным сечением [3, 4]. Поэтому наиболее приемлемым в настоящее время является подход, базирующийся на применении численных методов.

К настоящему времени разработан ряд численных методов для расчета частот собственных колебаний стержней переменного сечения [1–14], но все эти решения рассматривают плоский изгиб стержня при колебаниях.

В связи с этим представляется весьма актуальной разработка численного метода, позволяющего определять частоты собственных колебаний естественно закрученного стержня при реально происходящем его пространственном изгибе.

В данной работе эта задача решается на основе разрабатываемого авторами метода сплайнов пятой степени [14–19]. При этом были получены следующие основные результаты:

– сформированы дифференциальные уравнения, описывающие пространственные изгибные колебания естественно закрученного стержня с переменным по длине стержня поперечным сечением;

– разработан численный метод решения системы дифференциальных уравнений, описывающих поперечные изгибные колебания естественно закрученного стержня;

– создано программное обеспечение, реализующее предлагаемый численный метод;

– получены расчетные результаты для конкретного естественно закрученного стержня, близкого по размерам и степени закрученности к лопаткам реальных ГТД.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается естественно закрученный стержень, являющийся приближенной моделью пера рабочей лопатки осевого компрессора или турбины ГТД (рис. 1). Ось Z направлена в радиальном направлении перпендикулярно к оси вращения рабочего колеса. Геометрия стержня определяется его поперечными сечениями, задаваемыми в координатной плоскости XU , и функцией закрутки стержня $\alpha = \alpha(z)$, определяющей угол поворота поперечного сечения стержня относительно неподвижной координатной системы XU при движении вдоль оси Z (рис. 1).

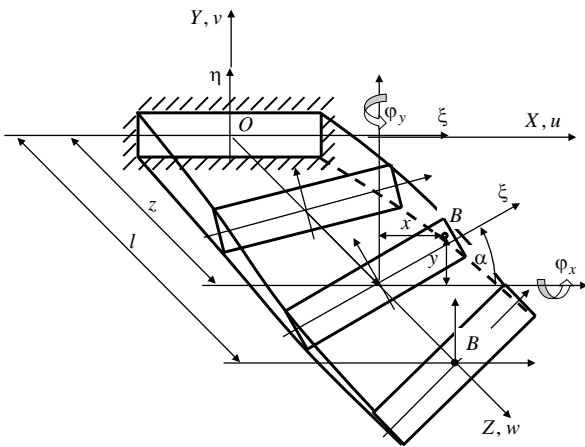


Рис. 1. Естественно закрученный стержень с переменными по длине сечениями

Ставится задача сформировать дифференциальные уравнения, описывающие пространственные изгибные колебания естественно закрученного стержня с переменным сечением, разработать численный метод решения данных уравнений, создать программное обеспечение, реализующее численный метод, и на примере конкретного естественно закрученного стержня проанализировать влияние степени закрутки стержня на частоты его колебаний.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЕСТЕСТВЕННО ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ

Изгибное деформирование стержня при колебаниях определим перемещениями u, v точек его оси, являющимися функциями координаты z и времени t :

$$u = u(z, t), \quad v = v(z, t). \quad (1)$$

Перемещение w произвольной точки сечения B (рис. 1) вдоль оси Z определяется выражением [1–3]:

$$w = -\varphi_y x + \varphi_x y, \quad (2)$$

где φ_x и φ_y – соответственно углы поворота сечения относительно осей X и Y .

На основе (1) запишем (рис. 1):

$$\varphi_y = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varphi_x = -\frac{\partial v}{\partial z}. \quad (3)$$

Линейная деформация материала ε_z вдоль оси Z в точке B (рис. 1) определяется формулой [1–3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z(x, y, z) &= \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \varphi_y}{\partial z} x + \frac{\partial \varphi_x}{\partial z} y = \\ &= -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} y. \end{aligned} \quad (4)$$

Зная деформацию ε_z , на основе закона Гука и соотношения (4) определим нормальное напряжение в точке B :

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = E \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} y \right), \quad (5)$$

где E – модуль упругости материала.

Далее определим внутренние изгибающие моменты M_x, M_y [3]:

$$\begin{cases} M_x = \int_A \sigma_z y dA = -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} E \int_A x y dA - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} E \int_A y^2 dA, \\ M_y = -\int_A \sigma_z x dA = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} E \int_A x^2 dA + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} E \int_A x y dA, \end{cases} \quad (6)$$

где интегрирование ведется по всей площади поперечного сечения A .

Запишем дифференциальные уравнения связи между внутренними силовыми факторами в стержнях [3]:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_x}{\partial z} = -q_x, & \frac{\partial Q_y}{\partial z} = -q_y, \\ \frac{\partial M_x}{\partial z} = Q_y, & \frac{\partial M_y}{\partial z} = -Q_x. \end{cases} \quad (7)$$

Исключив из (7) поперечные силы Q_x и Q_y , запишем:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} = -q_y, \quad \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} = q_x. \quad (8)$$

Определим проекции a_x и a_y ускорения точек оси стержня на координатные оси X, Y :

$$a_x = \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2}, \quad a_y = \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial t^2}. \quad (9)$$

Рассматривается стержень с переменной вдоль оси Z массой единицы длины:

$$\mu = \mu(z). \quad (10)$$

По принципу Даламбера определим проекции $q_x^{ин}$ и $q_y^{ин}$ на оси X, Y погонной силы инерции, действующей на стержень:

$$q_x^{ин} = -\mu a_x = -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad q_y^{ин} = -\mu a_y = -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Подставим (6) и (11) в (8) и при обозначениях

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_{xy} = \int_A xy dA \quad (12)$$

получим систему из двух дифференциальных уравнений, описывающих собственные изгибные колебания стержня с изменяющимися вдоль оси Z погонной массой и моментами инерции:

$$\begin{cases} EI_{xy} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_{xy}}{\partial z} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_{xy}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_x}{\partial z} \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + \\ + E \frac{\partial^2 I_x}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ EI_y \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_y}{\partial z} \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_y}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \\ + EI_{xy} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_{xy}}{\partial z} \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + \\ + E \frac{\partial^2 I_{xy}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение системы (13) ищем в виде [4]:

$$u = U(z) \sin \omega t, \quad v = V(z) \sin \omega t, \quad (14)$$

где $U = U(z)$ – форма колебаний в плоскости XZ , $V = V(z)$ – форма колебаний в плоскости YZ .

После подстановки (14) в (13) и последующих сокращений полученных уравнений на $\sin \omega t$ получаем систему из двух дифференциальных уравнений, описывающих формы собственных поперечных колебаний стержня:

$$\begin{cases} EI_{xy} \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_{xy}}{\partial z} \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_{xy}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \\ + EI_x \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_x}{\partial z} \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} + \\ + E \frac{\partial^2 I_x}{\partial z^2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \mu \omega^2 V = 0, \\ EI_y \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_y}{\partial z} \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + E \frac{\partial^2 I_y}{\partial z^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \\ + EI_{xy} \frac{\partial^4 V}{\partial z^4} + 2E \frac{\partial I_{xy}}{\partial z} \frac{\partial^3 V}{\partial z^3} + \\ + E \frac{\partial^2 I_{xy}}{\partial z^2} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \mu \omega^2 U = 0, \end{cases} \quad (15)$$

где ω – круговая частота собственных колебаний стержня, которую необходимо определить из (15); $U = U(z)$ и $V = V(z)$ – собственные формы колебаний соответственно в плоскостях ZX и ZY .

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕТОДА СПЛАЙНОВ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

Для решения построенной системы дифференциальных уравнений применим метод сплайнов степени 5 дефекта 1, эффективно применяемый для различных задач в работах [14–19].

При построении сплайна степени 5 дефекта 1 [14–19] на отрезке $[0, l]$ формируется сетка $\Delta: 0 = z_1 < z_2 < \dots < z_N = l$, имеющая N узлов. На данной сетке строится сплайн-функция $\mathbf{W}_{5,1}(x)$ степени 5 дефекта 1, имеющая $N_s = N + 4$ степеней свободы.

В пределах каждого отрезка $[z_i, z_{i+1}]$, $i = 1, N - 1$ сплайн-функция $\mathbf{W}_{5,1}(z)$ является многочленом пятой степени

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{5,1}(z) = \sum_{\alpha=0}^5 a_{\alpha}^{(i)} (z - z_i)^{\alpha}, \\ z \in [z_i, z_{i+1}], i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (16)$$

Параметры, определяющие сплайн, сводятся в вектор-столбец \mathbf{Q} из $N_s = N + 4$ параметров сплайна $\mathbf{Q} = (q_k, k = \overline{1, N+1})^T$, где:

$$\begin{cases} q_1 = \mathbf{W}_{5,1}(z_1), & q_2 = \frac{d\mathbf{W}_{5,1}(z_1)}{dz}, \\ q_3 = \frac{d^2\mathbf{W}_{5,1}(z_1)}{dz^2}, & q_4 = \frac{d^3\mathbf{W}_{5,1}(z_1)}{dz^3}, \\ \{q_{i+4} = \frac{d^4\mathbf{W}_{5,1}(z_i)}{dz^4}, & i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (17)$$

В узлах сетки Δ рассматриваются значения сплайн-функции $\mathbf{W}_{5,1}(z)$ и ее производных до четвертого порядка включительно:

$$f_i^{(s)} = \frac{d^s \mathbf{W}_{5,1}(z_i)}{dz^s}, \quad i = \overline{1, N}, \quad s = \overline{0, 4}. \quad (18)$$

Из них формируются векторы-столбцы:

$$\mathbf{V}_{dsf} = (f_i^{(s)}, i = \overline{1, N})^T, \quad s = \overline{0, 4}. \quad (19)$$

Векторы узловых значений сплайн-функции $\mathbf{W}_{5,1}(z)$ и ее производных определим согласно [14] матричными выражениями:

$$\mathbf{V}_{dsf} = \mathbf{M}_{dsf} \mathbf{Q}, \quad s = \overline{0, 4}, \quad (20)$$

где \mathbf{M}_{dsf} , $s = \overline{0, 4}$ – прямоугольные матрицы размера $N \times (N + 4)$:

$$\mathbf{M}_{dsf} = (M_{n,m}^{dsf}), \quad n = \overline{1, N}, \quad m = \overline{1, N+4}, \quad (21)$$

формируемые по методике, изложенной в [14], и зависящие только от сетки Δ узлов сплайна.

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ФОРМУ КОЛЕБАНИЙ

При построении дискретного аналога системы дифференциальных уравнений (15) введем в соответствии с (16) для каждой из функций $U = U(z)$ и $V = V(z)$ соответствующие им два сплайна: $\mathbf{W}_{5,1}^{(U)}(z)$ и $\mathbf{W}_{5,1}^{(V)}(z)$,

определяемые соответствующими им векторами параметров \mathbf{Q}_U и \mathbf{Q}_V вида (17):

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_U = (q_i^U, i = \overline{1, N+4})^T, \\ \mathbf{Q}_V = (q_i^V, i = \overline{1, N+4})^T. \end{cases} \quad (22)$$

Значения искомых функций $U = U(z)$, $V = V(z)$ и их производных в узлах сплайна z_i , $i = \overline{1, N}$ сведем в векторы

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{dsU} = (\frac{d^s U(z_i)}{dz^s}, i = \overline{1, N})^T, \\ \mathbf{V}_{dsV} = (\frac{d^s V(z_i)}{dz^s}, i = \overline{1, N})^T, \quad s = \overline{0, 4}, \end{cases} \quad (23)$$

которые определим по аналогии с (20) матричными соотношениями:

$$\mathbf{U}_{dsU} = \mathbf{M}_{dsf} \mathbf{Q}_U, \quad \mathbf{U}_{dsV} = \mathbf{M}_{dsf} \mathbf{Q}_V, \quad s = \overline{0, 4}. \quad (24)$$

Объединим векторы \mathbf{Q}_U и \mathbf{Q}_V в единый вектор параметров \mathbf{Q}_{Σ} :

$$\mathbf{Q}_{\Sigma} = (q_i^{\Sigma}, i = \overline{1, 2N+8})^T \quad (25)$$

при

$$q_i^{\Sigma} = q_i^U, \quad q_{i+N+4}^{\Sigma} = q_i^V, \quad i = \overline{1, N+4}. \quad (26)$$

На основе выше приведенных соотношений запишем в матричной форме систему линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A} \mathbf{Q}_{\Sigma} = 0 \quad (27)$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица

$$\mathbf{A} = (A_{ij}, i = \overline{1, 2N+8}, j = \overline{1, 2N+8}), \quad (28)$$

в которой первые $2N$ строк формируются как дискретные аналоги системы дифференциальных уравнений (15):

$$\begin{cases} A_{i,j} = EI_{xy}(z_i) M_{i,j}^{d4s} + 2E \frac{\partial I_{xy}(z_i)}{\partial z} M_{i,j}^{d3s} + \\ + E \frac{\partial^2 I_{xy}(z_i)}{\partial z^2} M_{i,j}^{d2s}, \\ A_{i,k} = EI_x(z_i) M_{i,j}^{d4s} + 2E \frac{\partial I_x(z_i)}{\partial z} M_{i,j}^{d3s} + \\ + E \frac{\partial^2 I_x(z_i)}{\partial z^2} M_{i,j}^{d2s} - \mu(z_i) M_{i,j}^{d0s} \omega^2, \end{cases} \quad (29)$$

при $k = j + N + 4, i = \overline{1, N}, j = \overline{1, N + 4}$,

$$\left\{ \begin{aligned} A_{i+N,j} &= EI_y(z_i) M_{i,j}^{d4s} + 2E \frac{\partial I_y(z_i)}{\partial z} M_{i,j}^{d3s} + \\ &+ E \frac{\partial^2 I_y(z_i)}{\partial z^2} M_{i,j}^{d2s} - \mu(z_i) M_{i,j}^{d0s} \omega^2, \\ A_{i+N,k} &= EI_{xy}(z_i) M_{i,j}^{d4s} + 2E \frac{\partial I_{xy}(z_i)}{\partial z} M_{i,j}^{d3s} + \\ &+ E \frac{\partial^2 I_{xy}(z_i)}{\partial z^2} M_{i,j}^{d2s}, \end{aligned} \right. \quad (30)$$

при $k = j + N + 4, \quad \overline{i} = \overline{1, N}, \quad \overline{j} = \overline{1, N + 4}$.

Последние восемь уравнений системы (15) (формируются как дискретные аналоги краевых условий рассматриваемого стержня):

$$U(z_1) = 0, \quad \frac{\partial U(z_1)}{\partial z} = 0, \quad M_y(z_N) = 0, \quad Q_x(z_N) = 0, \quad (31)$$

$$V(z_1) = 0, \quad \frac{\partial V(z_1)}{\partial z} = 0, \quad M_x(z_N) = 0, \quad Q_x(z_N) = 0.$$

Система уравнений (27) имеет ненулевое решение только при условии равенства нулю детерминанта матрицы **A** [20]:

$$\det[A_{ij}] = 0. \quad (32)$$

Решая уравнение (32), определим частоты собственных колебаний ω естественно закрученного стержня.

ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Рассматривается стержень, жестко закрепленный на конце при $z = 0$, имеющий длину $l = 0,2$ м и прямоугольное поперечное сечение с размерами $b = 2 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 3 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 1).

$$\left\{ \begin{aligned} I_\xi &= \frac{bh^3}{2} = 4,5 \cdot 10^{-11} \text{ м}^4, \\ I_\eta &= \frac{hb^3}{2} = 2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3, \quad I_{\xi\eta} = 0 \end{aligned} \right. \quad (33)$$

Моменты инерции данного поперечного сечения относительно его главных центральных осей ξ, η :

$$\mu = \rho A = \rho bh = 0,471 \text{ кг/м}. \quad (34)$$

Угол ориентировки поперечного сечения α изменяется вдоль оси Z по линейному закону:

$$\alpha = \gamma z \quad \text{при} \quad \gamma = \Delta\alpha / l, \quad (35)$$

где $\Delta\alpha$ – угол закручивания стержня на его полной длине (рис. 2).

Моменты инерции сечений стержня относительно глобальных координатных осей X, Y определяются выражениями [3]:

$$\left\{ \begin{aligned} I_x &= I_\xi \cos^2 \alpha + I_{\xi\eta} \sin 2\alpha + I_\eta \sin^2 \alpha, \\ I_y &= I_\xi \sin^2 \alpha - I_{\xi\eta} \sin 2\alpha + I_\eta \cos^2 \alpha, \\ I_{xy} &= I_{\xi\eta} \cos 2\alpha + \frac{I_\eta - I_\xi}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right. \quad (36)$$

При дифференцировании (36) по z с учетом (35), определяются выражения для вычисления значений производных $\partial I_x / \partial z, \partial I_y / \partial z, \partial I_{xy} / \partial z, \partial^2 I_x / \partial z^2, \partial^2 I_y / \partial z^2, \partial^2 I_{xy} / \partial z^2$, необходимые для уравнения (13)(15).

Таким образом, имеется вся необходимая информация для конкретизации системы из двух дифференциальных уравнений (15) и остается только воспользоваться предложенным численным методом и вычислить частоты собственных колебаний при различных углах закрученности $\Delta\alpha$ для различных форм колебаний.

Были выполнены расчеты первых пяти частот собственных колебаний при значениях углов закрученности: $\Delta\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$. Результаты представлены в форме графических зависимостей частот собственных колебаний ω от угла закрученности $\Delta\alpha$ для первых шести форм колебаний на рис. 2.

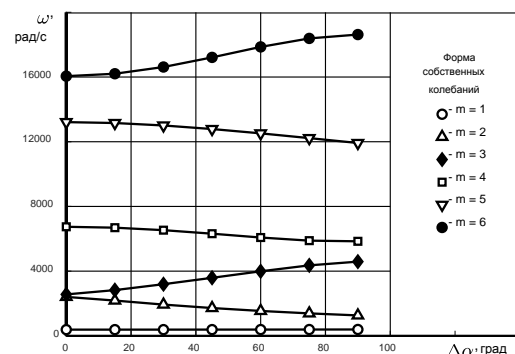


Рис. 2. Графики зависимости частот собственных колебаний ω от угла закрученности $\Delta\alpha$

Из рис. 2 видно, что закрутка стержня существенно влияет на спектр частот собственных изгибных колебаний стержня, и поэтому можно утверждать, что предлагае-

мая расчетная методика может быть полезна при проектировании компрессорных и турбинных лопаток реальных ГТД, которые можно рассматривать как естественно закрученные стержни.

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЕТА СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ

Точность предлагаемой методики оценим на тестовой задаче, имеющей точное аналитическое решение.

Для этого рассмотрим прямой стержень длиной l , жестко закрепленный концом $z=0$ и свободный на конце $z=l$ при угле закрученности $\Delta\alpha=0$.

Круговые частоты собственных колебаний ω_m для рассматриваемого стержня колебаний определяются формулой [4]:

$$\begin{cases} \omega_m^{(x)} = \frac{\xi_m^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_x}{\mu}}, m=1,2,\dots, \\ \omega_m^{(y)} = \frac{\xi_m^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\mu}}, m=1,2,\dots, \end{cases} \quad (37)$$

где $\omega_m^{(x)}$ – круговые частоты собственных колебаний в плоскости минимальной жесткости YZ при повороте поперечных сечений относительно оси X ; $\omega_m^{(y)}$ – круговые частоты собственных колебаний в плоскости максимальной жесткости XZ при повороте поперечных сечений относительно оси Y ; ξ_m – корни трансцендентного уравнения:

$$\cos \xi \operatorname{ch} \xi + 1 = 0. \quad (38)$$

Первые десять корней ξ_m трансцендентного уравнения (38) и рассчитанные на их основе круговые частоты собственных колебаний $\omega_m^{(x)}$ и $\omega_m^{(y)}$ сведены в табл. 1.

Рассматривая частоты собственных колебаний $\omega_m^{(x)}$ и $\omega_m^{(y)}$ как единый массив, выберем в порядке возрастания из табл. 1 первые шесть точных значений круговых частот собственных колебаний стержня, дадим им обозначение $\omega_m^{(r)}$ и занесем их во вторую колонку табл. 2. При этом частоты собственных колебаний в плоскости наивысшей жесткости XZ выделим в табл. 2 жирным цветом.

Таблица 1

Частоты собственных колебаний $\omega_m^{(x)}$ и $\omega_m^{(y)}$ в плоскостях минимальной и максимальной жесткостей

| Форма колебаний m | Корень трансцендентного уравнения ξ_m | Частоты колебаний в плоскости YZ $\omega_m^{(x)}$, рад/с | Частоты колебаний в плоскости XZ $\omega_m^{(y)}$, рад/с |
|---------------------|---|---|---|
| 1 | 1,875104068711961 | 384,2391051264228 | 2561,594034176152 |
| 2 | 4,694091132974174 | 2407,985368145140 | 16053,23578763426 |
| 3 | 7,854757438237613 | 6742,428756621345 | 44949,52504414229 |
| 4 | 10,99554073487547 | 13212,46936786613 | 88083,12911910751 |
| 5 | 14,13716839104647 | 21841,15856693261 | 145607,7237795507 |

Таблица 2

Относительная погрешность расчетов точных и расчетных значений собственных колебаний

| Форма колебаний m | Точные частоты собственных колебаний $\omega_m^{(r)}$, рад/с | Расчетные частоты собственных колебаний $\omega_m^{(p)}$, рад/с | Относительная погрешность $\delta_m = \left \frac{\omega_m^{(r)} - \omega_m^{(p)}}{\omega_m^{(r)}} \right $ |
|---------------------|---|--|--|
| 1 | 384,2391051264228 | 384,2390667123950 | $9,997 \cdot 10^{-8}$ |
| 2 | 2407,985368145140 | 2407,990493909559 | $2,129 \cdot 10^{-6}$ |
| 3 | 2561,594034176152 | 2561,590196059621 | $1,498 \cdot 10^{-6}$ |
| 4 | 6742,428756621345 | 6742,477948724067 | $7,296 \cdot 10^{-6}$ |
| 5 | 13212,46936786613 | 13212,67710315854 | $1,572 \cdot 10^{-5}$ |
| 6 | 16053,23578763426 | 16053,26951511228 | $2,101 \cdot 10^{-6}$ |

В третью колонку табл. 2 занесем расчетные значения $\omega_m^{(p)}$ частот собственных колебаний, полученные по предлагаемой методике.

Для оценки точности реализуемого численного метода вычислим относительную погрешность расчетов:

$$\delta_m = \left| \frac{\omega_m^{(r)} - \omega_m^{(p)}}{\omega_m^{(r)}} \right|. \quad (38)$$

Из табл. 2 видно, что относительная погрешность расчетов при первых шести формах колебаний не превышает $1,572 \cdot 10^{-5}$, т.е. при определении собственных частот точными являются не менее пяти значащих цифр, что свидетельствует о высокой точности предлагаемого численного вычисления собственных частот колебаний метода.

АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТЕЙ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОТ УГЛА ЗАКРУЧЕННОСТИ СТЕРЖНЯ

Из рис. 2 видно, что при первой форме колебаний $m=1$ угол закрученности $\Delta\alpha$ слабо влияет на частоты собственных колебаний. Оценим количественно это влияние. Для этого, имея для первой формы колебаний ($m=1$) при $\Delta\alpha=0$ расчетное значение частоты $\omega_{\alpha=0}^{(p)} = 384,2390667123950$, а при угле закрученности $\Delta\alpha = \pi/2 = 90^\circ$ значение частоты $\omega_{\alpha=\pi/2}^{(p)} = 393,8605638755794$, вычислим их расхождение:

$$\delta_\alpha = \frac{\omega_{\alpha=\pi/2}^{(p)} - \omega_{\alpha=0}^{(p)}}{\omega_{\alpha=\pi/2}^{(p)}} = 2,44 \cdot 10^{-2} = 2,44 \% . \quad (39)$$

Получили малое расхождение частот собственных колебаний $\delta_\alpha < 3\%$. На основе этого делаем вывод, что угол закрученности практически не влияет на круговую частоту собственных колебаний при первой форме колебаний.

При остальных формах колебаний наблюдается существенное влияние угла $\Delta\alpha$ на частоты собственных колебаний (рис. 2).

Так, в формах колебаний $m=2, 4, 5$ частоты собственных колебаний с увеличением $\Delta\alpha$ уменьшаются (не закрашенные маркеры точек) (рис. 2), а при формах колеба-

ний $m=3, 6$ частоты собственных колебаний увеличиваются (закрашенные маркеры точек) (рис. 2).

При этом обращаем внимание на то, что при формах колебаний $m=2, 4, 5$ мы анализируем колебания стержня, у которого при начальном угле закручивания $\Delta\alpha=0$ изгибные колебания осуществляются в плоскости наименьшей жесткости YZ , а далее при увеличении $\Delta\alpha$ мы поворачиваем поперечные сечения стержня, изменяя его жесткостные характеристики.

При формах колебаний $m=3, 6$ мы анализируем колебания стержня, у которого при начальном угле закручивания $\Delta\alpha=0$ изгибные колебания осуществляются в плоскости наивысшей жесткости XZ , а далее при увеличении $\Delta\alpha$ мы изменяем жесткостные характеристики стержня, поворачивая его поперечные сечения.

ВЫВОДЫ

Предложена методика расчета частот собственных изгибных колебаний естественно закрученного стержня, включающая в себя:

- построение системы дифференциальных уравнений, описывающих пространственные изгибные колебания естественно закрученного стержня;
- разработку численного метода решения системы дифференциальных уравнений пространственных колебаний естественно закрученного стержня на основе метода сплайнов пятой степени;
- компьютерную реализацию методики решения задачи о пространственных колебаниях естественно закрученного стержня с получением конкретных результатов, показывающих существенную зависимость частот собственных колебаний от углов закрученности стержня.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биргер И. А. Прочность и надежность машиностроительных конструкций. Уфа, 1988. 350 с. [I. A. Birger, *Strength and reliability of engineering structures*, (in Russian). Ufa, 1988.]
2. Биргер И. А., Шор Б. Ф., Иоселевич Г. Б. Расчет на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 702 с. [I. A. Birger, B. F. Shore, G. B. Ioselevich, *Strength calculation of machine parts*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie-priborostroenie, 1979.]

3. **Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.** Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с. [I. A. Birger, R. R. Mavlyutov, *Resistance of materials*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1986.]
4. **Бабakov И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. [I. M. Babakov, *Teoriya kolebanij (Oscillation theory)*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1965.]
5. **Tong X., Tabarrok B.** Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section. // *Journal of Sound and Vibration*. 1995. № 186 (5). Pp. 821-835. [X. Tong, B. Tabarrok, "Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section", in *Journal of Sound and Vibration*, no. 186 (5), pp. 821-835, 1995.]
6. **Ece M. C., Aydogdu M., Taskin V.** Vibration of a variable cross-section beam // *Mechanics Research Communications*. 2007. No. 34. Pp. 78-84. [M. C. Ece, M. Aydogdu, V. Taskin, "Vibration of variable cross-section beam", in *Mechanics Research Communications*, no. 34, pp. 78-84, 2007.]
7. **Elishakoff, Livshits D.** Some closed form solutions in random vibrations of Timoshenko beams // *Journal of Probabilistic Engineering Mechanics*. 1989. № 4. Pp. 49-54. [Elishakoff, D. Livshits, "Some closed form solutions in random vibrations of Timoshenko beams", in *Journal of Probabilistic Engineering Mechanics*. No. 4. Pp. 49-54, 1989.]
8. **Cranch E. T., Adler A. A.** Bending vibration of variable section beams // *Journal of Applied Mechanics*. American Society of Mechanical Engineers. 1956. No. 23 (1). Pp. 103-108. [E. T. Cranch, A. A. Adler, "Bending vibration of variable section beams" in *Journal of Applied Mechanics*. American Society of Mechanical Engineers, no. 23 (1), pp. 103-108, 1956.]
9. **Attarnejad R., Manavi N. and Farsad A.** Exact solution for the free vibration of a tapered beam with elastic end rotational restraints / Liu GR, Tan VBC and Han X (eds) // *Computational Methods*. Netherlands: Springer. 2006. Pp. 1993-2003. [R. Attarnejad, N. Manavi and A. Farsad, "Exact solution for the free vibration of a tapered beam with elastic end rotational restraints", in *Computational Methods*, pp. 1993-2003, 2006.]
10. **Hadji L., Daouadji T. H., Tounsi A.** A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam // *Steel and Composite Structures*, no. 16 (5). Pp. 507-519. [L. Hadji, T. H. Daouadji, A. Tounsi, "A higher order shear deformation theory for static and free vibration of FGM beam", in *Steel and Composite Structures*, no. 16 (5), pp. 507-519.]
11. **Ibrahim S. M., Alsayed S. H., Abbas H.** Free vibration of tapered beams and plates based on unified beam theory // *Journal of Vibration and Control*. 2013. Pp. 2450-2463. [S. M. Ibrahim, S. H. Alsayed, H. Abbas, "Free vibration of tapered beams and plates based on unified beam theory", in *Journal of Vibration and Control*, pp. 2450-2463, 2011.]
12. **Rezaiee-Pajand M. and Masoodi A. R.** Exact natural frequencies and buckling load of functionally graded material tapered beam-columns considering semi-rigid connections // *Journal of Vibration and Control* In press. 2016. [M. Rezaiee-Pajand and A. R. Masoodi, "Exact natural frequencies and buckling load of functionally graded material tapered beam-columns considering semi-rigid connections", in *Journal of Vibration and Control* In press, 2016.]
13. **Коллатц Л.** Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с. [Collatz L., *Tasks on your own values*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1968.]
14. **Павлов В. П.** Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа: Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2003. 197 с. [V. P. Pavlov, *Method of spline and other numerical me-ODS for solving one-dimensional problems of mechanical deformiroemah solids*, (in Russian). UGATU, 2003.]
15. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** The Enhanced Spline-Method for Numerical Results of Natural Frequencies of Beams // *Procedia Engineering (International Conference "Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM2016))*. 2017. Vol. 176. Pp. 438-450. [V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "The Enhanced Spline-Method for Numerical Results of Natural Frequencies of Beams", in *Procedia Engineering of the International Conference "Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM2016)*, vol. 176, pp. 438-450, 2017.]
16. **Kudoyarova V. M., Pavlov V. P.** The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate // *Procedia Engineering, 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016)*. 2016. Vol. 150. Pp. 1419-1426. [V. M. Kudoyarova, V. P. Pavlov, "The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate", in *Procedia Engineering of the 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016)*, vol. 150, pp. 1419-1426, 2016.]
17. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** Spline-Method for Numerical Calculation of Natural-Vibration Frequency of Beam with Variable Cross-Section // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. Pp. 710-715. [V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "Spline-Method for Numerical Calculation of Natural-Vibration Frequency of Beam with Variable Cross-Section", in *Procedia Engineering*, vol. 206, pp. 710-715, 2017.]
18. **Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** Spline Based Numerical Method for Heat Conduction Nonlinear Problems Solution // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. Pp. 704-709. [V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "Spline Based Numerical Method for Heat Conduction Nonlinear Problems Solution", in *Procedia Engineering*, vol. 206, pp. 704-709, 2017.]
19. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** Deformation of Thin Elastic Rod Under Large Deflections // *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering*. ICIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2018. Pp. 185-196. [V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "Deformation of Thin Elastic Rod Under Large Deflections", in *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering*, ICIE 2018, Lecture Notes in Mechanical Engineering, Springer, Cham, pp. 185-196, 2018.]
20. **Wilkinson J. H.** Algebraichesкая проблема sobstvennykh znachenij (Algebraic Eigenvalue Problem). Moscow: Nauka, 1970. 564 p.

ОБ АВТОРАХ

ПАВЛОВ Виктор Павлович, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

НУСРАТУЛЛИНА Лилия Ринатовна, старш. препод. каф. математики, дипл. математик (БашГУ, 2003). Готовит дис. о колебаниях естественно закрученных стержней с переменным сечением.

METADATA

Title: Natural bending vibrations of naturally twisted rod.

Authors: V. P. Pavlov¹, L. R. Nusratullina²

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: ¹victor.pavlov.51@yandex.ru, ²mardliliya@yandex.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 23, no. 4 (86), pp. 33-41, 2019. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The paper presents a method of numerical calculation of natural oscillation frequencies of a naturally twisted rod, considered as the first approximation of the model of real blades of gas turbine engines (GTE). The method is based on the fifth-degree spline method developed by the authors, which allows to solve very accurately the fourth-order differential equations arising in the problems of transverse vibrations of rods. In contrast to the known works, where bending vibrations are considered only in one plane, these studies are focused on the study of a more complex process of oscillations in the spatial bending of the rod.

Key words: naturally twisted rod; spline method; natural oscillations, spatial bending of the rod.

About authors:

PAVLOV, Victor Pavlovich, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).

NUSRATULLINA, Liliya Rinatovna, Senior teacher of the chair Mathematics, specialist in mathematics (BSU, 2003).