

УДК 534.26

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ ОТ ЗВУКОПРОНИЦАЕМЫХ СФЕР ПРИ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Э. Ш. НАСИБУЛЛАЕВА

elvira@anrb.ru

Институт механики им. П. П. Мавлютова УФИЦ РАН

Поступила в редакцию 23.03.2021

**Аннотация.** Представлена обобщенная математическая модель акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер, центры которых расположены на одной оси, при воздействии либо сферической волны от монопольного источника излучения, либо плоской волны. Проведен численный анализ и представлены диаграммы распределения давления внутри и вне сфер для различных значений параметров системы (числа сфер, радиусов сфер, расстояния между сферами, угла падения внешней волны, расстояния от центра первой сферы до монопольного источника излучения, физических параметров внешней и внутренней сред) и типа внешнего воздействия.

**Ключевые слова:** звукопроницаемая сфера; акустическое рассеяние; численное моделирование; метод разложения по мультиполям; плоская волна; монопольный источник излучения.

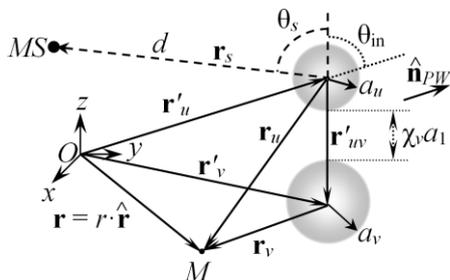
### ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Изучение явления рассеяния звуковых волн на неоднородностях малых размеров, отличающихся плотностью и (или) сжимаемостью от основной среды, является одной из важных задач акустики. В первую очередь это связано с тем, что на данном явлении основываются многие практические применения акустических волн. Так, в гидролокации [1, 2] с помощью акустических сигналов определяют местоположение косяков рыб, отдельных крупных рыб или других подводных объектов и невидимых подводных препятствий. Кроме того, данное явление используется в приборах неразрушающего контроля [3], в медицинских сканерах [4, 5], при зондировании атмосферы и океана [1, 2, 6], а также для создания позиционируемого 3D-звука [7]. Таким образом, задача акустического рассеяния от препятствий малых размеров при внешних воздействиях является актуальной.

В настоящей работе рассматриваются  $N$  сфер различных радиусов  $a_1, a_2, \dots, a_N$  с центрами, лежащими на одной оси и имеющими декартовы координаты  $\mathbf{r}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$  ( $u = 1, \dots, N$ ), которые расположены в бесконечном трехмерном пространстве (см. рис. 1). Внешняя среда является однородной и характеризуется плотностью  $\rho_0$  и скоростью звука  $c_0$ . Предполагается, что сферы звукопроницаемы, т.е. через их границы проходит волна, которая распространяется в другой среде, имеющей плотность  $\rho_u$  и скорость звука  $c_u$  ( $u = 1, \dots, N$ ). На систему сфер падает либо плоская волна с нормальным вектором  $\hat{\mathbf{n}}_{pw}$  к ее фронту, либо сферическая волна от монопольного источника излучения, расположенного в произвольной точке  $MS$  трехмерного пространства.

Если в качестве оси  $Oz$  выбрать ось, на которой лежат центры сфер, то задача становится осесимметричной, следовательно-

но, без ограничения общности задачи можно выбрать начало отсчета в центре 1-ой сферы, а в качестве плоскости  $Ouz$  взять плоскость, проходящую либо через монополюсный источник излучения, либо в случае плоской волны – параллельно нормальному вектору к ее фронту  $\hat{\mathbf{n}}_{PW}$ .



**Рис. 1.** Схема и основные обозначения в разных системах отсчета для сфер с центрами, расположенными на одной оси:  $MS$  – монополюсный источник излучения;  $M$  – расчетная точка;  $\hat{\mathbf{n}}_{PW}$  – нормальный вектор к фронту плоской волны

В настоящей работе для численного решения поставленной задачи была адаптирована методика расчета, представленная в работе [8] для твердых сфер с произвольным акустическим импедансом, на случай звукопроницаемых сфер с целью определения распределения давления вне и внутри системы сфер для проведения численного анализа в широком диапазоне параметров.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задача рассеяния звука от системы сфер сводится к решению уравнения Гельмгольца для комплексного потенциала  $\psi(\mathbf{r})$  в произвольной точке  $\mathbf{r}$  внешней среды с волновым числом  $k$ :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (1)$$

с граничными условиями, выражающими на поверхности  $u$ -ой сферы равенства потенциалов:

$$\left( \psi(\mathbf{r}) - \psi_u^{\text{int}} \right)_{r=a_u} = 0, \quad u = 1, \dots, N \quad (2)$$

и нормальных составляющих скорости частиц:

$$\left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{\rho_u} \frac{\partial \psi_u^{\text{int}}}{\partial r} \right)_{r=a_u} = 0, \quad u = 1, \dots, N, \quad (3)$$

где  $\rho_0$  – плотность окружающей среды;  $\rho_u$  – плотность среды внутри  $u$ -ой сферы.

В формулах (2), (3)  $\psi_u^{\text{int}}$  – комплексный потенциал внутри  $u$ -ой сферы, который также удовлетворяет уравнению Гельмгольца, но с волновым числом  $k_u$  для среды внутри сферы:

$$\nabla^2 \psi_u^{\text{int}} + k_u^2 \psi_u^{\text{int}} = 0.$$

Потенциал внешнего поля представляется в следующем виде:

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) + \psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $\psi_{\text{in}}(\mathbf{r})$  – потенциал падающего поля;  $\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r})$  – потенциал поля рассеяния, удовлетворяющий условию излучения Зоммерфельда:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \psi_{\text{scat}}}{\partial r} - ik \psi_{\text{scat}} \right) = 0,$$

где  $i$  – мнимая единица. Данное условие соответствует уходящим на бесконечность волнам (а именно, означает, что на бесконечности волна затухает) и выделяет единственное решение уравнения (1) в классе обобщенных функций в неограниченной области.

Для решения уравнения Гельмгольца (1) с граничными условиями (2) обобщена численная техника разложения по мультиполям [8], которая была разработана для случая звукопроницаемых сфер с произвольным комплексным сопротивлением. Данная техника позволяет достичь высокой точности получаемых результатов при минимальных затратах машинного времени.

На первом этапе проводится линейризация задачи. Для этого поле рассеяния представляется в следующей форме:

$$\psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{u=1}^N \psi_{\text{scat}}^{(u)}(\mathbf{r}),$$

где потенциал  $\psi_{\text{scat}}^{(u)}$  является регулярным вне  $u$ -ой сферы и удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда. Отметим, что данные потенциалы вызывают изменения в поле рассеяния, вызванные  $u$ -ой сферой, но с учетом влияния всех остальных сфер.

На втором этапе проводится разложение по мультиполям. Для этого вводятся системы отсчета, связанные с центрами сфер, и осуществляется переход к сферической системе координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'_u = \mathbf{r}_u = (r_u, \theta_u, \varphi_u)$  ( $u = 1, \dots, N$ ). Тогда получим следующие разложения потенциалов:

$$\Psi_{\text{scat}}(\mathbf{r}) = \sum_{u=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^{(u)m} S_n^m(\mathbf{r}_u), \quad (5)$$

$$\Psi_{\text{in}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n C_n^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_u) R_n^m(\mathbf{r}_u), \quad (6)$$

$$\Psi_{\text{int}}^{(u)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n E_n^{(u)m} j_n(k_u r_u) Y_n^m(\theta_u, \varphi_u). \quad (7)$$

Здесь  $A_n^{(u)m}$ ,  $E_n^{(u)m}$  – неизвестные коэффициенты разложения по мультиполям;  $S_n^m(\mathbf{r}_u) = h_n(k r_u) Y_n^m(\theta_u, \varphi_u)$  – мультиполь порядка  $n$  и степени  $m$ ;  $h_l(kr)$  – сферические функции Ханкеля 1-го типа;  $Y_n^m(\theta_u, \varphi_u)$  – ортогональные сферические гармоники порядка  $n$  и степени  $m$ ;  $C_n^{(\text{in})m}$  – коэффициенты разложения внешнего поля;  $R_n^m(\mathbf{r}_u) = j_n(k r_u) Y_n^m(\theta_u, \varphi_u)$  – регулярные фундаментальные решения уравнения Гельмгольца в сферических координатах, связанные с  $u$ -й сферой;  $j_n(kr)$  – сферические функции Бесселя 1-го типа. Вид специальных функций представлен, например, в справочнике [9].

На третьем этапе проводится повторное разложение по мультиполям. Для этого берется  $v$ -ая сфера и около нее ( $|\mathbf{r}'_v| \leq |\mathbf{r}'_u - \mathbf{r}'_v|$ , где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_v$  – центр сферы) мультиполи  $S_n^m(\mathbf{r}_u)$  ( $u \neq v$ ) разлагаются повторно в ряд регулярных фундаментальных решений:

$$S_n^m(\mathbf{r}_u) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{s=-l}^l (S | R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{uv}) R_l^s(\mathbf{r}_v) \quad (8)$$

( $u, v = 1, \dots, N$ ;  $u \neq v$ ;  $n = 0, 1, \dots$ ;  $m = -n, \dots, n$ ), где  $(S | R)_{ln}^{sm}(\mathbf{r}'_{uv})$  – коэффициенты перехода при повторном разложении;  $\mathbf{r}'_{uv} = \mathbf{r}'_v - \mathbf{r}'_u$  – вектор, направленный от центра  $u$ -ой сферы к центру  $v$ -ой сферы. Данное повторное разложение возможно, поскольку около центра  $v$ -ой сферы ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_v$ ) все потенциалы  $\Psi_{\text{scat}}^{(u)}$  ( $u \neq v$ ) также являются регулярными.

В осесимметричном случае последняя формула упрощается, поскольку коэффициенты повторного разложения зависят только от относительного расположения центров сфер, а не от углов:

$$S_n^m(\mathbf{r}_u) = \sum_{l=|m|}^{\infty} (S | R)_{ln}^m(r'_{uv}) R_l^m(\mathbf{r}_v),$$

где  $(S | R)_{ln}^m(r'_{uv}) = (S | R)_{ln}^{mm}(r'_{uv})$ . Благодаря соотношению симметрии

$$(S | R)_{ln}^m = (S | R)_{ln}^{-m} \quad (m = 0, 1, \dots)$$

и равенства

$$(S | R)_{ln}^m(r'_{uv}) = (-1)^{l+n} (S | R)_{ln}^m(r'_{vu})$$

$$(l, n = 0, 1, \dots; m = -n, \dots, n),$$

данные осесимметричные коэффициенты достаточно вычислить для  $l \geq n \geq m \geq 0$  и  $u \geq v$ .

Потенциал (4) после проведенных разложений (5)–(8) подставляется в граничные условия (2), (3) и в результате некоторых преобразований задача сводится к решению  $2m + 1$  независимых линейных систем (для каждого  $m$ ) для определения неизвестных коэффициентов  $A_n^{(u)m}$ , через которые выражаются также и неизвестные  $E_n^{(u)m}$ . Данные системы удобно записать в матричном виде:

$$\mathbf{L}^m \mathbf{A}^m = \mathbf{D}^m \quad (9)$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где матрицы и вектора представляются как

$$\mathbf{L}^m = \{\mathbf{L}^{(vu)m}\}, \quad \mathbf{A}^m = \{\mathbf{A}^{(v)m}\}, \quad \mathbf{D}^m = \{\mathbf{D}^{(v)m}\}$$

$$(u, v = 1, \dots, N),$$

элементы которых, в свою очередь, скомпонованы следующим образом:

$$\mathbf{L}^{(vu)m} = \{L_{ln}^{(vu)m}\}, \quad \mathbf{A}^{(v)m} = \{A_n^{(v)m}\}^T,$$

$$\mathbf{D}^{(v)m} = \{D_n^{(v)m}\}^T \quad (u, v = 1, \dots, N;$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, l, n = |m|, |m| + 1, \dots).$$

Здесь знак «Т» обозначает операцию транспонирования. Элементы данных матриц вычисляются по следующим формулам:

$$L_{ln}^{(vu)m} = \begin{cases} B_l (S | R)_{ln}^m(r'_{uv}), & u \neq v, \\ \delta_{ln}, & u = v; \end{cases}$$

$$D_l^{(v)m} = -B_l C_l^{(\text{in})m}(\mathbf{r}'_v),$$

где введены обозначения

$$B_l = \frac{j_l(ka_v) j'_l(k_v a_v) - \kappa_v j'_l(ka_v) j_l(k_v a_v)}{h_l(ka_v) j'_l(k_v a_v) - \kappa_v h'_l(ka_v) j_l(k_v a_v)},$$

$$\kappa_v = \frac{k \rho_v}{k_v \rho_0}.$$

В случае монопольного источника излучения, расположенного в некоторой точке  $MS$  с  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ , падающее поле, соответствующее фундаментальному решению уравнения Гельмгольца, определяется по формуле:

$$\Psi_{\text{in}}^{(MS)}(\mathbf{r}) = -V_0 \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|}, \quad (10)$$

где  $V_0$  – амплитуда объемной скорости (или производительность) монополюного источника. Здесь и далее опускается временной множитель  $e^{-i\omega t}$  ( $\omega = kc_0$  – угловая частота внешнего поля). Положение монополюного источника задается расстоянием от него до центра 1-ой сферы  $d = |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_s| = |\mathbf{r}_s|$  и сферическим углом между осью  $Oz$  и вектором  $\mathbf{r}_s - \theta_s$  (рис. 1). Отметим, что в выбранной системе координат угол  $\varphi_s = \pm\pi/2$ . Тогда разложение функции (10) около центра  $q$ -ой сферы ( $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_q$ ) определяется как [8]:

$$\Psi_{\text{in}}^{(MS)} = -V_0 ik \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n S_n^{-m}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_q) R_n^m(\mathbf{r}_q).$$

Сравнение последнего выражения с разложением (6) дает следующую формулу:

$$\begin{aligned} C_n^{(in)m}(\mathbf{r}'_v) &= -V_0 ik S_n^{-m}(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_v) = \\ &= -V_0 ik h_n(k|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_v|) Y_n^{-m}(\theta_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_v}, \varphi_{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}'_v}). \end{aligned}$$

В случае плоской волны, распространяющейся в направлении  $\hat{\mathbf{n}}_{PW} = \sin\theta_{\text{in}} \times \sin\varphi_{\text{in}} \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta_{\text{in}} \hat{\mathbf{z}}$  в плоскости  $Oyz$  ( $\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$  – единичные вектора координатных осей  $Oy$  и  $Oz$  соответственно), падающее поле определяется по формуле

$$\Psi_{\text{in}}^{(PW)}(\mathbf{r}) = \frac{P_0}{i\omega\rho_0} e^{ik\hat{\mathbf{n}}_{PW} \cdot \mathbf{r}}, \quad (11)$$

где  $p_0$  – амплитуда плоской волны;  $\hat{\mathbf{n}}_{PW} \cdot \mathbf{r}$  – скалярное произведение векторов  $\hat{\mathbf{n}}_{PW}$  и  $\mathbf{r} = (r, \varphi, \theta)$  (знак «+» берется при  $\cos\theta \geq 0$ , а «-» – при  $\cos\theta < 0$ ); в выбранной системе координат значение  $\varphi_{\text{in}} = \pm\pi/2$ . Разложение функции (11) около центра  $v$ -й сферы будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{in}}^{(PW)} &= \frac{P_0}{i\omega\rho_0} e^{ik\hat{\mathbf{n}}_{PW} \cdot (\mathbf{r}_v + \mathbf{r}'_v)} = \\ &= \frac{4\pi p_0}{i\omega\rho_0} e^{ik\hat{\mathbf{n}}_{PW} \cdot \mathbf{r}'_v} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n i^n Y_n^{-m}(\theta_{\text{in}}, \varphi_{\text{in}}) R_n^m(\mathbf{r}_v). \end{aligned}$$

Сравнение последнего выражения с разложением (6) с учетом выбранной системы координат дает следующую формулу:

$$C_n^{(in)m}(\mathbf{r}'_v) = \frac{4\pi p_0}{i\omega\rho_0} e^{-ik|\mathbf{r}'_v| \cos\theta_{\text{in}}} i^n Y_n^{-m}(\theta_{\text{in}}, \varphi_{\text{in}}).$$

Связь между акустическим давлением и потенциалом определяется следующим образом:

$$p = \rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = i\omega\rho_0 \Psi,$$

что позволяет вычислить значения  $p$ ,  $p_{\text{scat}}$ ,  $p_{\text{in}}$  через соответствующие потенциалы с точностью до постоянной величины  $i\omega\rho_0$ .

## ЧИСЛЕННЫЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В методе повторного разложения по мультиполям потенциалы раскладываются в ряды по специальным функциям, в результате чего решение сводится к бесконечномерным системам матричных уравнений (9). В связи с чем при численной реализации решения данной системы возникает вопрос об усечении рядов при разложении. В работе [10] для случая звуконепроницаемых сфер представлен метод усечения данной системы, позволяющий получить точное устойчивое численное решение задачи, а в работе [11] для случая звукопроницаемых сфер проведено сравнение подходов к усечению рядов в разложении. Показано, что результат с хорошей степенью точности с помощью одного расчета дает подход, основанный на усечении всех рядов при фиксированном числе  $N_{tr}$  в каждом разложении. Данное число в зависимости от параметров определяется одной из эмпирических формул, выведенных либо в работе [8]:

$$N_{tr} = \begin{cases} [ekr'_{uv}] \text{ для малых } kr'_{uv}, \\ [ekr'_{uv}/2] \text{ для больших } kr'_{uv}, \end{cases} \quad (12)$$

либо в работе [12]:

$$N_{tr} = \left[ ka_u + \left( \frac{\ln(2\sqrt{2}\pi ka_u \varepsilon^{-1})}{2\sqrt{2}} \right)^{\frac{2}{3}} (ka_u)^{\frac{1}{3}} + 1 \right], \quad (13)$$

где  $[z]$  – целая часть числа  $z$ ;  $\varepsilon$  – искомая ошибка, связанная с коэффициентами Фурье;  $e$  – число Эйлера. Если же необходимо получить результат с определенной степенью точности, тогда применяется подход, основанный на сравнении двух последовательных значений суммы ряда [13].

В настоящей работе при усечении рядов была применена комбинация данных подходов: по эмпирическим формулам (12) и (13) определялось минимальное значение  $\min(N_{tr})$ . Затем, начиная с этой минимальной

величины, точность расчета контролировалась сравнением двух последовательных значений искомой суммы ряда (при  $n = N_{tr}$  и  $n = N_{tr} + 1$ ). Как только их относительная погрешность становилась меньше некоторого значения  $\delta$ , дальнейший расчет суммы ряда прекращался, и принималось значение при числе членов усечения ряда равном  $N_{tr}$ .

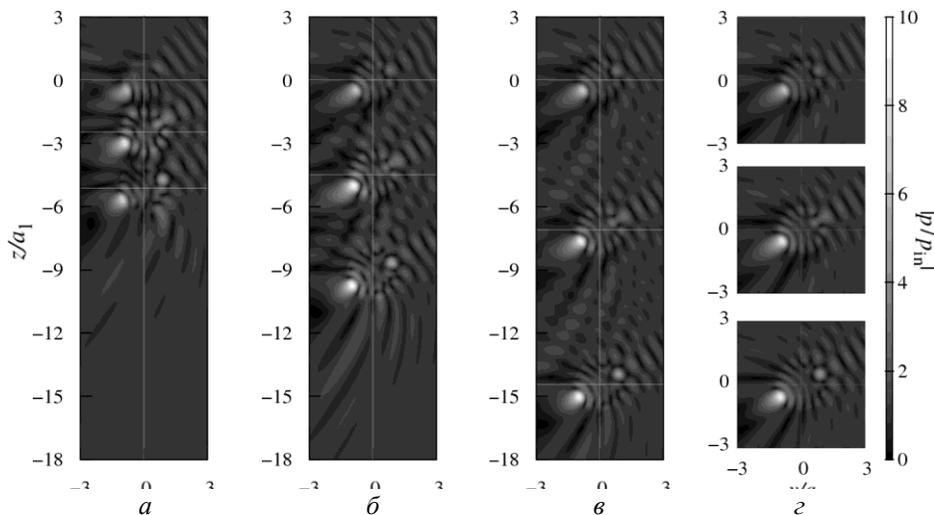
В результате численного моделирования написаны программные коды на языке Fortran 90 [14]. Для вычисления специальных функций  $h_l(z)$ ,  $j_l(z)$ ,  $P_l(z)$  и их производных были адаптированы программные коды [15], написанные на языке Fortran 77.

Рассмотрим случай сильного взаимодействия в системе, где основные параметры внутренней и внешней сред сопоставимы. Для этого исследуем систему из трех звукопроницаемых сфер с радиусами  $a_1 = 0,9$  мм,  $a_2 = 1$  мм и  $a_3 = 1,1$  мм и одинаковыми расстояниями между соседними сферами  $\chi_2 = \chi_3 \equiv \chi$ ;  $\chi$  – параметр, характеризующий расстояние между сферами – наименьшее расстояние между точками поверхности соседних сфер, отнесенное к радиусу 1-ой сферы. Тогда расстояние от центра 1-ой до остальных сфер определяется как:  $r_{12} = (1 + \chi)a_1 + a_2$  и  $r_{13} = (1 + 2\chi)a_1 + 2a_2 + a_3$ . Физические параметры зададим как:  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $c_0 = 1,5 \cdot 10^3$  м/с;  $\rho_1 = 1,1\rho_0$ ;  $c_1 = 0,95 \cdot 10^3$  м/с;  $f = 1350$  кГц, что позволит в дальнейшем провести сравнение с данны-

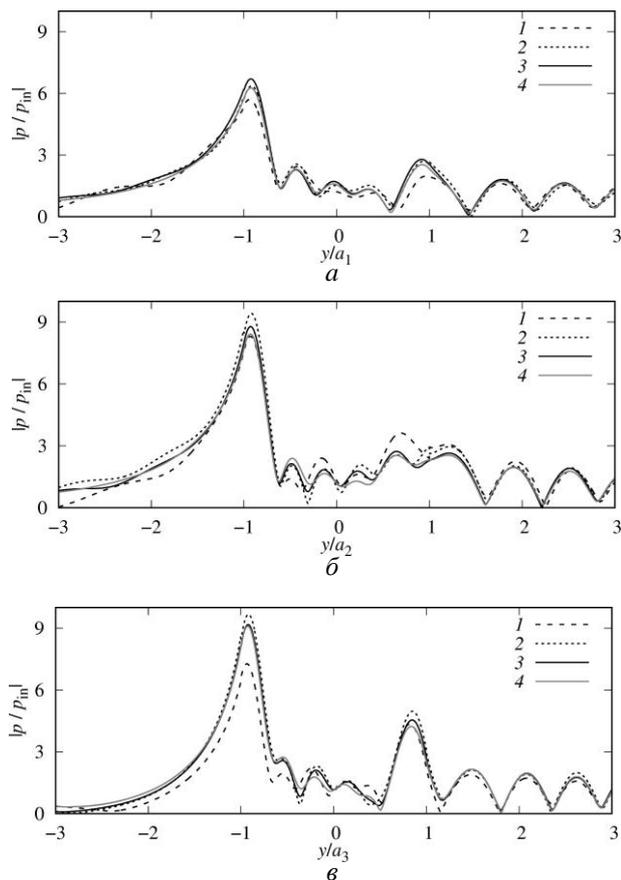
ми работы [16] для одиночной звукопроницаемой сферы. Отметим, что в данной работе задано отношение  $a/\lambda = 0,9$ , где  $\lambda = c_0/f$  – длина волны во внешней среде.

На рис. 2, а–в представлены диаграммы распределения модуля нормированного давления  $|p/p_{in}|$  вокруг и внутри трех сфер в плоскости  $Oyz$  для трех различных расстояний между сферами (значения параметра  $\chi = 0,34$ ;  $2,36$  и  $5$ ) в случае падения плоской волны с  $\hat{\mathbf{n}}_{PW} = (1, 2\pi/3, 3\pi/2)$ . Центры сфер лежат на пересечении горизонтальных и вертикальной прямых. На рис. 2, г для сравнения представлены также три диаграммы распределения давления для одиночных сфер тех же радиусов, что и в случае системы трех сфер. Данные диаграммы позволяют наблюдать зоны повышения давления, появляющиеся за сферами с противоположной к падающей волне стороны. На рис. 2, а все точки расчетной области имеют точность  $\delta = 0,1\%$  при  $N_{tr} = 17$ , а на рис. 2, б и в данная точность достигается уже при  $N_{tr} = 15$ .

На рис. 3 для случаев, приведенных на рис. 2, показаны графики распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  вдоль осей, на которых лежат максимумы амплитуды давления –  $z = y \operatorname{tg}(\theta_{in} - \pi/2) - r'_{iu}$ , в окрестности каждой сферы. А именно, вдоль осей, проходящих через центр  $i$ -ой сферы параллельно заданному вектору  $\hat{\mathbf{n}}_{PW}$ .

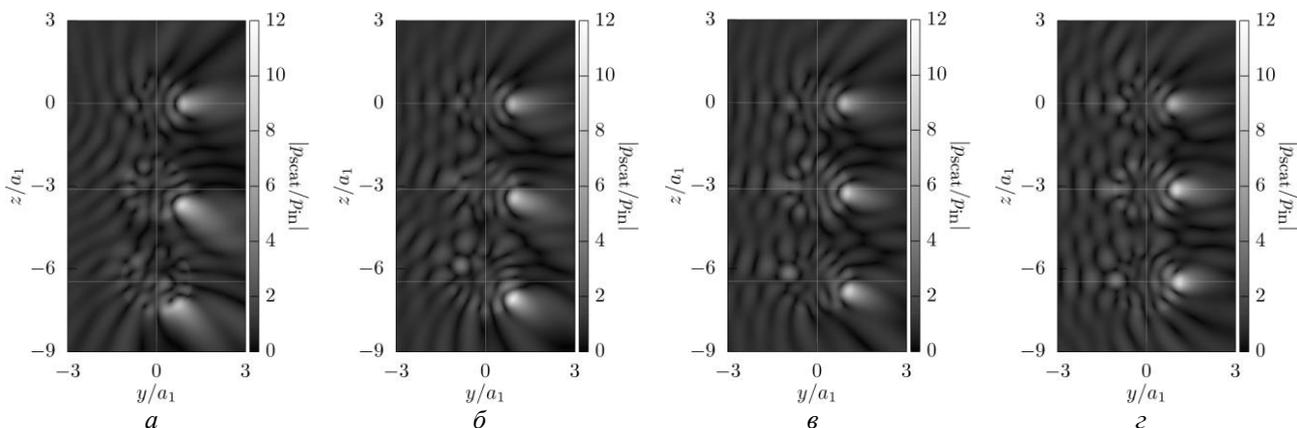


**Рис. 2.** Диаграммы распределения модуля нормированного давления  $|p/p_{in}|$  в плоскости  $Oyz$  вокруг и внутри трех звукопроницаемых сфер, центры которых расположены на одной оси, при воздействии плоской волны с  $\hat{\mathbf{n}}_{PW} = (1, 2\pi/3, 3\pi/2)$ :  
а –  $\chi = 0,34$ ; б –  $\chi = 2,36$ ; в –  $\chi = 5$ ; г – три одиночные сферы



**Рис. 3.** Графики распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  для случаев трех сфер при  $\chi = 0,34$  (1);  $\chi = 2,36$  (2) и  $\chi = 5$  (3) и одиночной сферы (4) соответствующего радиуса вдоль осей:

$$\begin{aligned}
 a - z &= y \operatorname{tg}(\theta_{in} - \pi/2) \text{ для 1-ой сферы;} \\
 б - z &= y \operatorname{tg}(\theta_{in} - \pi/2) - r'_{12} \text{ для 2-ой сферы;} \\
 в - z &= y \operatorname{tg}(\theta_{in} - \pi/2) - r'_{13} \text{ для 3-й сферы}
 \end{aligned}$$

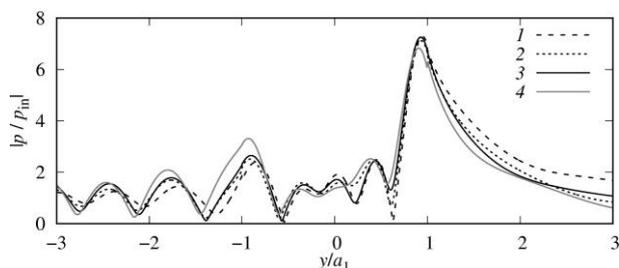


**Рис. 4.** Диаграммы распределения модуля нормированного давления  $|p/p_{in}|$  в плоскости  $Oyz$  вокруг и внутри трех звукопроницаемых сфер различных радиусов с центрами, расположенными на одной оси, при значении параметра  $\chi = 1$  и воздействии:

$$\begin{aligned}
 a - & \text{ монопольного источника с } d = 5a_1, \theta_s = \pi/2, \varphi_s = 3\pi/2; \\
 б - & \text{ монопольного источника с } d = 10a_1, \theta_s = \pi/2, \varphi_s = 3\pi/2; \\
 в - & \text{ монопольного источника с } d = 20a_1, \theta_s = \pi/2, \varphi_s = 3\pi/2; \\
 г - & \text{ плоской волны с } \theta_{in} = \pi/2, \varphi_{in} = \pi/2
 \end{aligned}$$

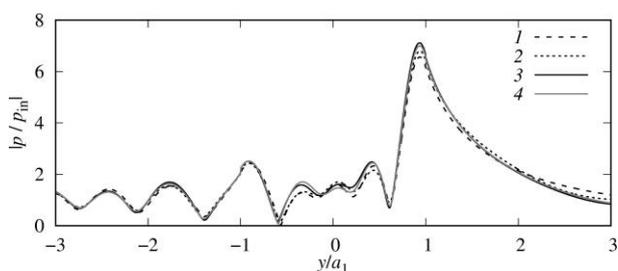
Из рис. 2 и 3 видно, что распределение давления вне и внутри сферы в случае трех сфер ( $N = 3$ ) при увеличении расстояния между ними (при  $\chi \rightarrow \infty$ ) стремится к распределению давления для одиночной сферы ( $N = 1$ ) того же радиуса. При этом распределение давления, полученное для центральной сферы, согласуется качественно и количественно с распределением для одиночной звукопроницаемой сферы (при  $a = a_2$ ), представленным в теоретической работе [16]. Отметим, что увеличение радиуса сферы приводит к росту максимального значения давления за сферой.

Далее проведем сравнение различных внешних воздействий на систему сфер, рассмотренных в предыдущем примере при  $\chi = 1$ . На рис. 4, а–в представлены диаграммы распределения модуля нормированного давления в случае монопольного источника излучения с  $\theta_s = \pi/2$ ,  $\varphi_s = 3\pi/2$  и  $d = 5a_1, 10a_1, 20a_1$  соответственно; а на рис. 4, г – в случае падения плоской волны с  $\theta_{in} = \varphi_{in} = \pi/2$ . На рис. 5 приведены соответствующие графики распределения нормированного давления вдоль оси  $Oy$ , на которой лежит центр 1-ой сферы. Видно, что максимальное значение при малых  $d$  ведет себя немонотонно: величина  $|p/p_{in}|$  при  $d = 5a_1$  выше, чем при  $d = 10a_1$ , которая меньше величины при  $d = 20a_1$ . При дальнейшем увеличении  $d$  ( $d \rightarrow \infty$ ) кривая для монопольного источника стремится к кривой для плоской волны.



**Рис. 5.** Графики распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  вдоль оси  $z = 0$  для трех сфер и различных внешних воздействий: монопольный источник излучения с  $\theta_s = \pi/2$ ,  $\varphi_s = 3\pi/2$ ,  $d = 5a_1$  (1),  $d = 10a_1$  (2),  $d = 20a_1$  (3) и плоская волна с  $\theta_{in} = \pi/2$ ,  $\varphi_{in} = \pi/2$  (4)

Рассмотрим изменение распределения давления для различного значения числа сфер  $N$  при воздействии монопольного источника излучения с  $d = 10a_1$ ,  $\theta_s = \pi/2$ ,  $\varphi_s = 3\pi/2$ . К сфере радиуса  $a_1 = 0,9$  мм последовательно добавляются сферы большего радиуса  $a_u = a_1 + 0,1(u - 1)$ , при этом расстояние между соседними сферами является постоянной величиной ( $\chi = 1$ ). На рис. 6 представлены графики для  $N = 1, 2, 3, 5$ . Видно, что в данном случае наличие других сфер увеличивает максимальное значение давления за 1-ой сферой для нескольких близлежащих сфер. По мере увеличения расстояния между 1-ой и  $u$ -ой сферами данное влияние уменьшается.



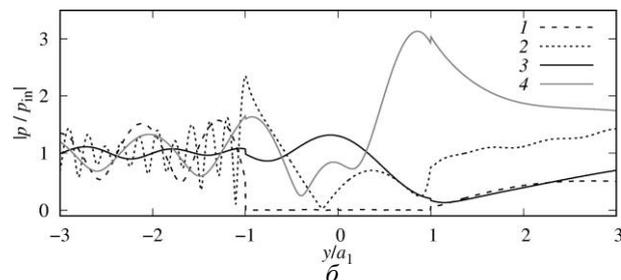
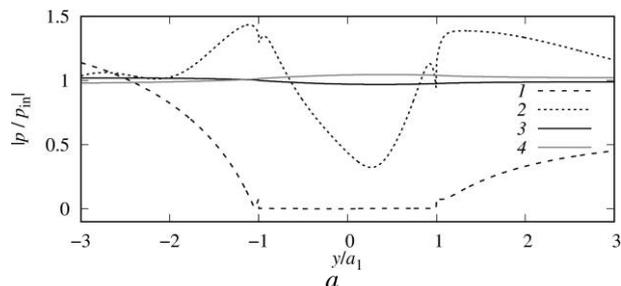
**Рис. 6.** Графики распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  вдоль оси  $z = 0$  для различного числа сфер:  $N = 1$  (1);  $N = 2$  (2);  $N = 3$  (3);  $N = 5$  (4)

Исследуем влияние различных физических параметров внешней и внутренней сред, представленных в табл. 1.

Таблица 1

**Плотность  $\rho$  и скорость звука  $c$  с различных сред при 20 °С**

Вещество	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$c$ , м/с
Воздух	1,205	343,1
Вода	998	1484
Глицерин	1260	1923



**Рис. 7.** Графики распределения нормированного давления  $|p/p_{in}|$  вдоль оси  $z = 0$  для трех сфер и монопольного источника излучения в случаях воздушных пузырьков в воде (1); капле воды в воздухе (2); капле глицерина в воде (3); капле воды в глицерине (4):  $a - f = 100$  кГц;  $b - f = 1$  МГц

На рис. 7 представлены кривые распределения давления вдоль оси  $z = 0$  для трех сфер с  $a_1 = 0,9$  мм,  $a_2 = 1$  мм,  $a_3 = 1,1$  мм и  $\chi = 1$  при воздействии монопольного источника излучения с  $d = 20a_1$ ,  $\theta_s = \pi/2$ ,  $\varphi_s = 3\pi/2$  для двух различных значений частот  $f = 100$  кГц и 1 МГц. Рассмотрено акустическое рассеяние от воздушных пузырьков в воде, капле воды в воздухе, капле глицерина в воде и капле воды в глицерине. Вдали от резонанса при малых значениях волнового радиуса  $ka \ll 1$  распределение давления вокруг воздушных пузырьков в воде ( $\rho_0 \gg \rho_u$ ) аналогично распределению давления вокруг мягких звуконепроницаемых сфер [16]. В случае капле воды в воздухе ( $\rho_0 \gg \rho_u$ ) для малых волновых чисел распределение давления во внешней среде аналогично распределению давления вокруг жестких звуконепроницаемых сфер. Из рис. 7, а видно, что в случае, когда физические параметры внешней и внутренней сред мало отличаются (плотность глицерина на 26 % больше плотности воды, а скорость звука – больше на 30 %), то рассеяние практически отсутствует при малых числах  $ka$ . Однако, при большей частоте (соответственно, большем значении  $ka$ ) рассеяние

становится значительным (рис. 7, б). При этом в случае каплей воды в глицерине (когда жидкость внутри капли имеет плотность и скорость звука меньше окружающей среды) распределение давления как внутри, так и снаружи сфер, более существенно, чем в случае каплей глицерина в воде.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе обобщена численная техника разложения потенциала поля по мультиполям на случай акустического рассеяния от множества звукопроницаемых сфер с центрами, расположенными на одной оси, при внешнем воздействии. Представленная математическая модель позволяет рассмотреть рассеяние как плоской волны, падающей под произвольным углом к оси, соединяющей центры сфер, так и сферической волны от монополюсного источника излучения, произвольным образом расположенного в пространстве.

Диаграммы, построенные в случае множества сфер, в настоящей работе получены впервые и позволяют с высокой точностью наглядно продемонстрировать полную картину распределения давления вне и внутри системы сфер, в том числе для определения зон понижения и повышения давления.

Результаты, полученные с помощью обобщенной численной методики, хорошо согласуются с известными теоретическими [16] данными. Корректность расчетов подтверждается также тем, что при увеличении расстояния между сферами распределение давления внутри и вне отдельной сферы системы стремится к распределению давления для одиночной звукопроницаемой сферы того же радиуса, а также, что при увеличении расстояния от монополюсного источника излучения до системы сфер распределение давления внутри и вне сфер стремится к распределению давления для случая падения плоской волны под тем же углом к оси, соединяющей центры сфер, что и угол между данной осью и осью, соединяющей монополюсный источник и центр первой сферы.

В результате численного анализа системы звукопроницаемых сфер были получены следующие результаты:

– в рассмотренных случаях увеличение радиуса сферы приводит к росту максимального значения давления за сферой;

– при малых волновых числах в случае, когда физические параметры внешней и внутренней сред мало отличаются, рассеяние практически отсутствует, а при больших волновых числах – становится существенным, когда плотность и скорость звука внутри сфер меньше соответствующих параметров внешней среды;

– при малых волновых числах вне резонанса распределение давления вокруг воздушных пузырьков в воде аналогично распределению давления вокруг мягких звукопроницаемых сфер;

– при малых волновых числах для случая каплей воды в воздухе распределение давления во внешней среде аналогично распределению давления вокруг жестких звукопроницаемых сфер.

Полученные результаты позволяют проводить тестовые расчеты для верификации общего численного алгоритма для случая множества произвольно расположенных в пространстве звукопроницаемых сфер разных радиусов.

*Автор выражает благодарность д-ру физ.-мат. наук, проф. Н. А. Гумерову за ценные советы по применению техники мультипольного разложения и д-ру физ.-мат. наук, проф. С. Ф. Урманчеву за плодотворные обсуждения и замечания по работе.*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Исимару А.** Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. 280 с. [ A. Ishimaru, *Wave Propagation Scattering*, (in Russian). Moscow: Mir, 1981. ]
2. **Сташкевич А. П.** Акустика моря. Л.: Судостроение, 1966. 356 с. [ A. P. Stashkevich, *Acoustics of the sea*, (in Russian). Leningrad: Sudostroyeniye, 1966. ]
3. **Алешин Н. П., Щербинский В. Г.** Радиационная, ультразвуковая и магнитная дефектоскопии металлоизделий. М.: Высшая школа, 1991. 271 с. [ N. P. Aleshin, V. G. Shcherbinsky, *Radiation, ultrasonic and magnetic flaw detection of metal products*, (in Russian). Moscow: Vysshaya shkola, 1991. ]
4. **Хилл К.** Применение ультразвука в медицине: физические основы. М: Мир, 1989. 589 с. [ C. Hill, *Physical principles of medical ultrasonics*, (in Russian). Moscow: Mir, 1989. ]

5. **Демин И. Ю., Прончатов-Рубцов Н. В.** Современные акустические методы исследований в биологии и медицине: учеб. метод. пособие. Н. Новгород: ННГУ, 2007. 121 с. [I. Yu. Demin, N. V. Pronchatov-Rubtsov, *Modern acoustic research methods in biology and medicine*, (in Russian). Nizhni Novgorod: NNGU, 2007. ]

6. **Каллистратова М. А.** Радиоакустическое зондирование атмосферы. М.: Наука, 1985. 197 с. [M. A. Kallistratova, *Radio-acoustic sounding of the atmosphere*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1985. ]

7. **Технология** создания, позиционируемого 3D звука. [Электронный ресурс]. URL: <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> (дата обращения 11.05.2021). [Technology for creating positioned 3D sound (2021, May 11). [Online]. Available: <https://www.ixbt.com/multimedia/3dsound-tech.html> ]

8. **Gumerov N. A., Duraiswami R.** Computation of scattering from  $N$  spheres using multipole reexpansion // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2002. Vol. 112, no. 6. Pp. 2688-2701. [N. A. Gumerov, R. Duraiswami, "Computation of scattering from  $N$  spheres using multipole reexpansion", in *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 112, no. 6, pp. 2688-2701, 2002. ]

9. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с. [G. Korn, T. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1974. ]

10. **Амаму М. Л.** A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case // *Acoustical Physics*. 2016. Vol. 62, no. 3. Pp. 280-291. [M. L. Amamou, "A theoretical and numerical resolution of an acoustic multiple scattering problem in three-dimensional case", in *Acoustical Physics*, vol. 62, no. 3, pp. 280-291, 2016. ]

11. **Насибуллаева Э. Ш.** Численное моделирование акустического рассеяния от коаксиальных звукопроницаемых сфер // *Многофазные системы*. 2019. Т. 14, № 2. С. 115–124. [E. Sh. Nasibullaeva, "Numerical simulation of acoustic scattering from coaxial sound-penetrable spheres", (in Russian), in *Multiphase Systems*, vol. 14, no. 2, pp. 115-124, 2019. ]

12. **Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics** / W. C. Chew, et al. Norwood: Artech House Antennas and Propagation Library, 2001. 932 p. [W. C. Chew, et al., *Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics*. Norwood: Artech House Antennas and Propagation Library, 2001. ]

13. **Duda R. O., Martens W. L.** Range dependence of the response of a spherical head model // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1998. Vol. 104. Pp. 3048-3058. [R. O. Duda, W. L. Martens, "Range dependence of the response of a spherical head model", in *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104, pp. 3048-3058, 1998. ]

14. **Насибуллаева Э. Ш.** Моделирование акустического рассеяния от коаксиальных сфер при внешнем воздействии: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020618862. Заявка № 2020617927. Дата поступления 20.07.2020. Дата регистрации 05.08.2020. [E. Sh. Nasibullaeva, "Simulation of acoustic scattering from coaxial spheres under external influence", (in Russian), *Certificate of state registration of the computer program* no. 2020618862, 2020. ]

15. **Zhang S., Jin J.** Computation of spherical functions. NY: Wiley-Interscience, 1996. 717 p. [S. Zhang, J. Jin, *Computation of spherical functions*. NY: Wiley-Interscience, 1996. ]

16. **Гринченко В.Т., Вовк И.В., Мацыпура В.Т.** Основы акустики. Киев: Наукова думка, 2009. 867 с. [V. T. Grinchenko, I. V. Vovk, V. T. Matsypura, *Fundamentals of Acoustics*, (in Russian). Kiev: Naukova dumka, 2009. ]

#### ОБ АВТОРЕ

**НАСИБУЛЛАЕВА Эльвира Шамилевна**, ст. науч. сотр. лаб. ММС Института механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН. Дипл. математик (БашГУ, 1997). Канд. физ.-мат. наук по механике жидкости, газа и плазмы (ИМех УФИЦ РАН, 2002). Иссл. в обл. механики многофазных сред.

#### METADATA

**Title:** Numerical analysis of acoustic scattering from sound-permeable spheres under external influence.

**Author:** E. Sh. Nasibullaeva

**Affiliation:**

Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS, Russia.

**Email:** [elvira@anrb.ru](mailto:elvira@anrb.ru).

**Language:** Russian.

**Source:** *Vestnik UGATU* (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 25, no. 2 (92), pp. 93-101, 2021. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** A generalized mathematical model of acoustic scattering from a set of sound-permeable spheres, the centers of which are located on the same axis, under the influence of either a spherical wave from a monopole radiation source or a plane wave is presented. Numerical analysis is performed and diagrams of the pressure distribution inside and outside the spheres are presented for various values of the system parameters (the number of spheres, the radii of the spheres, the distance between the spheres, the angle of incidence of the external wave, the distance from the center of the first sphere to the monopole radiation source, the physical parameters of the external and internal media) and the type of external influence.

**Key words:** sound-permeable sphere; acoustic scattering; numerical simulation; multipole decomposition method; plane wave; monopole radiation source.

**About author:**

**NASIBULLAEVA, Elvira Shamilevna**, Senior Researcher, Lab. of Mechanics of Multiphase Systems. Dipl. Mathematics (Bashkir State Univ., 1997). PhD of Phys. and Math. Sci. (Mavlyutov Institute of Mechanics, 2002).