

УДК 534.1

## МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОДАТЛИВОСТЕЙ УПРУГИХ ОПОР КОНСОЛЬНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТ ЕГО СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В. П. Павлов<sup>1</sup>, В. М. Кудоярова<sup>2</sup>, Л. Р. Нусратуллина<sup>3</sup>

<sup>1</sup>victor.pavlov.51@yandex.ru, <sup>2</sup>kudoyarova@inbox.ru, <sup>3</sup>mardliliya@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 29.01.2021

**Аннотация.** Предлагается методика определения жесткостей опор консольного стержня на основе первых двух частот его собственных колебаний. Подобная задача возникает при реализации неразрушающего контроля хвостовика рабочей лопатки осевого компрессора газотурбинного двигателя (ГТД) непосредственно в процессе его эксплуатации, когда по спектру собственных частот колебаний лопаток компрессора можно принимать определенное решение о возможности его дальнейшей эксплуатации или об изменении режима его работы. Практическая реализация такой методики в настоящее время обеспечивается оснащением ГТД высокоинтеллектуальными автоматизированными системами контроля и управления, включающими и датчики, контролирующие частоты колебаний наиболее ответственных конструктивных элементов.

**Ключевые слова:** упругие стержни; податливость упругих опор; частоты собственных колебаний; собственные формы колебаний.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время современные турбомашин и, в частности, авиационные двигатели оснащаются высокоинтеллектуальными автоматизированными системами контроля и управления, включающими большое количество датчиков, контролирующих разнообразные параметры эксплуатируемого изделия. В частности, имеются датчики, контролирующие частоты колебаний наиболее ответственных конструктивных элементов.

В связи с этим представляется весьма актуальной разработка методик оценки механического состояния тех или иных конструктивных элементов изделия на основе спектра собственных частот, возникающих в конструкции колебаний.

В настоящее время разработаны аналитические методы расчета частот собствен-

ных колебаний прямых стержней с постоянными поперечными сечениями [1–3].

В случае реальных переменных поперечных сечений стержня для определения собственных частот колебаний стержня приходится обращаться к численным методам, где одним из наиболее эффективных является метод сплайнов [4–18].

Вопросам идентификации крайних условий посвящаются книги [19–20].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим прямой стержень длиной  $l$  с постоянным поперечным сечением, определяемым площадью  $A$  и минимальным осевым моментом инерции  $I$ . Модуль Юнга материала стержня  $E$ , плотностью –  $\rho$ . Стержень упруго закреплен на левом конце и свободен на правом (рис. 1).

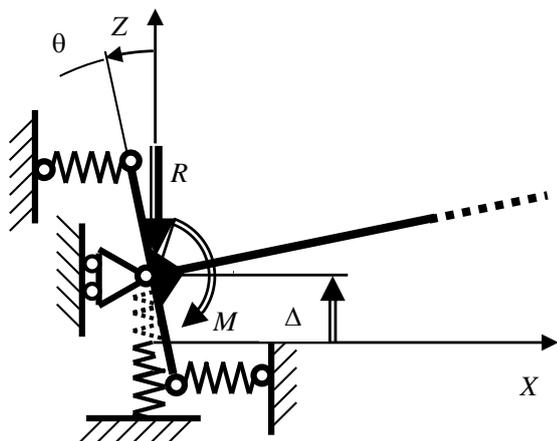


Рис. 1. Схема закрепления упругого стержня

Опора стержня обладает упругими свойствами двух видов: при вертикальном перемещении  $\Delta$  точки закрепления со стороны опоры на стержень действует сила  $R$ , а при повороте поперечного сечения стержня на угол  $\theta$  со стороны опоры на стержень действует пара сил с моментом  $M$  (рис. 1):

$$R = \Delta / r, \quad M = \theta / s, \quad (1)$$

Коэффициенты  $r, s$  в (1) являются коэффициентами податливости опоры. В процессе эксплуатации конструкции такого типа в опоре могут возникнуть недопустимые изменения, что приведет к изменению значений податливостей  $r, s$ . Очень важно иметь возможность зафиксировать наступление этого состояния непосредственно в процессе эксплуатации изделия.

Исходя из этого в данной работе ставится задача разработки и практической реализации методики оценки податливостей опор  $r, s$  консольного прямого стержня по известным первым двум собственным частотам его колебаний  $\omega_1, \omega_2$ .

#### УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ

Рассмотрим прямой стержень длиной  $l = 0,2$  м, имеющий прямоугольное поперечное сечение шириной  $b = 0,03$  м и высотой  $h = 0,01$  м. Модуль Юнга материала стержня  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па, плотность  $\rho = 7,85$  кг/м<sup>3</sup>. Минимальный осевой момент инерции поперечного сечения  $I = bh^3/12 = 2,5 \cdot 10^{-9}$  м<sup>4</sup>, площадь поперечного сечения  $A = bh = 3 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>.

Частоты собственных колебаний рассматриваемого стержня определяются [1–3] из уравнения:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \mu \omega^2 W = 0, \quad \mu = \rho A, \quad (2)$$

где  $W = W(x)$  — функция, описывающая форму собственных колебаний.

Введем обозначения:

$$\begin{cases} x = l \tilde{x}, & x \in [0, 1], \\ W = W_0 \tilde{w}, & \tilde{w} \in [0, 1], \end{cases} \quad (3)$$

где  $W_0$  — масштабный коэффициент с размерностью перемещения.

Также будем использовать  $\tilde{\omega}$  — приведенную частоту собственных колебаний балки:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\mu l^4}{EI} \omega^2, \quad (4)$$

и в итоге запишем уравнение (2) в безразмерном виде

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} - \tilde{\omega}^2 \tilde{w} = 0. \quad (5)$$

Для рассматриваемой балки приведенные краевые условия принимают вид:

$$\begin{cases} \tilde{w} + \tilde{r} \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{s} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} = 0 & \text{при } \tilde{x} = 0, \\ \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} = 0 & \text{при } \tilde{x} = 1, \end{cases} \quad (6)$$

где введены в рассмотрение приведенные податливости опоры при  $\tilde{x} = 0$ :

$$\tilde{r} = r \frac{EI}{l^3}, \quad \tilde{s} = s \frac{EI}{l}. \quad (7)$$

#### АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОДАТЛИВОСТЕЙ ОПОРЫ

Общее решение приведенного уравнения колебаний (5) имеет вид [15, 17, 18]:

$$\tilde{w} = \tilde{C}_1 e^{\tilde{\xi} \tilde{x}} + \tilde{C}_2 e^{-\tilde{\xi} \tilde{x}} + \tilde{C}_3 \sin \tilde{\xi} \tilde{x} + \tilde{C}_4 \cos \tilde{\xi} \tilde{x}, \quad (8)$$

где  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4$  — постоянные интегрирования, определяемые из приведенных краевых условий,  $\tilde{\xi}$  — некоторая неизвестная величина.

Запишем частные производные от функции приведенных форм собственных колебаний:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{w} &= \tilde{C}_1 e^{\tilde{\xi}\tilde{x}} + \tilde{C}_2 e^{-\tilde{\xi}\tilde{x}} + \tilde{C}_3 \sin \tilde{\xi}\tilde{x} + \tilde{C}_4 \cos \tilde{\xi}\tilde{x}, \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} &= \tilde{C}_1 \tilde{\xi} e^{\tilde{\xi}\tilde{x}} - \tilde{C}_2 \tilde{\xi} e^{-\tilde{\xi}\tilde{x}} + \tilde{C}_3 \tilde{\xi} \cos \tilde{\xi}\tilde{x} - \\ &- \tilde{C}_4 \tilde{\xi} \sin \tilde{\xi}\tilde{x}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} &= \tilde{C}_1 \tilde{\xi}^2 e^{\tilde{\xi}\tilde{x}} + \tilde{C}_2 \tilde{\xi}^2 e^{-\tilde{\xi}\tilde{x}} - \tilde{C}_3 \tilde{\xi}^2 \sin \tilde{\xi}\tilde{x} - \\ &- \tilde{C}_4 \tilde{\xi}^2 \cos \tilde{\xi}\tilde{x}, \\ \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} &= \tilde{C}_1 \tilde{\xi}^3 e^{\tilde{\xi}\tilde{x}} - \tilde{C}_2 \tilde{\xi}^3 e^{-\tilde{\xi}\tilde{x}} - \tilde{C}_3 \tilde{\xi}^3 \cos \tilde{\xi}\tilde{x} + \\ &+ \tilde{C}_4 \tilde{\xi}^3 \sin \tilde{\xi}\tilde{x}, \\ \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} &= \tilde{C}_1 \tilde{\xi}^4 e^{\tilde{\xi}\tilde{x}} + \tilde{C}_2 \tilde{\xi}^4 e^{-\tilde{\xi}\tilde{x}} + \tilde{C}_3 \tilde{\xi}^4 \sin \tilde{\xi}\tilde{x} + \\ &+ \tilde{C}_4 \tilde{\xi}^4 \cos \tilde{\xi}\tilde{x}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Подставим (9) в дифференциальное уравнение (5) и получим:

$$\begin{aligned} &\tilde{\xi}^4 (\tilde{C}_1 e^{\tilde{\xi}\tilde{x}} + \tilde{C}_2 e^{-\tilde{\xi}\tilde{x}} + \tilde{C}_3 \sin \tilde{\xi}\tilde{x} + \\ &+ \tilde{C}_4 \cos \tilde{\xi}\tilde{x}) - \tilde{\omega}^2 (\tilde{C}_1 e^{\tilde{\xi}\tilde{x}} + \tilde{C}_2 e^{-\tilde{\xi}\tilde{x}} + \\ &+ \tilde{C}_3 \sin \tilde{\xi}\tilde{x} + \tilde{C}_4 \cos \tilde{\xi}\tilde{x}) = 0, \\ &\tilde{x} \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) имеем:

$$\tilde{\omega} = \tilde{\xi}^2 \quad (11)$$

или

$$\tilde{\xi} = \sqrt{\tilde{\omega}}. \quad (12)$$

Подставим (9) в (6) и получим:

$$\left\{ \begin{aligned} (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \tilde{C}_4) + \tilde{r} \tilde{\xi}^3 (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 - \tilde{C}_3) &= 0, \\ (\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 + \tilde{C}_3) + \tilde{s} \tilde{\xi} (-\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 + \tilde{C}_4) &= 0, \\ \tilde{C}_1 e^{\tilde{\xi}} + \tilde{C}_2 e^{-\tilde{\xi}} - \tilde{C}_3 \sin \tilde{\xi} - \tilde{C}_4 \cos \tilde{\xi} &= 0, \\ \tilde{C}_1 e^{\tilde{\xi}} - \tilde{C}_2 e^{-\tilde{\xi}} - \tilde{C}_3 \cos \tilde{\xi} + \tilde{C}_4 \sin \tilde{\xi} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Запишем (13) в матричной форме

$$PC = 0, \quad (14)$$

где  $C$  – вектор-столбец размера  $4 \times 1$ :

$$C = (C_1, C_2, C_3, C_4)^T, \quad (15)$$

$P$  – матрица размера  $4 \times 4$ :

$$P = (P_{ik}, \quad i=1, \dots, 4, \quad k=1, \dots, 4) \quad (16)$$

с компонентами, определяемыми на основе (13):

$$\left\{ \begin{aligned} P_{11} &= 1 + \tilde{r} \tilde{\xi}^3, & P_{12} &= 1 - \tilde{r} \tilde{\xi}^3, \\ P_{13} &= -\tilde{r} \tilde{\xi}^3, & P_{14} &= 1, \\ P_{21} &= 1 - \tilde{s} \tilde{\xi}, & P_{22} &= -1 - \tilde{s} \tilde{\xi}, \\ P_{23} &= 1, & P_{24} &= \tilde{s} \tilde{\xi}, \\ P_{31} &= e^{\tilde{\xi}}, & P_{32} &= e^{-\tilde{\xi}}, \\ P_{33} &= -\sin \tilde{\xi}, & P_{34} &= -\cos \tilde{\xi}, \\ P_{41} &= e^{\tilde{\xi}}, & P_{42} &= -e^{-\tilde{\xi}}, \\ P_{43} &= -\cos \tilde{\xi}, & P_{44} &= \sin \tilde{\xi}. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Уравнение (17) имеет ненулевое решение только при равенстве нулю определителя, составленного из компонент матрицы  $P$ :

$$D = \det[P_{ik}] = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

При подстановке (17) в (18) и последующем развертывании определителя получаем при обозначениях  $x = \hat{r}$ ,  $y = \hat{s}$  уравнение:

$$p_{11}xy + p_{10}x + p_{01}y + p_{00} = 0, \quad (19)$$

где  $p_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$  – некоторые коэффициенты, определяемые на основе компонент матрицы  $P$ .

Уравнение (19) содержит две неизвестные  $x, y$ , которые из одного уравнения определить нельзя. Для определения неизвестных  $x, y$  необходимо построить, как минимум, два уравнения вида (19).

Будем считать, что нам для конкретного стержня известны первые две собственные частоты колебаний  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ .

Это по изложенной выше методике позволяет построить два уравнения вида (19)

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}xy + a_{10}x + a_{01}y + a_{00} &= 0, \\ b_{11}xy + b_{10}x + b_{01}y + b_{00} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (20)$$

с известными коэффициентами  $a_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$

и  $b_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ .

Вычтем из второго уравнения системы (20) первое уравнение и получим:

$$(b_{10} - a_{10})x + (b_{01} - a_{01})y + (b_{00} - a_{00}) = 0. \quad (21)$$

Из (21) получим:

$$y = k_0 + k_1x, \quad (22)$$

где

$$k_0 = \frac{b_{00} - a_{00}}{a_{01} - b_{01}}, \quad k_1 = \frac{b_{10} - a_{10}}{a_{01} - b_{01}}. \quad (23)$$

Подставим (23) в первое уравнение системы (20) и получим квадратное уравнение относительно коэффициента  $x$ :

$$c_2x^2 + c_1x + c_0 = 0, \quad (24)$$

где

$$\begin{cases} c_0 = a_{00} + a_{01}k_0, \\ c_1 = a_{10} + a_{01}k_1 + a_{11}k_0, \\ c_2 = a_{11}k_1. \end{cases} \quad (25)$$

Решая уравнение (24) находим два корня:

$$x_{1,2} = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_0c_2}}{2c_2}, \quad (26)$$

а затем на основе (23) определяем два корня

$$y_{1,2} = k_0 + k_1x_{1,2}. \quad (27)$$

В результате получаем две пары корней и, соответственно, две пары возможных жесткостей, наложенных на стержень связей.

#### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПОДАТЛИВОСТЕЙ ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПОСТОЯННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Анализ жесткости корневой части рабочих лопаток ГТД при размерах, близких к размеру рассматриваемого стержня, показывает, что в их работоспособном состоянии диапазон приведенных податливостей характеризуется интервалами:

$$0 \leq \tilde{r} \leq 1 \cdot 10^{-3}, \quad 0 \leq \tilde{s} \leq 1 \cdot 10^{-1}. \quad (28)$$

Исходя из этого, задавались точные значения приведенных податливостей  $\tilde{r}_i, \tilde{s}_i$  в табл. 1 и вычислялись первые две собственные приведенные частоты колебаний  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ .

Далее уже по этим  $\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$  определялись расчетные значения приведенных податливостей  $\tilde{r}, \tilde{s}$ , которые сведены в табл. 1.

Таблица 1

#### Стержень с поперечным сечением

Номер эксперимента	Точные податливости		Расчетные податливости	
	$\tilde{r}_i$	$\tilde{s}_i$	$\tilde{r}$	$\tilde{s}$
1	0	0	0	$9,35 \cdot 10^{-17}$
2	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1,0007 \cdot 10^{-3}$	$0,9987 \cdot 10^{-3}$
3	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-2}$	$0,954 \cdot 10^{-2}$
4	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$0,997 \cdot 10^{-1}$
5	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1,23 \cdot 10^{-2}$	$0,952 \cdot 10^{-1}$

Из табл. 1 видно, что для стержня с постоянным поперечным сечением расчетные значения податливостей весьма близки к точным.

#### РАЗВИТИЕ МЕТОДА ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Реальные лопатки компрессоров ГТД имеют переменное по длине поперечное сечение, поэтому необходимо оценить возможности предлагаемого метода и для стержней переменного сечения. В этом случае частоты собственных колебаний будут определяться из уравнения [7, 17]:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2E \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + E \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \mu \omega^2 W = 0, \quad (29)$$

где  $E = \text{const}$ , а параметры  $\mu, I$  являются функциями координаты  $x$ :  $\mu = \mu(x)$ ,  $I = I(x)$ .

Следуя [7, 17], зададим выражения для погонной массы стержня  $\mu$  и осевого момента инерции  $I$  его поперечного сечения в экспоненциальной форме:

$$\mu = \mu_0 e^{\delta \frac{x}{l}}, \quad I = I_0 e^{\delta \frac{x}{l}}. \quad (30)$$

где  $l$  – длина балки,  $\mu_0$ ,  $I_0$  и  $\delta$  – некоторые постоянные.

На основе (30) определим:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = I_0 \frac{\delta}{l} e^{\frac{\delta x}{l}}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = I_0 \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 e^{\frac{\delta x}{l}}. \quad (31)$$

Подставим (30) и (31) в (29) и получим:

$$EI_0 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2EI_0 \frac{\delta}{l} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + EI_0 \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \mu_0 \omega^2 W = 0. \quad (32)$$

На основе обозначений (3) приведем уравнение колебаний (32) к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + 2\delta \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\mu_0 l^4}{EI_0} \omega^2 \tilde{w} = 0. \quad (33)$$

Введем обозначение  $\tilde{\omega}$  для приведенной частоты собственных колебаний балки, определяемой по формуле:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\mu_0 l^4}{EI_0} \omega^2. \quad (34)$$

С учетом (34) уравнение (33) приводится к виду

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + 2\delta \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{\omega}^2 \tilde{w} = 0, \quad \tilde{x} \in [0, 1] \quad (35)$$

при обозначениях

$$\lambda_1 = \sqrt{\tilde{\omega} + \frac{\delta^2}{4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\tilde{\omega} - \frac{\delta^2}{4}}. \quad (36)$$

Точное решение уравнения (35) имеет вид [17]:

$$\tilde{w} = e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} F(\tilde{x}), \quad (37)$$

где

$$F(\tilde{x}) = C_1 e^{\lambda_1 \tilde{x}} + C_2 e^{-\lambda_1 \tilde{x}} + C_3 \sin(\lambda_2 \tilde{x}) + C_4 \cos(\lambda_2 \tilde{x}). \quad (38)$$

На основе (37) вычислим производные по  $\tilde{x}$  от функции  $\tilde{w} = \tilde{w}(x)$  до третьего порядка включительно:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{w} &= e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} F(\tilde{x}), \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} &= -\frac{\delta}{2} e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} F(\tilde{x}) + e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} \frac{\partial F(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}}, \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} &= \frac{\delta^2}{4} e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} F(\tilde{x}) - \delta e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} \frac{\partial F(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} + e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} \frac{\partial^2 F(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2}, \\ \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} &= -\frac{\delta^3}{8} e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} F(\tilde{x}) + \frac{3\delta^2}{4} e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} \frac{\partial F(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}} - \frac{3\delta}{2} e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} \frac{\partial^2 F(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^2} + e^{-\frac{\delta \tilde{x}}{2}} \frac{\partial^3 F(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}^3}. \end{aligned} \right. \quad (39)$$

Подставляя выражения (39) в (6), получаем систему уравнений по структуре, аналогичную (14), где:

$$\left\{ \begin{aligned} P_{11} &= 1 - \tilde{r} \frac{\delta^3}{8} + \tilde{r} \frac{3\delta^2}{4} \lambda_1 - \tilde{r} \frac{3\delta}{2} \lambda_1^2 + \tilde{r} \lambda_1^3, \\ P_{12} &= 1 - \tilde{r} \frac{\delta^3}{8} - \tilde{r} \frac{3\delta^2}{4} \lambda_1 - \tilde{r} \frac{3\delta}{2} \lambda_1^2 - \tilde{r} \lambda_1^3, \\ P_{13} &= \tilde{r} \frac{3\delta^2}{4} \lambda_2 - \tilde{r} \lambda_2^3, \\ P_{14} &= 1 - \tilde{r} \frac{\delta^3}{8} + \tilde{r} \frac{3\delta}{2} \lambda_2^2, \end{aligned} \right. \quad (40)$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_{21} &= -\frac{\delta}{2} + \lambda_1 - \tilde{s} \frac{\delta^2}{4} + \tilde{s} \delta \lambda_1 - \tilde{s} \lambda_1^2, \\ P_{22} &= -\frac{\delta}{2} - \lambda_1 - \tilde{s} \frac{\delta^2}{4} - \tilde{s} \delta \lambda_1 - \tilde{s} \lambda_1^2, \\ P_{23} &= \lambda_2 + \tilde{s} \delta \lambda_2, \\ P_{24} &= -\frac{\delta}{2} - \tilde{s} \frac{\delta^2}{4} + \tilde{s} \lambda_2^2, \end{aligned} \right. \quad (41)$$

$$\left\{ \begin{aligned} P_{31} &= \frac{\delta^2}{4} e^{\lambda_1} - \delta \lambda_1 e^{\lambda_1} + \lambda_1^2 e^{\lambda_1}, \\ P_{32} &= \frac{\delta^2}{4} e^{-\lambda_1} + \delta \lambda_1 e^{-\lambda_1} + \lambda_1^2 e^{-\lambda_1}, \\ P_{33} &= \frac{\delta^2}{4} \sin(\lambda_2) - \delta \lambda_2 \cos(\lambda_2) - \lambda_2^2 \sin(\lambda_2), \\ AP_{44} &= \frac{\delta^2}{4} \cos(\lambda_2) + \delta \lambda_2 \sin(\lambda_2) - \lambda_2^2 \cos(\lambda_2), \end{aligned} \right. \quad (42)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{41} = \frac{\delta^3}{8} e^{\lambda_1} - \frac{3\delta^2}{4} \lambda_1 e^{\lambda_1} + \\ \quad + \frac{3\delta}{2} \lambda_1^2 e^{\lambda_1} - \lambda_1^3 e^{\lambda_1}, \\ P_{42} = \frac{\delta^3}{8} e^{-\lambda_1} + \frac{3\delta^2}{4} \lambda_1 e^{-\lambda_1} + \\ \quad + \frac{3\delta}{2} \lambda_1^2 e^{-\lambda_1} + \lambda_1^3 e^{-\lambda_1}, \\ P_{43} = \frac{\delta^3}{8} \sin(\lambda_2) - \frac{3\delta^2}{4} \lambda_2 \cos(\lambda_2) - \\ \quad - \frac{3\delta}{2} \lambda_2^2 \sin(\lambda_2) + \lambda_2^3 \cos(\lambda_2), \\ P_{44} = \frac{\delta^3}{8} \cos(\lambda_2) + \frac{3\delta^2}{4} \lambda_2 \sin(\lambda_2) - \\ \quad - \frac{3\delta}{2} \lambda_2^2 \cos(\lambda_2) - \lambda_2^3 \sin(\lambda_2). \end{array} \right. \quad (43)$$

Далее искомые значения податливостей находятся по формулам (18–27).

#### РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ПОДАТЛИВОСТЕЙ ДЛЯ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Результаты расчетов для стержня переменного поперечного сечения при  $\delta = -1$  представлены в табл. 2.

Таблица 2

#### Стержень с переменным поперечным сечением при $\delta = -1$

Номер эксперимента	Точные податливости		Расчетные податливости	
	$\tilde{r}_i$	$\tilde{s}_i$	$\tilde{r}$	$\tilde{s}$
1	0	0	$-3,60 \cdot 10^{-16}$	$4,18 \cdot 10^{-16}$
2	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$0,999 \cdot 10^{-3}$	$1,000 \cdot 10^{-3}$
3	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-2}$	$0,986 \cdot 10^{-2}$
4	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1,08 \cdot 10^{-3}$	$0,999 \cdot 10^{-1}$
5	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$0,984 \cdot 10^{-1}$

Результаты расчетов для стержня переменного поперечного сечения при  $\delta = 1$  представлены в табл. 3.

Таблица 3

#### Стержень с переменным поперечным сечением при $\delta = 1$

Номер эксперимента	Точные податливости		Расчетные податливости	
	$\tilde{r}_i$	$\tilde{s}_i$	$\tilde{r}$	$\tilde{s}$
1	0	0	0	$7,53 \cdot 10^{-16}$
2	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1,001 \cdot 10^{-3}$	$0,995 \cdot 10^{-3}$
3	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$0,918 \cdot 10^{-2}$
4	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1,19 \cdot 10^{-3}$	$0,994 \cdot 10^{-1}$
5	$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$0,916 \cdot 10^{-1}$

Из табл. 2, 3 видно, что для стержня с переменным поперечным сечением расчетные значения податливостей также весьма близки к точным.

#### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сопоставление  $\tilde{r}_i, \tilde{s}_i$  и  $\tilde{r}, \tilde{s}$  в табл. 1–3 показывает, что как для стержня постоянно поперечного сечения, так и для стержня переменного поперечного сечения для абсолютно жесткой опоры при  $\tilde{r} = 0, \tilde{s}_i = 0$  значения  $\tilde{r}_i, \tilde{s}_i$  и  $\tilde{r}, \tilde{s}$  практически не отличаются.

С увеличением податливостей опоры расхождения увеличиваются, но даже при максимально допустимых значениях податливости из интервала (28) при  $\tilde{r}_i = 1 \cdot 10^{-3}, \tilde{s}_i = 1 \cdot 10^{-1}$  имеем достаточно близкие значения  $\tilde{r} = 1,25 \cdot 10^{-3}, \tilde{s} = 0,916 \cdot 10^{-1}$ , отличающиеся не более чем на 20% (табл. 1), что вполне достаточно для практической оценки податливостей реальных конструкций.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана методика идентификации коэффициентов податливости упругой опоры консольной балки постоянного и переменного сечений на основе первых двух частот ее собственных колебаний.

2. Проведен математический эксперимент по оценке податливостей опоры консольной балки, близкой по свойствам рабочим лопаткам реального осевого компрессора ГТД.

3. Показано, что при реализации предлагаемой методики для податливостей опоры, соответствующей диапазону существующих двигателей, погрешность идентификации не выходит за пределы 20 %, что вполне допустимо для оценки технического состояния опоры в двигателе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. [ I. M. Babakov, *Oscillation theory*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1965. ]
2. **Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.** Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 560 с. [ I. A. Birger, R. R. Mavlyutov, *Resistance of materials*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1986. ]
3. **Феодосьев В. И.** Сопротивление материалов. М.: Наука, 1979. 560 с. [ V. I. Feodos'ev, *Strength of materials*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1979. ]
4. **Kudoyarova V., Pavlov V.** Refining of numerical solution for nonlinear transient heat conduction in a plate made of polymer composite material // *International Journal of Applied Engineering Research*. 2015. Vol. 10, no. 18. Pp. 39466-39470. [ V. Kudoyarova, V. Pavlov, "Refining of numerical solution for nonlinear transient heat conduction in a plate made of polymer composite material", in *International Journal of Applied Engineering Research*, vol. 10, no. 18, pp. 39466-39470, 2015. ]
5. **Kudoyarova V. M., Pavlov V. P.** The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate // *Procedia Engineering*, 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016). 2016. Vol. 150. Pp. 1419-1426. [ V. M. Kudoyarova, V. P. Pavlov, "The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate", in *Procedia Engineering of the 2nd International Conference on Industrial Engineering (ICIE-2016)*, vol. 150, pp. 1419-1426, 2016. ]
6. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** The Enhanced Spline-Method for Numerical Results of Natural Frequencies of Beams // *Procedia Engineering* (International Conference "Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM2016)). 2017. Vol. 176. Pp. 438-450. [ V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "The Enhanced Spline-Method for Numerical Results of Natural Frequencies of Beams", in *Procedia Engineering of the International Conference "Dynamics and Vibroacoustics of Machines (DVM2016)*, vol. 176, pp. 438-450, 2017. ]
7. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** Spline-Method for Numerical Calculation of Natural-Vibration Frequency of Beam with Variable Cross-Section // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. Pp. 710-715. [ V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "Spline-Method for Numerical Calculation of Natural-Vibration Frequency of Beam with Variable Cross-Section", in *Procedia Engineering*, vol. 206, pp. 710-715, 2017. ]
8. **Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** Spline Based Numerical Method for Heat Conduction Nonlinear Problems Solution // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. Pp. 704-709. [ V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "Spline Based Numerical Method for Heat Conduction Nonlinear Problems Solution", in *Procedia Engineering*, vol. 206, pp. 704-709, 2017. ]
9. **Pavlov V. P., Kudoyarova V. M., Philippov A. A.** Simulation of Boron and Carbon Fiber Composite Characteristics of the Elasticity // *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 129. Pp. 1-4. [ V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, A. A. Philippov, "Simulation of Boron and Carbon Fiber Composite Characteristics of the Elasticity", in *MATEC Web of Conferences*, vol. 129, pp. 1-4, 2017. ]
10. **Pavlov V. P., Kudoyarova V. M., Philippov A. A.** Modeling of the elastic characteristics of a longfiber reinforced composite with an arbitrary orientation of the reinforcing fibers // *MATEC Web of Conferences*. 2018. Vol. 224. Pp. 1-7. [ V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, A. A. Philippov, "Modeling of the elastic characteristics of a longfiber reinforced composite with an arbitrary orientation of the reinforcing fibers", in *MATEC Web of Conferences*, vol. 224, pp. 1-7, 2018. ]
11. **Zhernakov V. S., Pavlov V. P., Kudoyarova V. M.** Deformation of Thin Elastic Rod Under Large Deflections // *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering*. ICIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2018. Pp. 185-196. [ V. S. Zhernakov, V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "Deformation of Thin Elastic Rod Under Large Deflections", in *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering*, ICIE 2018, Lecture Notes in Mechanical Engineering, Springer, Cham, pp. 185-196, 2018. ]
12. **Павлов В. П., Кудоярова В. М.** Анализ температурного поля в твердом теле методом сплайнов // *Вестник УГАТУ*. 2018. Т. 22, № 2 (80). С. 10–17. [ V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "Spline-functions method for solving thermal conductivity problems", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 22, no. 2 (80), pp. 10-17, 2018. ]
13. **Павлов В. П., Кудоярова В. М.** Возможности метода сплайнов и метода конечных элементов в задаче о больших перемещениях тонкого упругого стержня // *Вестник УГАТУ*. 2018. Т. 22, № 4 (82). С. 30–40. [ V. P. Pavlov, V. M. Kudoyarova, "Possibilities of the spline-method and the finite element method in the problem of large displacement of a thin elastic rod", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 22, no. 2 (82), pp. 30-40, 2018. ]
14. **Кудоярова В. М., Павлов В. П.** Методика оценки точности решения задач колебания рамы с сосредоточенной массой // *Материалы II международной научно-практической конференции «Современные проблемы науки и образования»*. Уфа: УГАТУ, 2015. Ч. 1. С. 173–177. [ V. M. Kudoyarova, V. P. Pavlov, "Methodology for assessing the accuracy of solving problems of vibration of a frame with a concentrated mass", (in Russian), in *Proc. 2nd Workshop on Modern problems of science and education*, Ufa, 2015. Pp. 173-177. ]
15. **Павлов В. П.** Анализ спектра частот собственных колебаний стержня методом сплайнов // *Вестник УГАТУ*. 2016. Т. 20, № 4 (74). С. 16–22. [ V. P. Pavlov, "Analysis of the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod by the method of splines", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4 (74), pp. 16-22, 2016. ]
16. **Павлов В. П.** Метод сплайнов в расчетах стержней на устойчивость // *Вестник УГАТУ*. 2016. Т. 20, № 4 (74).

С. 45–53. [ V. P. Pavlov, “The method of splines in the calculation of the studs for stability”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4 (74), pp. 45-53, 2016. ]

17. **Павлов В. П.** Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 2 (76). С. 3–16. [ V. P. Pavlov, “Transverse vibrations of a rod with variable cross sections and calculation of its Eigen frequencies by the method of spline”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 21, no. 2 (76), pp. 3-16, 2017. ]

18. **Павлов В. П.** Интегральный метод сплайнов для расчета частот собственных колебаний стержня и его возможности // Вестник УГАТУ. 2017. Т. 21, № 4 (78). С. 41–49. [ V. P. Pavlov, “The integral method of splines for calculation of the natural frequencies of the rod and its capabilities”, (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 21, no. 4 (78), pp. 41-49, 2017. ]

19. **Ахтямов А. М.** Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008. 300 с. [ A. M. Ahtyamov, *Identification theory of boundary conditions*, (in Russian). Ufa: Gilem, 2008. ]

20. **Ахтямов А. М.** Теория идентификации краевых условий и ее приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с. [ A. M. Ahtyamov, *The theory of identification of boundary conditions and its applications*, (in Russian). Moscow: Fizmatlit, 2009. ]

#### ОБ АВТОРАХ

**ПАВЛОВ Виктор Павлович**, проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

**КУДОЯРОВА Вилина Маратовна**, доц. каф. авиационной теплотехники и теплоэнергетики. Дипл. инж. по авиационной и ракетно-космической теплотехнике (УГАТУ, 2001). Канд. техн. наук по математическому моделированию, численным методам и комплексам программ (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. тепловых процессов внутри теплозащитных полимерных композиционных материалов при высоких температурах.

**НУСРАТУЛЛИНА Лилия Ринатовна**, ст. преп. каф. математики. Дипл. математик (БашГУ, 2003). Готовит дис. о колебаниях естественно закрученных стержней с переменным сечением.

#### METADATA

**Title:** Method based on elastic rod eigenfrequencies for determining the elastic support pliability.

**Authors:** V. P. Pavlov<sup>1</sup>, V. M. Kudoyarova<sup>2</sup>, L. R. Nusratullina<sup>3</sup>

**Affiliation:**

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** <sup>1</sup>victor.pavlov.51@yandex.ru, <sup>2</sup>kudoyarova@inbox.ru, <sup>3</sup>mardliliya@yandex.ru

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 25, no. 1 (91), pp. 7-14, 2021. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** This paper is devoted a method based on the first two frequencies of rod's natural vibrations. The proposed method is for determining a support rigidity of a cantilever rod. Such problem arises in the implementation of non-destructive testing of the axial compressor rotor blade root of a gas turbine engine (GTE) directly during its operation. When a certain decision can be made in the process of its compressor blade operational oscillations about the possibility of its further operation or about changing its operating mode. The practical implementation of such method is currently provided by the GTE with highly intelligent automated control and management systems, including sensors that control the vibration frequencies of the most critical structural elements.

**Key words:** elastic rods; compliance of elastic supports; natural vibration frequencies; natural vibration modes.

**About authors:**

**PAVLOV, Victor Pavlovich**, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).

**KUDOYAROVA, Vilina Maratovna**, Assoc. Prof., Dept. of Aviation Heat and Power Engineering. Dipl. Engineer for Aviation and Rocket-Space Heat Engineering (UGATU, 2001). Cand. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).

**NUSRATULLINA, Liliya Rinatovna**, Senior teacher of the chair Mathematics, specialist in mathematics (BSU, 2003).