

УДК 536.21

## АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ МЕТОДОМ СПЛАЙНОВ

В. П. Павлов<sup>1</sup>, В. М. Кудоярова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>victor.pavlov.51@yandex.ru, <sup>2</sup>kudoyarova@inbox.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 21.05.2018

**Аннотация.** В инженерной практике часто приходится рассчитывать нестационарное температурное поле в плоской стенке. Для решения таких задач в данной статье разработан сплайн-метод степени 3 дефекта 1, позволяющий моделировать процесс теплопроводности для бесконечно протяженной пластины. Рассматривались два типа задач при зависящих от температуры теплофизических свойствах материала и при заданных нелинейных краевых условиях первого рода на границах пластины. Для оценки точности решения уравнения теплопроводности методом сплайнов были решены эталонные задачи, имеющие точные аналитические решения. Показано, что использование метода сплайнов позволяет получить решения задач нестационарной теплопроводности с относительной погрешностью не более  $1 \cdot 10^{-5}$ .

**Ключевые слова:** сплайны; моделирование; численные методы; нестационарная теплопроводность; нелинейные дифференциальные уравнения теплопроводности.

### ВВЕДЕНИЕ

Для оценки работоспособности конструкции, работающей в условиях нагрева, необходимо знать возникающее в ней температурное поле. Его можно изучить экспериментально или определить при решении уравнения теплопроводности. Экспериментальный метод является весьма трудоемким, и не всегда имеется возможность его реализовать. Поэтому в большинстве случаев температурное поле определяется расчетным путем [1–5]. При этом важным является выбор соответствующего математического аппарата: аналитические методы, метод конечных разностей, метод конечных элементов и др.

Теплопроводность в твердых телах описывается уравнениями в частных производных [1, 2], которые зачастую невозможно решить аналитически. Поэтому представляется перспективным применить для реше-

ния задач теплопроводности метод сплайнов, который показывает высокую эффективность при решении дифференциальных уравнений, имеющих место в механике деформируемого твердого тела [6–12].

Для оценки точности численного метода расчета температурных полей на основе сплайнов можно решать тестовые задачи теплопроводности, имеющие точное аналитическое решение, и анализировать количество точных значащих цифр, полученных при численном решении. Такой подход позволяет в данной статье количественно оценивать точности численного метода сплайнов при решении задач теплопроводности.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В реальных тепловых процессах температура на поверхности твердого тела часто изменяется во времени под влиянием различных факторов. Кроме того, в реальных

материалах коэффициент теплопроводности  $\lambda$  и удельной объемной теплоемкости  $c$  являются функциями температуры и температурное поле описывается нелинейным дифференциальным уравнением.

В связи с этим, в данной работе решалась решалась 2 типа задач:

- **краевая** задача нестационарной теплопроводности с заданными нелинейными начальными и граничными условиями первого рода при не зависящих от времени и температуры коэффициентах теплопроводности  $\lambda$  и удельной объемной теплоемкости  $c$ :  $\lambda = \text{const}$ ,  $c = \text{const}$  (задача 1-го типа);

- **краевая** задача нестационарной теплопроводности с заданными нелинейными начальными и граничными условиями первого рода при коэффициентах теплопроводности  $\lambda$  и удельной объемной теплоемкости  $c$ , являющихся функциями температуры:  $\lambda = \lambda(T)$ ,  $c = c(T)$  (задача 2-го типа).

В общем виде дифференциальное уравнение теплопроводности при отсутствии внутренних источников тепла имеет вид [2]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $x$  – координата точки;  $T = T(t, x)$  – функция, описывающая изменение температуры по времени  $t$  и координате  $x$ ;  $\rho$  – плотность материала;  $c$  – удельная теплоемкость материала;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала вдоль координатной оси  $X$ .

В данной работе оценим точность решения уравнения (1) методом сплайнов степени 3 дефекта 1, сопоставляя численной решение с точным аналитическим решением тестовой задачи для двух случаев, описанных выше.

### ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА СПЛАЙНОВ

Основы метода сплайнов применительно к задачам о деформировании твердых тел изложены в работе [6–12].

Одной из основных особенностей сплайна степени 3 дефекта 1 является непрерывность вторых производных сплайн-функции  $W_{3,1}(x)$  во всех точках из области

определения, что весьма желательно при решении дифференциального уравнения теплопроводности (1), где присутствует вторая производная  $\partial^2 T / \partial x^2$ . В этом заключается преимущество метода сплайнов по сравнению с методом конечных разностей и методом конечных элементов, где не обеспечивается непрерывность вторых производных.

При построении сплайна степени 3 дефекта 1 [6] на отрезке  $[a, b]$  формируется сетка  $\Delta_x$ , имеющая  $N_x$  узлов:

$$\Delta_x: a = x_1 < x_2 < \dots < x_{N_x} = b. \quad (2)$$

На данной сетке строится сплайн-функция  $W_{3,1}(x)$  степени 3 дефекта 1, имеющая  $N_s = N_x + 2$  степеней свободы.

В пределах каждого отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N_x - 1$  сплайн-функция  $W_{3,1}(x)$  является многочленом третьей степени

$$\begin{cases} W_{3,1}(x) = \sum_{\alpha=0}^3 a_{\alpha}^{(i)} (x - x_i)^{\alpha}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N_x - 1. \end{cases} \quad (3)$$

Согласно [6] параметры, определяющие сплайн, сведем в вектор-столбец  $Q$  из  $N_s = N_x + 2$  параметров сплайна:

$$Q = (q_k, k = 1, 2, \dots, N_x + 2)^T, \quad (4)$$

где

$$\begin{cases} q_1 = W_{3,1}(x_1), \quad q_2 = \frac{dW_{3,1}(x_1)}{dx}, \\ \left\{ \begin{aligned} q_{i+2} &= \frac{d^2 W_{3,1}(x_i)}{dx^2}, \quad i = 1, \dots, N_x. \end{aligned} \right. \end{cases} \quad (5)$$

Число компонент вектора  $Q$  равно числу степеней свободы сплайна.

Из узловых значений сплайн-функции  $W_{3,1}(x)$  и ее производных в узлах выбранной сетки  $\Delta$  сформируем векторы-столбцы:

$$\begin{cases} V_f = (W_{3,1}(x_i), i = \overline{1, N_x})^T, \\ V_{df} = (dW_{3,1}(x_i)/dx, i = \overline{1, N_x})^T, \\ V_{d^2f} = (d^2 W_{3,1}(x_i)/dx^2, i = \overline{1, N_x})^T. \end{cases} \quad (6)$$

Данные векторы определим согласно [6] матричными выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_f &= \mathbf{M}_f \mathbf{Q}, & \mathbf{V}_{df} &= \mathbf{M}_{df} \mathbf{Q}, \\ \mathbf{V}_{d2f} &= \mathbf{M}_{d2f} \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mathbf{M}_f, \mathbf{M}_{df}, \mathbf{M}_{d2f}$  – прямоугольные матрицы размера  $N \times (N+2)$ , формируемые по методике, изложенной в [6].

#### ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА 1-ГО ТИПА И ЕЕ ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ПРИ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ СПЛАЙНОВ

Оценка точности предлагаемого метода сплайнов выполнялась при решении тестовой задачи, имеющей точное решение. При этом рассматривалась неограниченная плоская стенка толщиной  $H$ , поверхности которой имеют координаты  $x = 0$  и  $x = H$  (рис. 1).

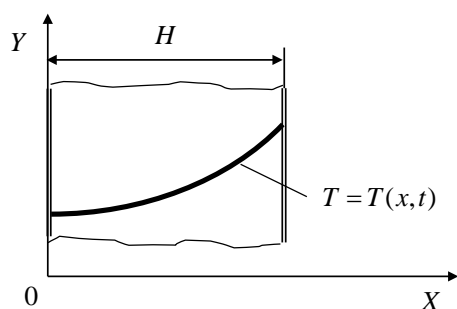


Рис. 1. Температурное поле в плоской стенке

Частное точное решение уравнения (1) отыскивается в виде:

$$T = e^{-\mu^2 a^2 t} (A \cos \mu x + B \sin \mu x), \quad (8)$$

где

$$\mu = \text{const}, A = \text{const}, B = \text{const}. \quad (9)$$

Для проверки пригодности выражения (8) в качестве точного решения дифференциального уравнения (1) вычислим производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = -\mu^2 a^2 e^{-\mu^2 a^2 t} (A \cos \mu x + B \sin \mu x), \\ \frac{\partial T}{\partial x} = e^{-\mu^2 a^2 t} (-\mu A \sin \mu x + \mu B \cos \mu x), \\ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = e^{-\mu^2 a^2 t} (-\mu^2 A \cos \mu x - \mu^2 B \sin \mu x). \end{cases} \quad (10)$$

При подстановке (10) в (1) получается тождество, которое свидетельствует о спра-

ведливости принятия выражения (8) в качестве частного решения дифференциального уравнения (1).

Для конкретизации задачи принимаем, что пластина изготовлена из стеклопластика, имеющего следующие теплофизические свойства: плотность  $\rho = 0,9 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент теплопроводности материала  $\lambda = 0,128$  Вт/м·К, удельная теплоемкость  $c = 1,93 \cdot 10^3$  Дж/кг·К.

Для данных характеристик материала вычисляется величина  $a^2$ :

$$a^2 = \lambda / (c\rho) = 7,37 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}. \quad (11)$$

Зададим коэффициент  $\mu = 50\pi$ .

Для выбранных коэффициентов на основе (8) задаются нелинейные краевые условия при  $x_0 = 0$  и  $x_N = H = 0,01$  м:

$$\begin{cases} T_0 = e^{-\mu^2 a^2 t} (A \cos \mu x_0 + B \sin \mu x_0) = \\ = A e^{-\mu^2 a^2 t}, \\ T_N = e^{-\mu^2 a^2 t} (A \cos \mu x_N + B \sin \mu x_N) = \\ = e^{-\mu^2 a^2 t} \left( A \cos \frac{\pi}{2} + B \sin \frac{\pi}{2} \right) = B e^{-\mu^2 a^2 t}. \end{cases} \quad (12)$$

На основе (8) уравнение начальных условий при  $t = 0$  принимает вид:

$$T^{(0)} = A \cos 50\pi x + B \sin 50\pi x. \quad (13)$$

Задав  $A = 500$ ,  $B = 100$  и конечное время расчетов  $t_k = 1000$  с, построим на рис. 2 графики точных функций изменения температуры по толщине материала стенки (12) и (13) для расчетных моментов времени  $t = 0, 200, 400, 600, 800, 1000$  с. График изменения температуры при начальном времени  $t = 0$  определяет начальные условия решаемой задачи.

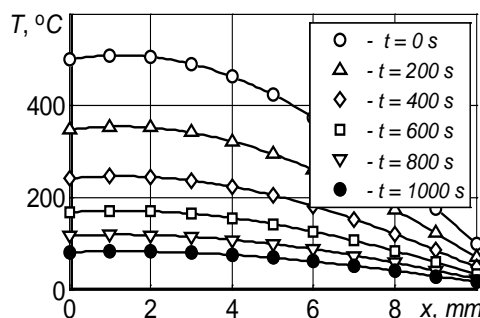


Рис. 2. Изменение температуры по толщине стенки

На рис. 3 представим графики изменения температуры на границах стенки при  $x_0 = 0$  и  $x_N = H$ , определяющие краевые условия задачи.

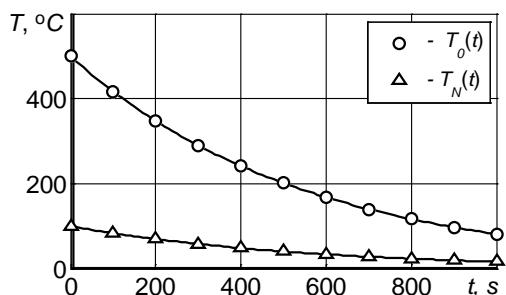


Рис. 3. Изменение температуры во времени на поверхностях стенки

Запишем дискретный аналог данного уравнения теплопроводности при решении методом сплайнов.

Традиционно при решении задачи нестационарной теплопроводности применяется пошаговый метод расчета, в котором формируется прямоугольная матрица  $T$  расчетных температур размера  $N_x \times M_t$ :

$$T = T_n^{(m)}, \quad n = 1, \dots, N_x, \quad m = 1, \dots, M_t, \quad (14)$$

где  $N_x$  — число узлов вдоль координатной оси  $X$ ;  $M_t$  — число узлов вдоль временной оси  $t$ .

На первом шаге температуры  $T_n^{(1)}, n = 1, \dots, N_x$  определяются уравнением начальных условий (13). На втором и последующих шагах ( $m = 2, \dots, M_t$ ) строится дискретный аналог дифференциального уравнения (1) при уже найденных на предыдущем шаге температурах  $T_n^{(m-1)}, n = 1, \dots, N_x$ .

При формировании дискретного аналога уравнения теплопроводности (5) первые производные  $\partial T / \partial x$  в узлах  $x_n$  заменим их разностными аналогами:

$$\frac{\partial T(x_n)}{\partial t} \cong \frac{T_n^{(m)} - T_n^{(m-1)}}{\Delta_t}, \quad n = 1, \dots, N_x. \quad (15)$$

Сформируем векторы из пока неизвестных  $T_n^{(m-1)}, n = 1, \dots, N_x$  и уже определенных на предыдущем  $m-1$  шаге значений  $\tilde{T}_n^{(m-1)}, n = 1, \dots, N_x$  температур:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_T = (T_n^{(m)}, \quad n = 1, \dots, N_x), \\ \mathbf{V}_T^{(m-1)} = (T_n^{(m-1)}, \quad n = 1, \dots, N_x). \end{cases} \quad (16)$$

На основе (7) определим вектор  $\mathbf{V}_T$  матричным выражением:

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{M}_f \mathbf{Q}. \quad (17)$$

Сформируем вектор  $\mathbf{V}_{\partial^2 T}$  из значений вторых производных функции температуры  $T = T(x, t)$  по координате  $x$  в узлах  $x_n, n = 1, \dots, N_x$  для момента времени  $t_m$ :

$$\mathbf{V}_{\partial^2 T} = \left( \frac{\partial^2(x_n, t_m)}{\partial x^2}, \quad n = 1, \dots, N_x \right). \quad (18)$$

На основе (7) определим вектор  $\mathbf{V}_{\partial^2 T}$  матричным выражением:

$$\mathbf{V}_{\partial^2 T} = \mathbf{M}_{d2f} \mathbf{Q}. \quad (19)$$

С учетом (15)–(19) разностный аналог уравнения теплопроводности (1) принимает вид:

$$\frac{1}{\Delta_t} \mathbf{M}_f \mathbf{Q} - a^2 \mathbf{M}_{d2f} \mathbf{Q} = \frac{1}{\Delta_t} \mathbf{V}_T^{(m-1)}. \quad (20)$$

Система (20) содержит  $N_x$  уравнений с  $N_x + 2$  неизвестными. Дополним ее двумя уравнениями, учитывающими краевые условия:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{N_x} M_{1,k}^f q_k = T_1^{(m)}, \\ \sum_{k=1}^{N_x} M_{2,k}^f q_k = T_{N_x}^{(m)}. \end{cases} \quad (21)$$

В итоге (20) и (21) образуют систему из  $N_x + 2$  уравнений с  $N_x + 2$  неизвестными, из решения которой находим значения температур  $T_n^{(m)}, n = 1, \dots, N_x$  для временного слоя  $m$ . Далее подобные вычисления выполняются для следующего момента времени  $t_m$ .

### ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА 2-ГО ТИПА И ЕЕ ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ ПРИ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ СПЛАЙНОВ

Для тестовой задачи выбираем следующие исходные данные: толщина пластины  $h = 10 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ , границы пластины

имеют координаты  $x_0 = 0$ ,  $x_N = h$ ; начальное и конечное время процесса теплопроводности  $t_0 = 0$  с,  $t_M = 1000$  с; параметр температурного поля  $a = 60^\circ\text{C}$ .

Зададим функции  $\lambda = \lambda(T)$ ,  $C = C(T)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \lambda &= r + s \ln(k_T T), \\ C &= k^2 (r + s + s \ln(k_T T)) / m, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $m = 3 \cdot 10^{-3}$  1/с,  $k = -80$  1/М,  $r = 0,02$  Вт/(М $^\circ\text{C}$ ),  $s = 0,1$  Вт/(М $^\circ\text{C}$ ),  $k_T = 1$  1/ $^\circ\text{C}$  – некоторые постоянные коэффициенты.

Решение уравнения (1) ищем в виде:

$$T = a e^{kx} e^{mt}, \quad a = \text{const}. \quad (23)$$

Для выбранных параметров по формуле (23) рассчитано температурное поле, которое в форме графических зависимостей температуры  $T$  от координаты  $x$  для ряда расчетных моментов времени представлено на рис. 4.

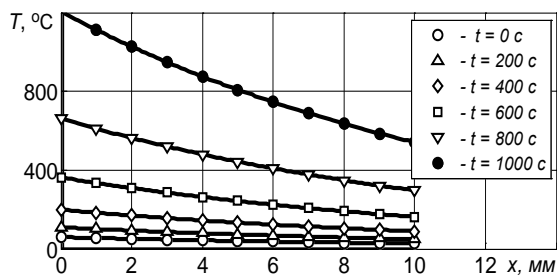


Рис. 4. Графики изменения температуры  $T$  по толщине пластины  $x$  в различные моменты времени  $t$

На рис. 5 представлены графики изменения температуры на левой  $T_0(t)$  и правой  $T_N(t)$  границах пластины.

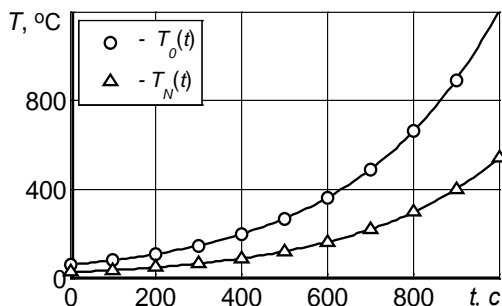


Рис. 5. Графики изменения температуры  $T$  на границах пластины: при  $x = 0$  зависимость  $T_0(t)$ ; при  $x = h$  зависимость  $T_N(t)$

Решая задачу нестационарной теплопроводности 2-го типа по аналогии с решением задачи теплопроводности 1-го типа, применим пошаговый метод расчета и из расчетных значений температуры сформируем матрицу (15). Затем сформируем векторы-столбцы температур в соответствии с (16) и определим вектор  $V_T$  матричным выражением (17).

На основе (15) сформируем вектор производных температуры по времени:

$$V_{\partial T \partial t} = \left( \frac{T_n^{(m)} - T_n^{(m-1)}}{\Delta_t}, n = \overline{1, N_x} \right)^T \quad (24)$$

и определим его матричным выражением

$$\begin{aligned} V_{\partial T \partial t} &= \frac{1}{\Delta_t} V_T - \frac{1}{\Delta_t} V_T^{(m-1)} = \\ &= \frac{1}{\Delta_t} M_f Q - \frac{1}{\Delta_t} V_T^{(m-1)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Сформируем векторы-столбцы  $V_{\partial T \partial x}$  и  $V_{\partial^2 T \partial x^2}$  из значений первых и вторых производных функции температуры по координате  $x$  в узлах  $x_n$ ,  $n = \overline{1, \dots, N_x}$  для момента времени  $t_m$ :

$$\begin{aligned} V_{\partial T \partial x} &= \left( \frac{\partial T(x_n, t_m)}{\partial x}, n = \overline{1, N_x} \right)^T, \\ V_{\partial^2 T \partial x^2} &= \left( \frac{\partial^2 T(x_n, t_m)}{\partial x^2}, n = \overline{1, N_x} \right)^T. \end{aligned} \quad (26)$$

На основе (7) определим векторы  $V_{\partial T \partial x}$  и  $V_{\partial^2 T \partial x^2}$  матричными выражениями:

$$V_{\partial T \partial x} = M_{df} Q \quad V_{\partial^2 T \partial x^2} = M_{d2f} Q. \quad (27)$$

По уже определенным на предыдущем  $m-1$  шаге значениям температур  $T_n^{(m-1)}$ ,  $n = \overline{1, \dots, N_x}$  и вычислим соответствующие им значения коэффициента теплопроводности  $\lambda$ , его производной  $\partial \lambda / \partial x$  по координате  $x$  и удельной объемной теплоемкости  $C$ , а затем сформируем на их основе диагональные квадратные матрицы размера  $(N_x \times N_x)$ .

$$\begin{aligned} J_\lambda &\equiv [J_{ns}^\lambda], \\ \text{где } J_{ns}^\lambda &= \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq s, \\ \lambda(T_n^{(m-1)}), & \text{если } n = s, \end{cases} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\mathbf{J}_{\partial\lambda} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ns}^{\partial\lambda} \end{bmatrix},$$

где 
$$\mathbf{J}_{ns}^{\partial\lambda} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq s, \\ \partial\lambda(T_n^{(m-1)}) / \partial x, & \text{если } n = s, \end{cases} \quad (29)$$

$$\mathbf{J}_C \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{ns}^C \end{bmatrix},$$

где 
$$\mathbf{J}_{ns}^C = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq s, \\ C(T_n^{(m-1)}), & \text{если } n = s, \end{cases} \quad (30)$$

На основе (25)–(30) построим дискретный аналог уравнения теплопроводности (1):

$$\mathbf{J}_\lambda \mathbf{V}_{d2T\partial x^2} + \mathbf{J}_{\partial\lambda\partial x} \mathbf{V}_{\partial T\partial x} - \mathbf{J}_C \mathbf{V}_{\partial T\partial t} = 0. \quad (31)$$

С учетом (25) и (27) уравнение (31) принимает вид:

$$\left( \mathbf{J}_\lambda \mathbf{M}_{d2f} + \mathbf{J}_{\partial\lambda\partial x} \mathbf{M}_{df} - \frac{1}{\Delta_t} \mathbf{J}_C \mathbf{M}_f \right) \mathbf{Q} = -\frac{1}{\Delta_t} \mathbf{J}_C \mathbf{V}_T^{(m-1)}. \quad (32)$$

При решении конкретной задачи теплопроводности система (32), содержащая  $N_x$  уравнений, дополняется еще системой из двух уравнений, учитывающих конкретные краевые условия:

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{B}, \quad (33)$$

где  $\mathbf{A}$  – прямоугольная матрица размера  $2 \times (N_x + 4)$  с компонентами, определяемыми на основе матрицы  $\mathbf{M}_f$ :

$$A_{1,n} = M_{1,m}^f, \quad A_{2,n} = M_{N_x,m}^f, \quad n = 1, \dots, N_x + 4; \quad (34)$$

$\mathbf{B}$  – вектор размера  $2 \times 1$ , компоненты которого определяются заданными значениями температуры на границах пластины в момент времени  $t_m$ :  $B_{1,1} = T_1^{(m)}$  и  $B_{2,1} = T_{N_x}^{(m)}$ .

В итоге (32) и (33) вместе образуют систему из  $N_x + 2$  уравнений с  $N_x + 2$  неизвестными, решением которой являются температуры  $T_n^{(m)}$ ,  $n = 1, \dots, N_x$  для временного слоя  $m$ . Далее подобные вычисления выполняются и для следующего момента времени.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

На основе метода сплайнов решены сформированные выше тестовые задачи 1-го и 2-го типа, имеющие точные решения.

Для оценки погрешности метода сплайнов для обеих задач для различных комбинаций  $N_x$  и  $M_t$  были рассчитаны величины  $\lg \left| \frac{T_T - T}{T_T^M} \right|$ , где  $(T_T - T)$  – максимальное расхождение между точными  $T_T$  и расчетными  $T$  значениями температуры в узлах сетки;  $T_T^M$  – максимальное точное значение температуры в изучаемом температурном поле.

Для задач 1-го и 2-го типа представлены значения  $\lg \left| \frac{T_T - T}{T_T^M} \right|$  для различных  $N_x$  и  $M_t$  на рис. 6, 7.

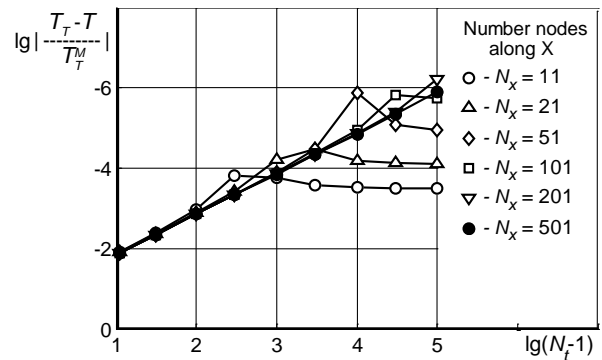


Рис. 6. Для задачи 1-го типа: изменение логарифма относительной ошибки для температуры в зависимости от чисел узлов  $N_x$  и  $M_t$

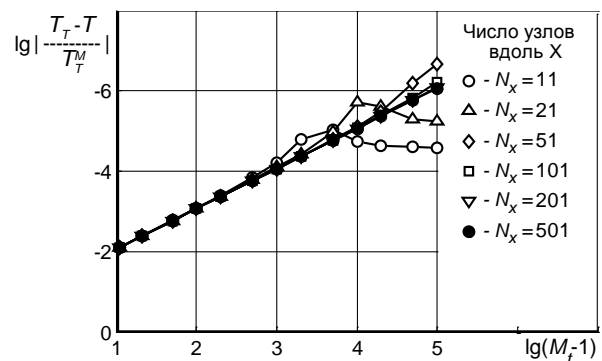


Рис. 7. Для задачи 2-го типа: изменение логарифма относительной ошибки для температуры в зависимости от чисел узлов  $N_x$  и  $M_t$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье предложен метод сплайн-функций для определения температурных полей. Показано, что предложенный метод независимо от количества узлов  $N_x$

вдоль оси  $X$ , наилучший порядок сходимости по числу узлов  $N_t$  вдоль оси времени практически равен единице. Поэтому, если ставить цель повышения порядка сходимости по шагу сетки вдоль оси времени, необходимо искать для производной температуры по времени  $\partial T/\partial t$  более совершенный разностный аналог, чем применяемая нами формула (15). Кроме того, можно уточнить полученное численное решение применяя метод Ромберга [17, 18] с повторной экстраполяцией при заданном количестве шагов временной для различных пространственных сеток [19].

Из рис. 6, 7 видно, что применение сплайн-функции 3 степени дефекта 1 уже при числе узлов  $N_x = 11$  позволило достигнуть точности расчетов с относительной погрешностью не превышающей  $1 \cdot 10^{-3}$ , а расчеты при  $N_x = 501$  обеспечили погрешность не более  $1 \cdot 10^{-5}$ , что уже вполне достаточно для решения многих практических задач.

Таким образом, высокая эффективность применения метода сплайнов при решении в рассматриваемых задачах нестационарной теплопроводности при зависящих от температуры теплофизических свойствах материала и при заданных нелинейных краевых условиях первого рода на границах пластины позволяет прогнозировать его высокую эффективность при решении и других задач теплопроводности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Теплопередача** / Исаченко В. П. [и др.]. М.: Энергия, 1979. 488 с. [V. P. Isachenko, et al., *Heat transfer*, (in Russian). Moscow: Energia, 1979. ]
2. **Юдаев Б. Н.** Теплопередача. М.: Высшая школа, 1973. 360 с. [B. N. Judaev, *Heat transfer*, (in Russian). Moscow: Vysshaja shkola, 1973. ]
3. **Самарский А. А.** Введение в численные методы. СПб.: Лань, 2005. 288 с. [A. A. Samarskij, *Introduction to Numerical Methods*, (in Russian). St. Petersburg: Lan, 2005. ]
4. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.** Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. СПб.: Лань, 2010. 400 с. [B. P. Demidovich, I. A. Maron, Je. Z. Shuvalova, *Numerical methods of analysis. Approximation of functions, differential and integral equations*, (in Russian). St. Petersburg: Lan, 2010. ]
5. **Kudoyarova V., Pavlov V.**, Refining of numerical solution for nonlinear transient heat conduction in a plate made of polymer composite material // *International Journal of Applied Engineering Research*, vol. 10, no. 18, pp. 39466-39470, 2015.
6. **Павлов В. П.** Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа: Уфимск. Гос. Авиац. техн. ун-т Уфа. 2003. 197 с. [V. P. Pavlov, *Spline-methods and other numerical methods for solving one-dimensional problems of deformable solids mechanics* (in Russian). Ufa: UGATU, 2003. ]
7. **Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П.** Задача расчета стержней одномерным сплайном пятой степени дефекта два. Математические заметки ЯГУ. Т.20, вып.1, Якутск, 2013. С. 50–59. [V. P. Pavlov, A. A. Abdrahmanova, R. P. Abdrahmanova, "The problem of calculating beams by one-dimensional spline fifth degree of the defect two," (in Russian), in *Matematicheskie zametki JaGU*. vol. 20, no. 1, pp. 50-59, 2013. ]
8. **Абдрахманова А. А., Павлов В. П.** Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стеклопластикового стержня при различных жесткостях опор // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 5(23). С. 87–92. [A. A. Abdrakhmanova, V. P. Pavlov, "Mathematical modeling of the stress-strain state of glass-plastic beam with different stiffnesses of supports," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 9, no. 5(23), pp. 87-92, 2007. ]
9. **Kudoyarova V. M., Pavlov V. P.** The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. P. 1419–1426.
10. **Павлов В. П.** Анализ спектра частот собственных колебаний стержня методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, № 4(74). С. 16–22. [V. P. Pavlov, "Analysis of the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod by the method of splines," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4(74). pp. 16-22, 2016. ]
11. **Павлов В. П.** Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 2(76). С. 3–16. [V. P. Pavlov, "Transverse vibrations of a rod with variable cross sections and calculation of its eigenfrequencies by the method of spline," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 21, no. 2(76), pp. 3-16, 2017. ]
12. **Павлов В. П.** Интегральный метод сплайнов и его возможности // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, №4(78). С. 41–49. [V. P. Pavlov, "The integral method of splines for calculation of the natural frequencies of the rod and its capability," (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 21, no. 4(78). pp. 41-49, 2017. ]

#### ОБ АВТОРАХ

**ПАВЛОВ Виктор Павлович**, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

**КУДОЯРОВА Вилина Маратовна**, доц. каф. авиационной теплотехники и теплоэнергетики. Дипл. инж. по авиационной и ракетно-космической теплотехнике (УГАТУ, 2001). Канд. техн. наук по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ (УГАТУ, 2005) Иссл. в обл. тепловых процессов внутри теплозащитных полимерных композиционных материалов при высоких температурах.

**METADATA**

**Title:** Spline-functions method for solving thermal conductivity problems.

**Authors:** V. P. Pavlov<sup>1</sup>, V. M. Kudoyarova<sup>1</sup>

**Affiliation:**

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** <sup>1</sup>victor.pavlov.51@yandex.ru, <sup>2</sup>Kudoyarova@inbox.ru

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 22, no. 2 (80), pp. 10–17, 2018. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** There are many cases in engineering practice when it is necessary to know the transient temperature field in a flat plate. At that, temperature distribution is studied experimentally or by calculation. However, the obtained calculation results do not always provide the required accuracy. This paper obtains the spline-method grade 3 defect 1, which allows simulating the process of thermal conductivity for the infinitely extended plate: at temperature-dependent thermophysical material properties and at nonlinear initial and boundary conditions of the first kind on the plate sides. For accuracy evaluation of the solution of the heat conduction equation by using spline-method the standard problems are created for one-dimensional infinite flat plane that have the exact analytical solutions. This paper shows the use of spline method for the solution of transient heat conduction problem gives an error of no more than  $1 \cdot 10^{-5}$ , which satisfies an obtaining of the sufficient accuracy to solve many practical problems.

**Key words:** splines; modeling; numerical methods; transient heat conduction; nonlinear differential heat equations.

**About authors:**

**PAVLOV, Victor Pavlovich**, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).

**KUDOYAROVA, Vilina Maratovna**, Associate Prof., Dept. of Aviation Heat and Power Engineering. Dipl. Engineer for Aviation and Rocket-Space Heat Engineering (UGATU, 2001). Cand. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).