

УДК 532.516.5, 532.517.2, 536.242, 62-713.1, 62-976

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ РАБОЧЕГО РЕЖИМА В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ ЖИДКОСТНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ МИКРОЗАХВАТА

И. Ш. НАСИБУЛЛАЕВ

sp.ishn@gmail.com

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН

Поступила в редакцию 26.04.2021

**Аннотация.** Проводится математическое и компьютерное исследование системы жидкостного охлаждения капиллярного микрозахвата. Построены математические модели: течения жидкости через камеру микрозахвата, нагрева радиатора горячей стороной элемента Пельтье и передача тепла от радиатора жидкости. Определялись следующие величины: максимальная установившаяся на радиаторе температура и время выхода системы охлаждения на рабочий режим. По результатам вычислительного эксперимента построены однопараметрические аналитические аппроксимации для зависимости температуры радиатора от времени и продолжительности переключения рабочего режима.

**Ключевые слова:** гидродинамика; теплопроводность; микрозахват; метод наименьших квадратов; метод конечных элементов; FreeFem++.

### ВВЕДЕНИЕ

Развитие микрофлюидики активно продолжается последние три десятилетия [1]. Интерес к данной области связан с особенностями течения жидкости в микро- и наномасштабах, позволяющими разрабатывать устройства с новыми или даже не имеющими аналогов в традиционных макросистемах свойствами. С уменьшением масштаба системы число Рейнольдса становится малым, а число Пекле может оставаться большим. Малое число Рейнольдса ( $Re = \rho u R / \mu \sim 1 \dots 100$ , где  $\rho$  – объемная плотность;  $u$  – скорость течения жидкости;  $R$  – ширина канала;  $\mu$  – динамическая вязкость) подразумевает ламинарный характер течения, соответствующий как большинству технических микроустройств, так и биологическим системам [2]. А большое число Пекле ( $Pe = u R / \chi \sim 10^2 \dots 10^4$ , где  $\chi$  – коэффициент теплопроводности) означает, что конвективный (адвективный) перенос тепла преобладает над диффузионным [3], следовательно, в микроустройствах (микротеплообменник, система охлаждения, микрозахват) необходимо учитывать оба механизма теплопереноса [4].

Для построения корректной компьютерной модели технического устройства необходимо определить набор физических параметров, соответствующих рабочим характеристикам устройства. Одни параметры можно найти непосредственно из физического эксперимента, а другие определяются из сравнения экспериментальных данных и результатов компьютерного моделирования, в котором они рассматриваются как подгоночные параметры. В моделях систем жидкостного охлаждения таким параметром является коэффициент теплопередачи  $\alpha$  между радиатором и жидкостью.

В работе [5] проведен анализ энергоэффективности использования активного охлаждения термоэлектрического модуля (ТЭМ) с помощью активной воздушной или жидкостной

системы охлаждения. Воздушное охлаждение в силу высокого теплового сопротивления воздуха имеет низкий КПД, а для работы жидкостного охлаждения требуется применение насоса, который дополнительно генерирует значительное количество тепла. Авторы [5] предложили систему пассивного жидкостного охлаждения с теплообменником на горячей стороне ТЭМ (с тепловой мощностью 120 Вт) и использованием открытого резервуара (термосифона) объемом 10 литров, соединенного с теплообменником трубками диаметром 12 мм) в качестве накопителя тепла с теплоотводом со стороны воздуха. Компьютерное моделирование показало хорошее согласование с экспериментальными данными (различие не более 14 % на первой стадии, когда температура на теплообменнике возрастала, и не более 5 % на второй стадии, когда температура на теплообменнике достигала насыщения). Средний коэффициент теплопередачи  $\alpha_a$  зависит от геометрии радиатора: при уменьшении зазора между ребрами (длиной  $h = 9$  мм) радиатора с 3 мм до 1 мм  $\alpha_a$  растет с 450 Вт/(м<sup>2</sup>К) до 650 Вт/(м<sup>2</sup>К); при уменьшении длины ребер радиатора с  $h = 9$  мм до 5 мм  $\alpha_a$  растет до 1000 Вт/(м<sup>2</sup>К). За время порядка 8 часов на радиаторе устанавливалась постоянная температура на 25 °С выше температуры окружающей среды, а амплитуда скорости течения жидкости в трубках достигала 8 см/с.

Эффективность системы охлаждения зависит от охлаждающего вещества. В работе [6] проведено сравнение эксперимента с моделированием системы охлаждения камеры с помощью элемента Пельтье с двумя вариантами отвода тепла: создаваемый вентилятором воздушный поток или текущая через радиатор жидкость. При расходе жидкости порядка 20 мл/с обеспечивался отвод тепловой мощности до 230 Вт. Жидкостное охлаждение позволяло снизить температуру на 19 °С, а воздушное – на 10 °С. Также показано, что с уменьшением размера камеры эффективность жидкостного охлаждения по сравнению с воздушным возрастает. Жидкостная система охлаждения более компактна (вместо радиатора с вентилятором остается только радиатор с расположенными внутри трубками), но требуется наличие внешнего насоса для циркуляции жидкости.

Для охлаждения электронных устройств одним из требований для системы охлаждения является размер, а эффективность охлаждения зависит от ее конструктивных особенностей и физических свойств жидкости [7]. В микроканалах отвод тепла происходит за счет конвективного теплопереноса жидкостью и возрастает с увеличением скорости жидкости за счет увеличения числа Пекле (отношение конвективного теплообмена к диффузионному). Из-за термического сопротивления на границе раздела в гладких каналах число Нуссельта (отношение теплообмена за счет конвекции к теплопроводности) снижается. В работе [8] в качестве системы жидкостного охлаждения испытаны три микротеплообменника с каналами шириной  $\delta W$ , составленными из длинных смещенных полос Т1 ( $\delta W = 1,22$  мм), коротких смещенных полос Т2 ( $\delta W = 1,22$  мм) и с каналами в виде шевронной структуры Т3 ( $\delta W = 1,69$  мм). Проведено сравнение с традиционным теплообменником с прямыми каналами Т4 ( $\delta W = 0,69$  мм). При размерах теплообменника 50×50 мм с расходом жидкости 230 мл/мин, тепловой мощностью нагревателя 40 Вт, температурой жидкости на входе 30 °С, максимальная температура составила 60 °С для Т4, 51 °С для Т1, 48 °С для Т2 и 44 °С для Т3. В работе [9] показано, что нельзя пренебрегать как эффектами вязкой диссипации во входной области прямого канала, так и зависимостью вязкости от температуры по всей длине канала. В [10] показано, что температурная зависимость вязкости жидкости оказывает значительное влияние на величину расхода жидкости, особенно при малом значении приложенного к микроканалу перепада давления.

В работе [11] представлена двумерная модель системы жидкостного охлаждения капиллярного микрозахвата [12]. Определено влияние геометрических и физических параметров камеры микрозахвата на эффективность системы охлаждения, а также найдена зависимость максимальной температуры, установившейся на радиаторе, от скорости течения охлаждающей жидкости и коэффициента теплопередачи между радиатором и жидкостью для стационарного течения и проведено исследование влияния нестационарного течения жидкости

на колебания температуры радиатора. Для работы жидкостной системы охлаждения необходим насос, обеспечивающий достаточный расход жидкости. Существующие микронасосы охватывают широкий диапазон применений [13], но их сложно использовать для системы охлаждения микрозахвата, поскольку требуется микронасос малого размера с небольшим расходом жидкости и гибкой системой управления. Модели течения жидкости через статическое гидросопротивление [14] сложно адаптировать для моделирования пьезоэлектрического микронасоса. Поэтому были разработаны алгоритмы моделирования течения жидкости в канале с динамически изменяемой геометрией [15]. В [16] модель была расширена: деформация трубки рассчитывалась с помощью уравнений упругости, решаемых на ее стенке. В работе [17] представлена трехмерная математическая и компьютерная модель взаимодействия потока жидкости в эластичной трубке, периодически сжимаемой пьезоэлементом. Используя осесимметричную модель колебаний системы пьезоэлементов, расположенных на эластичной трубке [18], предложена модель пьезоэлектрического микронасоса и получены аналитические формулы для зависимости среднего расхода жидкости от количества пьезоэлементов и их частоты колебаний. Данная формула может быть использована в программной части системы управления устройством в реальном времени. Разработана двумерная модель микронасоса, создающего течение жидкости (с расходом до 50 мкл/с) в плоском канале с помощью погруженного в него пьезоэлемента с поперечным изгибом [19]. Методами факторных вычислительных экспериментов второго порядка [20] предложен способ замены полного численного моделирования приближенными аппроксимациями, которые можно использовать с программным обеспечением системы управления техническим устройством.

В настоящей работе используется двумерная модель жидкостной системы охлаждения микрозахвата, представленная в [11] для изучения особенностей переключения режимов работы элемента Пельтье в системе жидкостного охлаждения микрозахвата.

### ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

На рис. 1 показана геометрия изучаемой модели с обозначением границ: внутренняя стенка камеры  $\Gamma_1$ ; граница между радиатором и жидкостью  $\Gamma_2$ ; входное  $\Gamma_3$  и выходное  $\Gamma_4$  отверстия; граница между радиатором и элементом Пельтье  $\Gamma_5$ . Рассматриваются два варианта геометрии:  $G_2$  с каналами, расположенными горизонтально у основания камеры, и радиатором, контактирующим с горячей стороной элемента Пельтье, и  $G_3^i$  с горизонтальными каналами, расположенными посередине ширины камеры, и радиатором, состоящим из  $i = 1$  или  $i = 3$  ребер. Механизм теплопереноса в камере охлаждения следующий: горячая сторона элемента Пельтье передает на радиатор тепловую мощность  $W$  через границу  $\Gamma_5$ , холодная жидкость втекает во входное отверстие  $\Gamma_3$ , нагревается через контакт с радиатором  $\Gamma_2$  (охлаждая его) и выводится через выходное отверстие  $\Gamma_4$ . Стенка  $\Gamma_1$  теплоизолирована. Соответствующие геометрии  $G_2$  и  $G_3^i$  расчетные сетки показаны на рис. 1.

Система уравнений, описывающая теплообмен в жидкостной системе охлаждения, включает в себя уравнения течения жидкости Навье – Стокса, непрерывности и теплопроводности. В результате нагрева жидкости изменяется ее плотность. Поскольку плотность изменяется на небольшую величину (в рабочем диапазоне температур не более 4 % между жидкостью во входном отверстии и жидкостью вблизи радиатора) и изменения плотности вдоль линий потока жидкости незначительны, в работе используется приближение несжимаемой жидкости с непостоянной плотностью.

Течение несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье – Стокса [21]:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность среды, зависящая от температуры  $T$ ;  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  – вектор скорости жидкости,  $t$  – время;  $\nabla$  – оператор набла;  $p$  – давление;  $\mu$  – динамическая вязкость, зависящая от температуры;  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$  – вектор ускорения свободного падения.

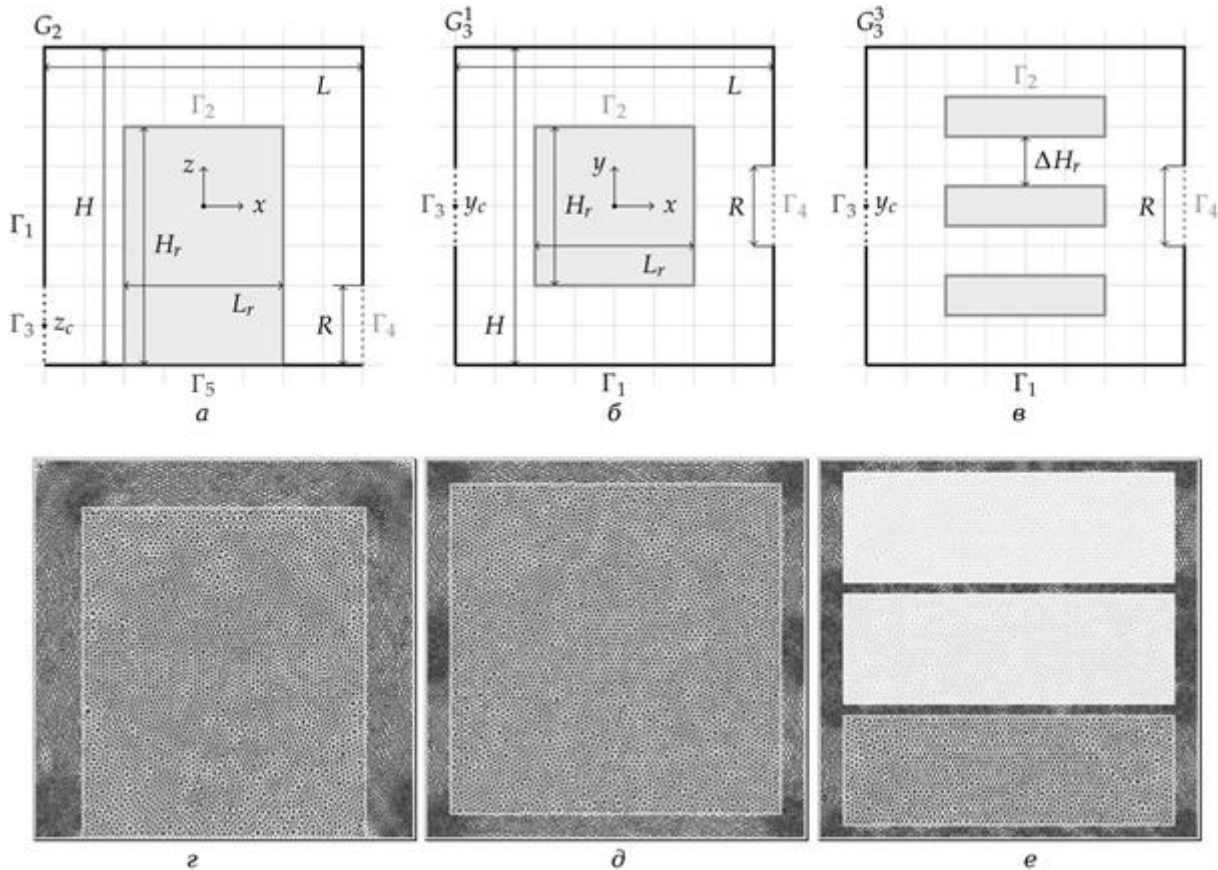


Рис. 1. Геометрии  $G_2$  (а),  $G_3^1$  (б),  $G_3^3$  (е) и соответствующие адаптивные расчетные сетки (z, d, e)

Уравнение непрерывности представляет собой закон сохранения массы в элементарном объеме жидкости:

$$K_f^{-1} \partial p / \partial t + \nabla \mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

где  $K_f$  – объемный модуль упругости жидкости (для воды  $K_f^{-1} \approx 5 \cdot 10^{-10} \cdot \text{Па}^{-1}$  и основным является второе слагаемое  $\nabla \mathbf{u}$ . Если пренебречь первым слагаемым, получится условие непрерывности для несжимаемой жидкости  $\nabla \mathbf{u} = 0$ . В расчетах использовалось уравнение в полном виде (2) из-за более высокой устойчивости численной схемы (аналог малой искусственной сжимаемости).

Распространение тепла в жидкости описывает уравнение теплопроводности [22]:

$$c_p \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \tag{3}$$

где  $c_p$  – изобарная удельная теплоемкость;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Распространение тепла в радиаторе описывается уравнением теплопроводности:

$$\partial T / \partial t = \chi_r \Delta T, \tag{4}$$

где  $\chi_r$  – коэффициент температуропроводности радиатора.

Уравнения (1)–(4) записывались в вариационной форме и решались численно методом конечных элементов в пакете численного моделирования *FreeFem++* [23]. Дискретизация по времени проводилась по неявной схеме Эйлера первого порядка.

Начальные условия соответствуют покоящейся жидкости  $u_x = u_y = 0$  при равномерном распределении температуры  $T = T_0$ .

Граничные условия на скорость жидкости (условие залипания и заданный профиль скорости на входном отверстии):

$$\begin{aligned} \Gamma_1, \Gamma_2 : u_x = 0, u_z = 0, \\ \Gamma_3(G_2) : u_x = 0, u_z = u_m \left[ 1 - \left( \frac{z_c - z}{R} \right)^2 \right], \\ \Gamma_3(G_3^i) : u_x = u_m \left[ 1 - \left( \frac{y_c - y}{R} \right)^2 \right], u_y = 0, \\ \Gamma_4 : u_y = 0, u_z = 0, \end{aligned}$$

где  $u_m$  – модуль максимальной скорости втекающей жидкости;  $z_c$  – координата центра входного отверстия (для геометрии  $G_3^i$  координата центра входного отверстия определяет  $y_c$ );  $R$  – ширина входного отверстия. Профиль скорости  $u_y(x)$  соответствует течению Пуазейля в плоском канале.

Граничные условия для температуры жидкости 1-го рода (через входное отверстие  $\Gamma_3$  втекает жидкость с температурой  $T_0$ ):  $T = T_0$  и 3-го рода (Ньютона – Рихмана, теплообмен между жидкостью и радиатором пропорционален разности температур жидкости  $T_f$  и радиатора  $T_r$ ):

$$\Gamma_2(G_2) : -\lambda(\partial T/\partial n) = \alpha(T_r - T_f),$$

где  $\alpha$  – коэффициент теплопередачи между твердым телом и жидкостью;  $n$  – нормаль к поверхности.

Граничные условия для температуры радиатора 2-го рода (закон Фурье) определяют тепловой поток от элемента Пельтье к радиатору:

$$\Gamma_5(G_2) : -\lambda_r(\partial T/\partial n) = q_T,$$

где  $\lambda_r = \chi_r c_{pr} \rho_r$  – коэффициент теплопроводности радиатора;  $c_{pr}$  – изобарная удельная теплоемкость;  $\rho_r$  – объемная плотность;  $q_T$  – плотность теплового потока, связанная с величиной тепловой мощности  $W$ , рассеиваемой элементом Пельтье соотношением

$$q_T = W/(\ell_{\Gamma_5} \ell_*),$$

где  $\ell_{\Gamma_5}$  – длина области контакта элемента Пельтье с радиатором вдоль оси  $Ox$ ;  $\ell_*$  – длина области контакта вдоль оси  $Oz$  (при моделировании использовалась длина  $\ell_* = \ell_{\Gamma_5}$ , т.е. площадь контакта элемента Пельтье с радиатором представляла собой квадрат размером  $\ell_{\Gamma_5} \times \ell_{\Gamma_5}$ ).

Для геометрии  $G_3^i$  граница  $\Gamma_5$  отсутствует (т.к. находится в другой плоскости), поэтому тепловой поток задается на границе  $\Gamma_2$ :

$$\Gamma_2(G_3^i) : -\lambda(\partial T/\partial n) = \alpha(T_r - T_f) + q_T,$$

с тепловым потоком

$$q_T = W/[2i(\ell_r + h_r)\ell_*].$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 1 показана геометрия рассматриваемой модели (с соблюдением пропорций). Жидкость втекает во входное отверстие  $\Gamma_3$ . В процессе теплообмена с радиатором  $\Gamma_2$  жидкость нагревается и выходит через отверстие  $\Gamma_4$ . Нагрев радиатора элементом Пельтье происходит через контактную область  $\Gamma_5$  (для  $G_2$ ) или непосредственно передачей тепла на  $\Gamma_2$  (для  $G_3^i$ ).

Для радиатора использовались параметры латуни марки Л96 [24]: объемная плотность  $\rho_r = 8850 \text{ кг/м}^3$ ; теплопроводность  $\lambda_r = 245 \text{ Вт/(м·К)}$ ; изобарная удельная теплоемкость  $c_{pr} = 389 \text{ Дж/(кг·К)}$ ; температуропроводность  $\chi_r = 7,117 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . Ускорение свободного падения  $g_z = -9,8 \text{ м/с}^2$  для  $G_2$  и вектор  $\mathbf{g} = 0$  для  $G_3^i$ .

Коэффициент теплопередачи  $\alpha$  между латунью и водой зависит от разности температуры между водой и радиатором, геометрии системы, скорости течения жидкости. Точное определение величины  $\alpha$  возможно только с помощью эксперимента. В расчетах использовалось значение  $\alpha = 1,5 \text{ кВт}/(\text{м}^2 \text{ К})$ , соответствующее экспериментальным данным течения воды через латунные трубки [25].

### ЗАВИСИМОСТЬ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Температура жидкости (воды) во входном канале составляет  $T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Физические свойства воды сильно зависят от температуры, поэтому необходимо учесть температурную зависимость для объемной плотности  $\rho(T)$ , динамической вязкости  $\mu(T)$ , коэффициента теплопроводности  $\lambda(T)$  и изобарной теплоемкости  $c_p(T)$ . Остальные величины, входящие в модель, вычисляются по формулам: кинематическая вязкость  $\nu(T) = \mu(T)/\rho(T)$ , коэффициент температуропроводности  $\chi(T) = \lambda(T)/(\rho(T) c_p(T))$ .

Аппроксимация физических величин, зависящих от температуры, проводилась по набору табличных значений  $y_i$  ( $i = (1, m)$ ,  $m$  – количество опытов, полученных в ходе эксперимента) методом наименьших квадратов [26]. Функция  $f(x, b)$  записывалась в виде многочлена  $n$ -й степени с неизвестными коэффициентами  $b_j$  в виде

$$f(x, b) = \sum_{j=0}^n b_j x^j \quad (5)$$

и минимизировалась сумма квадратов отклонений этой величины от табличных значений:

$$\frac{\partial}{\partial b_k} \sum_{i=1}^m \left( y_i - \sum_{j=0}^n b_j x_i^j \right)^2 = 0, \quad k = (0, n),$$

где частная производная берется по всем коэффициентам  $b_k$ , что приводит к системе из  $n + 1$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Матричная форма СЛАУ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Ab = B, \quad A_{k,j} &= \sum_{i=1}^m x_i^{j+k}, \\ B_{k,j} &= \sum_{i=1}^m y_i x_i^k. \end{aligned} \quad (6)$$

Поскольку в качестве диапазона данных используется температура в интервале ( $0 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $100 \text{ }^\circ\text{C}$ ), то в матрице  $A$  отношение минимального элемента к максимальному будет равно  $100^{2n}/m$ . Для  $n = 4$  и  $m = 11$  это значение составит  $10^{15}$ , а число обусловленности матрицы –  $10^{16}$ , т.е. порядка машинной точности, что ограничивает аппроксимацию (5) порядком полинома  $n = 3$ . Для решения этой проблемы проведена нормировка табличных данных на максимальный элемент:

$$\begin{aligned} x_i &\leftarrow x_i/s_x, \quad y_i \leftarrow y_i/s_y, \\ s_x &= \max(x), \quad s_y = \max(y). \end{aligned}$$

После этого решалась система уравнений (6) для нормированных данных (при  $n = 4$  и  $n = 5$  число обусловленности матрицы  $A$  составило  $\approx 10^5$  и  $\approx 10^7$ ) и решение  $b$  пересчитывалось для исходных табличных данных. Максимальный порядок полинома, после нормировки данных, обеспечивающий корректную аппроксимацию, составил  $n = 9$ . Точность аппроксимации рассчитывалась по среднему квадратичному отклонению полинома от экспериментальных данных  $\sigma$ :

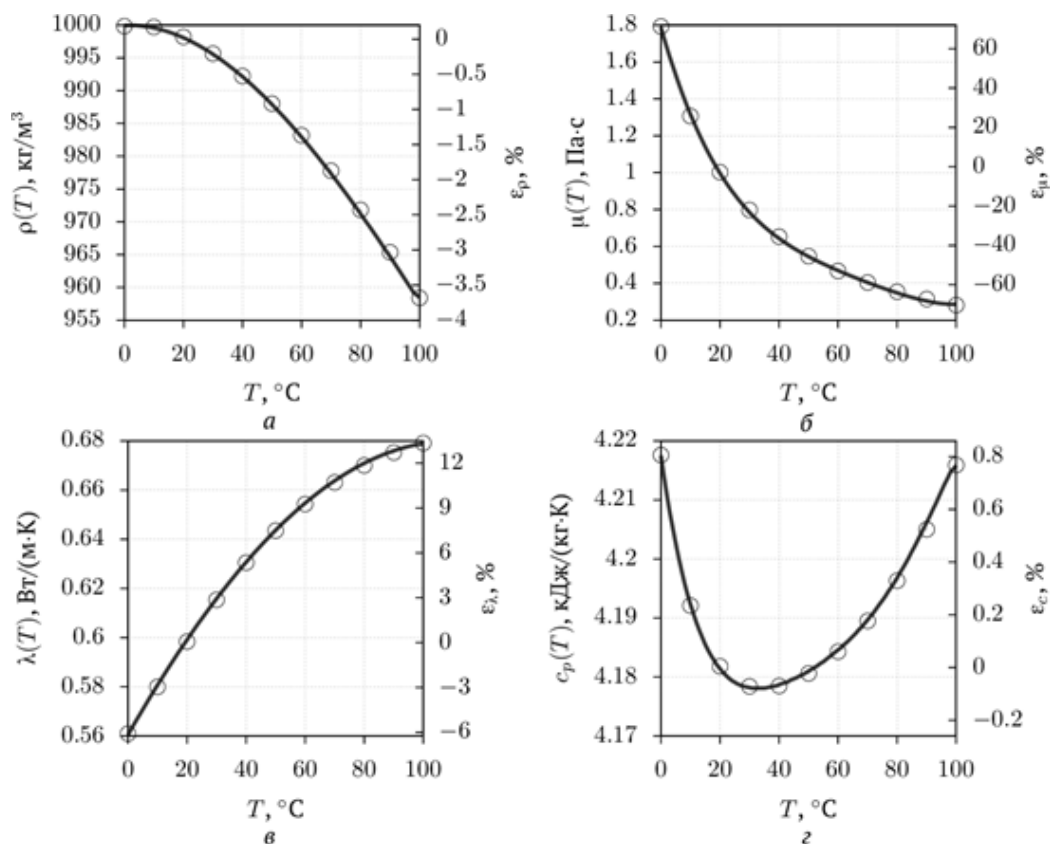
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m (y_i - f(x_i, b))^2}. \quad (7)$$

В итоге получены следующие аппроксимации физических величин в диапазоне температур  $T = 0, 10, \dots, 100 \text{ }^\circ\text{C}$  с использованием табличных данных из [27]:

$$\begin{aligned}
 \rho(T) &= \sum_{n=0}^3 b_{\rho,n} \Delta T^2, \sigma_{\rho} = 8,35 \cdot 10^{-2}, \\
 \mu(T) &= \sum_{n=0}^4 b_{\mu,n} \Delta T^2, \sigma_{\mu} = 6,32 \cdot 10^{-6}, \\
 \lambda(T) &= \sum_{n=0}^3 b_{\lambda,n} \Delta T^2, \sigma_{\lambda} = 3,66 \cdot 10^{-4}, \\
 c_p(T) &= \sum_{n=0}^5 b_{c,n} \Delta T^2, \sigma_c = 2,15 \cdot 10^{-4},
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

где  $\Delta T = T - T_z$  с коэффициентами аппроксимации (8), показанными в табл. 1, реперной температурой  $T_z = 273,15 \text{ K}$  и средним квадратичным отклонением  $\sigma$  (7). Результат аппроксимации показан на рис. 2. Также приведены величины отклонения (справа на осях графиков) физических параметров при изменении температуры  $T$  относительно температуры  $T_0$ , вычисленные по формуле:

$$\varepsilon_i = (i(T)/i(T_0) - 1) \cdot 100 \%$$



**Рис. 2.** Зависимость объемной плотности жидкости  $\rho$  (а), динамической вязкости  $\mu$  (б), коэффициента теплопроводности  $\lambda$  (в) и изобарной теплоемкости  $c_p$  (г) от температуры  $T$ . Символы – табличные значения [27], линии – аппроксимация по формулам (8)

Как видно из рис. 2, плотность меняется в диапазоне  $[-4 \%, 0,2 \%]$ ; динамическая вязкость –  $[-70 \%, 70 \%]$ ; коэффициент теплопроводности –  $[-6 \%, 13 \%]$ ; изобарная теплоемкость –  $[-0,1 \%, 0,8 \%]$ .

Таблица 1

**Коэффициенты аппроксимаций (8)**

$n$	$b_{\rho,n}$	$b_{\mu,n}$	$b_{\lambda,n}$	$b_{c,n}$
0	999,95	$1,79 \cdot 10^{-3}$	0,5605	4217,5
1	$2,02 \cdot 10^{-2}$	$-5,60 \cdot 10^{-5}$	$2,09 \cdot 10^{-3}$	3,49
2	$-5,92 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-6}$	$-8,38 \cdot 10^{-6}$	0,116
3	$1,57 \cdot 10^{-5}$	$-9,26 \cdot 10^{-9}$	$-6,66 \cdot 10^{-9}$	$-1,86 \cdot 10^{-3}$
4		$3,32 \cdot 10^{-11}$		$1,52 \cdot 10^{-5}$
5				$-4,72 \cdot 10^{-8}$

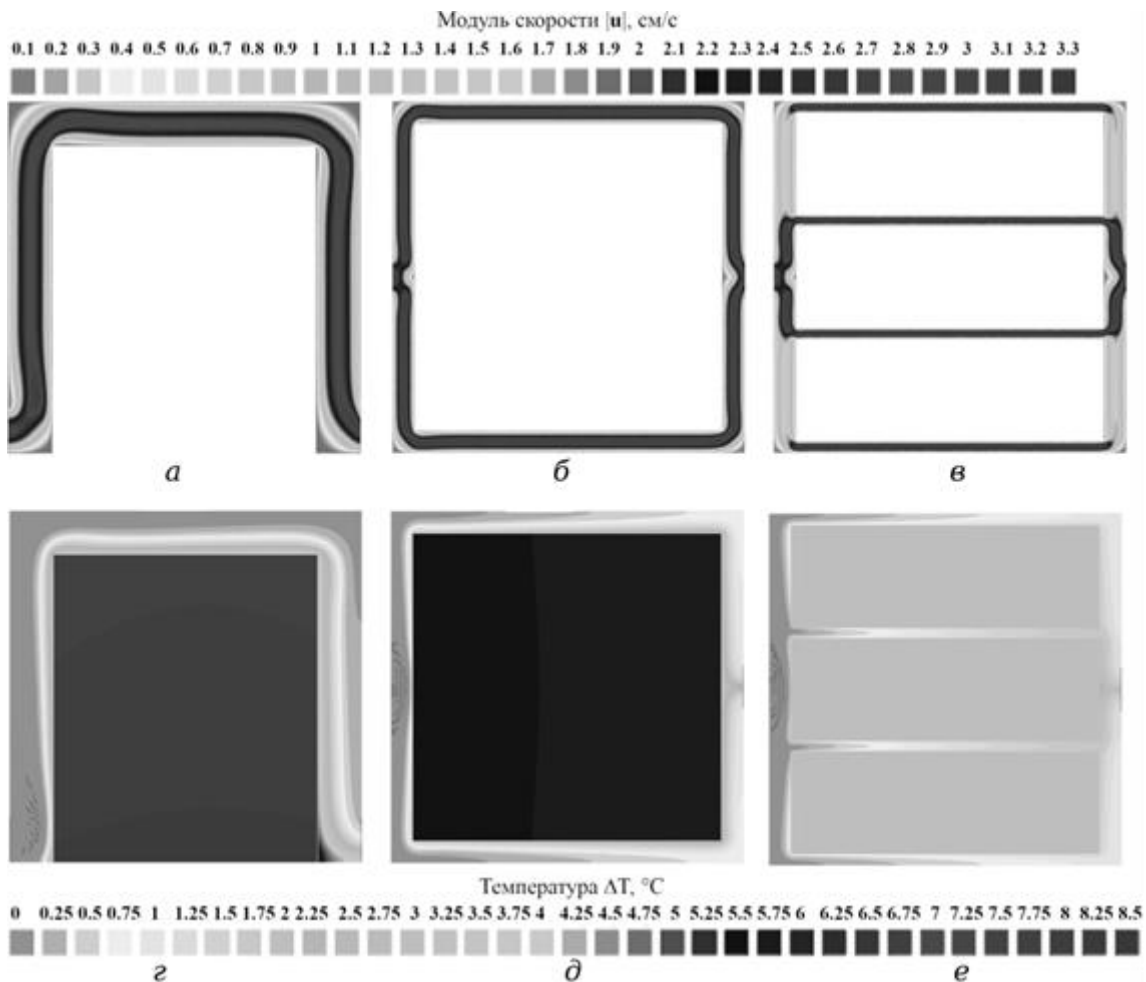
Для проверки энергетического баланса производится расчет тепловой мощности, уносимой из системы жидкостью:

$$W_f = \int_{\Gamma_4} c_p(T) \rho(T) (T - T_0) (\mathbf{u}(\Gamma) \cdot \mathbf{n}) \ell_s d\Gamma.$$

Со временем на радиаторе устанавливается постоянная температура  $\Delta T = T_r - T_0$  (рабочий режим микрозахвата). Период времени  $\tau_t$ , за которое система охлаждения выходит на рабочий режим, определяется из условия, что выводимая из камеры через выходное отверстие тепловая мощность  $W_f$  отличается от вводимой элементом Пельтье  $W$  не более, чем на 0,1 %.

### ДИНАМИЧЕСКАЯ СМЕНА РАБОЧЕГО РЕЖИМА

После включения элемента Пельтье за время  $\tau_t$  на радиаторе устанавливается постоянная температура – система охлаждения выходит на рабочий режим. Распределение модуля скорости и поле температуры рабочего режима в рассматриваемых геометриях показаны на рис. 3. На рис. 4 показаны зависимости максимальной температуры радиатора от времени при переключении тепловой мощности элемента в геометриях  $G_2$ ,  $G_3^1$ ,  $G_3^3$  с размером камеры  $8 \times 8$  мм. Значения  $\Delta T$  и  $\tau_t$  зависят от выбранной геометрии – в  $G_2$  максимальная температура  $\Delta T_m = \max(\Delta T) = 8,3$  °C и  $\tau_t = 73$  с; в  $G_3^1$  –  $\Delta T_m = 5,8$  °C и  $\tau_t = 52$  с; в  $G_3^3$  –  $\Delta T_m = 3,2$  °C и  $\tau_t = 29$  с.



**Рис. 3.** Распределение перепада температуры на радиаторе  $\Delta T$  и модуля скорости  $|u|$  в геометрии  $G_2$  (а, г),  $G_3^1$  (б, д),  $G_3^3$  (в, е);  $W = 1$  Вт;  $\alpha = 1,5$  кВт/(м<sup>2</sup>К);  $u_m = 3$  см/с; размеры камеры  $8 \times 8$  мм

Время установления рабочего режима совпадает с продолжительностью переключения на другой режим работы и не зависит от тепловой мощности элемента Пельтье. Данное свойство можно использовать для «быстрого» переключения режимов с понижением мощности



элемента Пельтье. Продемонстрируем это на примере переключения после достижения установившейся температуры  $T_1$ , тепловой мощности с  $W_1 = 1$  Вт на  $W_2 = 0,5$  Вт. Поскольку изменение температуры экспоненциальное (в начале – быстрое изменение, со временем выходящее на стационарное значение), то выключение элемента Пельтье приведет к быстрому остыванию радиатора до температуры  $T_2 = (W_2 / W_1)T_1$  за время  $\tau$ . После этого для поддержания нового рабочего режима элемент Пельтье включается на мощности  $W_2$ . Результаты «быстрого» переключения показаны на рис. 4, где промежуток времени, в котором происходит переключение режимов, обозначен закрашенной областью. Ускорение переключения для рассматриваемых геометрий составило  $k = \tau_i / \tau_t = 10$  раз. Для быстрого возврата в режим с  $W_1$  можно вначале задать мощность  $W > W_1$  и при достижении температуры  $T_1$  перевести элемент Пельтье на мощность  $W_1$ .

Используя результаты вычислительного эксперимента, построим приближенную аналитическую модель переключения режимов. Изменение температуры от времени под действием постоянного источника тепла определяется функцией  $\exp(-\beta t)$ , где параметр  $\beta$  пропорционален коэффициенту температуропроводности  $\beta \sim \chi$  и обратно пропорционален характерному размеру канала  $\beta \sim \ell^{-1}$  [27] и должен определяться из сравнения аналитической формулы с результатами численного расчета. Выход температуры радиатора на насыщение описывается формулой:

$$\Delta T(t) = \Delta T_m (1 - \exp(-\beta t)). \quad (9)$$

Подставляя из результатов численного расчета значения  $\Delta T(t_1)$ , полученные в момент времени  $t_1$ , и установившейся температуры  $\Delta T_m$ , решая уравнение (9) относительно  $\beta$ , получим:

$$\beta = -\ln(1 - \Delta T(t_1) / \Delta T_m) / t_1. \quad (10)$$

С помощью формулы (10) получены следующие значения параметра  $\beta$ , зависящие от геометрии:  $\beta = 0,1036$  для  $G_2$ ,  $\beta = 0,1411$  для  $G_3^1$ ,  $\beta = 0,2453$  для  $G_3^3$ . С уменьшением ширины каналов значения  $\beta$  пропорционально увеличиваются. На рис. 4 аппроксимации (9) показаны тонкими пунктирными линиями 1, 3 и 5 (до насыщения). Видно, что аппроксимация (9) практически полностью совпадает с результатами численного моделирования (толстые сплошные линии).

Построим аналитическую модель «быстрого» переключения с режима  $W_1$  ( $\Delta T_m = \Delta T_1$ ) на режим  $W_2$  через промежуточный режим  $W_3$ . Согласно (9) и линейной зависимости температуры  $\Delta T$  от тепловой мощности элемента Пельтье  $W$ , при переключении режимов  $W_1 \rightarrow W_3$  в момент времени  $t_1$  зависимость температуры радиатора  $\Delta T$  от времени  $t$  имеет следующий вид:

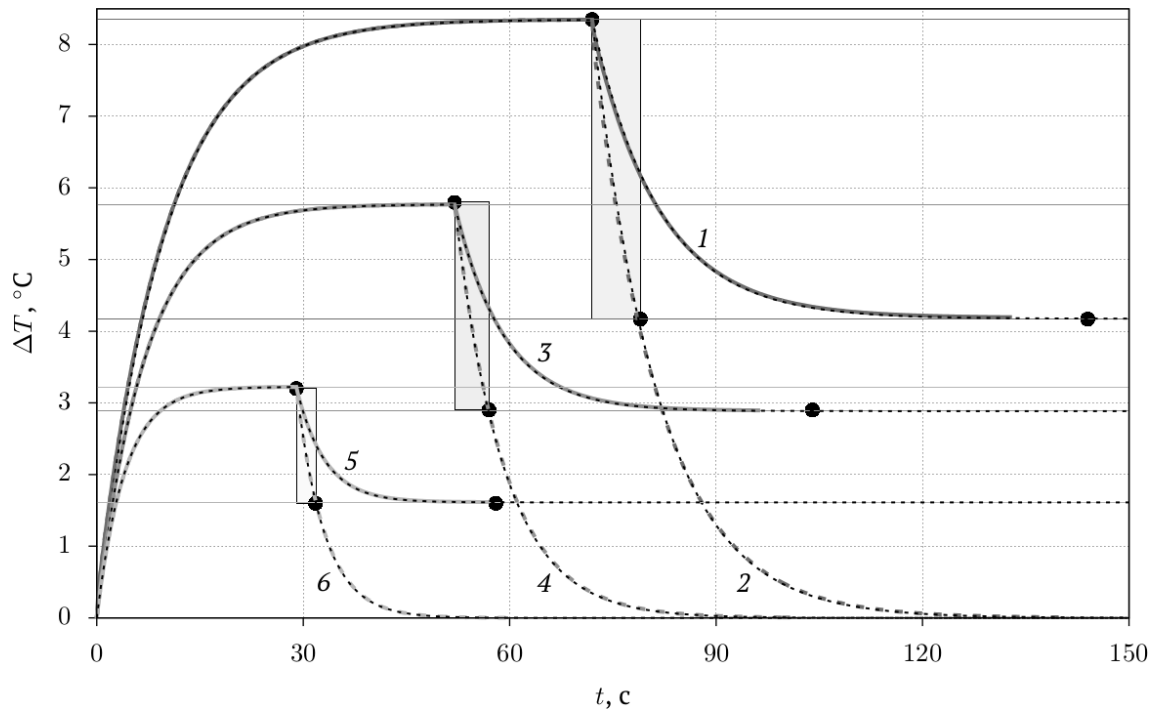
$$\Delta T(t) = \Delta T_1 \left[ (1 - m_{13}) e^{-\beta \delta t} + m_{13} \right], \quad (11)$$

$$m_{ij} = W_j / W_i, \quad \delta t = t - t_1.$$

Для определения продолжительности «быстрого» переключения (через которое нужно переключиться  $W_3 \rightarrow W_2$  для поддержания нового рабочего режима) подставим  $\Delta T(t) = m_{23} \Delta T_1$  в формулу (11):

$$\delta t = -\frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{m_{23} - m_{13}}{1 - m_{13}} \right). \quad (12)$$

С помощью формулы (12) были получены следующие значения времени переключения:  $\delta t = 6,69$  с для  $G_2$ ,  $\delta t = 4,91$  с для  $G_3^1$ ,  $\delta t = 2,83$  с для  $G_3^3$ . На рис. 4 аппроксимации (12) показаны черными пунктирными линиями 2, 4 и 6, а промежуток времени «быстрого» переключения – закрашенной областью.



**Рис. 4.** Зависимость  $\Delta T$  от времени  $t$  для геометрий  $G_2$  (линии 1 и 2),  $G_3^1$  (линии 3 и 4) и  $G_3^3$  (линии 5 и 6). Смена режима работы с  $W = 1$  Вт на режим  $W = 0,5$  Вт (сплошные линии) или  $W = 0$  Вт (пунктирные линии). Асимптоты рабочих режимов обозначены тонкими сплошными линиями.  $\alpha = 1,5$  кВт/(м<sup>2</sup>К);  $u_m = 3$  см/с; размеры камеры 8×8 мм. Аппроксимации (9) и (11) – черные пунктирные линии. Закрашенные области – «быстрое» переключение режимов

Приведенный способ «быстрого» переключения реализуется при постоянном направлении тока в элементе Пельтье. Если поменять полярность приложенного к элементу напряжения, то вместо передачи тепла радиатору элемент Пельтье будет его забирать, что позволяет расширить возможности для быстрого переключения режимов (например, для перехода с  $W_1 = 1$  Вт на  $W_2 = 0$  Вт, через промежуточное значение мощности  $W = -1$  Вт, где отрицательное значение тепловой мощности означает поглощение тепла).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлены математическая и компьютерная двумерные модели системы жидкостного охлаждения микрозахвата для трех вариантов геометрии камеры микрозахвата. Получены зависимости физических параметров рабочей жидкости от температуры в виде полиномов с помощью метода наименьших квадратов.

Проведен анализ выхода системы охлаждения на рабочий режим и динамической смены рабочего режима. Показан способ увеличения скорости переключения с одного режима на другой. По результатам вычислительного эксперимента построены однопараметрические аналитические аппроксимации для зависимости температуры радиатора от времени, а также продолжительности «быстрого» переключения. Полученные аналитические формулы могут быть использованы в программном обеспечении системы управления микрозахватом в реальном времени.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Convery N., Gadegaard N. 30 years of microfluidics // *Micro and Nano Engineering*. 2019. Vol. 2. Pp. 76-91. [ N. Convery, N. Gadegaard, "30 years of microfluidics", in *Micro and Nano Engineering*, vol. 2, pp. 76-91, 2019. ]
2. **Microfluidics** Based Microsystems: Fundamentals and Applications. NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. / S. Kakaç, et al. (eds.). Dordrecht: Springer, 2010. 618 p. [ S. Kakaç, et al. (eds.), *Microfluidics Based Microsystems: Fundamentals and Applications*. NATO Science for Peace and Security Series A: Chemistry and Biology. Dordrecht: Springer, 2010. ]

3. **Patankar S. V.** Numerical heat transfer and fluid flow. NEW York: Taylor and Francis, 1980. 197 p. [ S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*. New York: Taylor and Francis, 1980. ]
4. **Cotta R. M., Knupp D. C., Naveira-Cotta C. P.** Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems. Cham: Springer, 2016. 164 p. [ R. M. Cotta, D. C. Knupp, C. P. Naveira-Cotta, *Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems*. Cham: Springer, 2016. ]
5. **Simulation-driven** design of a passive liquid cooling system for a thermoelectric generator / M. J. Deasy, et al. // *Applied Energy*. 2017. Vol. 205. Pp. 499-510. [ M. J. Deasy, et al., "Simulation-driven design of a passive liquid cooling system for a thermoelectric generator", in *Applied Energy*, vol. 205, pp. 499-510, 2017. ]
6. **Afshari F.** Experimental and numerical investigation on thermoelectric coolers for comparing air-to-water to air-to-air refrigerators // *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*. 2020. Vol. 144. Pp. 855-868. [ F. Afshari, "Experimental and numerical investigation on thermoelectric coolers for comparing air-to-water to air-to-air refrigerators", in *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, vol. 144, pp. 855-868, 2020. ]
7. **Tullius J. F., Vajtai R., Bayazitoglu Y.** A Review of Cooling in Microchannels // *Heat Transfer Engineering*. 2011. Vol. 32, no. 7-8. Pp. 527-541. [ J. F. Tullius, R. Vajtai, Y. Bayazitoglu, "A Review of Cooling in Microchannels", in *Heat Transfer Engineering*, vol. 32, no. 7-8, pp. 527-541, 2011. ]
8. **Advanced** Micro-Heat Exchangers for High Heat Flux / C.-Y. Yang, et al. // *Heat Transfer Engineering*. 2007. Vol. 28, no. 8-9. Pp. 788-794. [ C.-Y. Yang, et al., "Advanced Micro-Heat Exchangers for High Heat Flux", in *Heat Transfer Engineering*, vol. 28, no. 8-9, pp. 788-794, 2007. ]
9. **Nonino C., Giudice S. D., Savino S.** Temperature-Dependent Viscosity and Viscous Dissipation Effects in Microchannel Flows With Uniform Wall Heat Flux // *Heat Transfer Engineering*. 2010. Vol. 31, no. 8. Pp. 682-691. [ C. Nonino, S. D. Giudice, S. Savino, "Temperature-Dependent Viscosity and Viscous Dissipation Effects in Microchannel Flows With Uniform Wall Heat Flux", in *Heat Transfer Engineering*, vol. 31, no. 8, pp. 682-691, 2010. ]
10. **Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш.** Влияние температуры на динамику течения жидкости в технических системах с жиклерами // Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН. 2016. Т. 11, № 1. С. 1–9. [ I. Sh. Nasibullayev, E. Sh. Nasibullaeva, "The effect of temperature on the fluid flow dynamics in technical systems with jets", (in Russian), in *Trudy Instituta mekhaniki im. R. R. Mavlyutova UFICz RAN*, vol. 11, no. 1, pp. 1-9, 2016. ]
11. **Насибуллаев И. Ш., Даринцев О. В.** Компьютерное двумерное моделирование системы жидкостного охлаждения микрозахвата // Вычислительные технологии. 2021. Т. 26, № 2. С. 4–20. [ I. Sh. Nasibullayev, O. V. Darintsev, "Computer 2D modelling of a micro-grip fluid cooling system", (in Russian), in *Vychislitelnye tekhnologii*, vol. 26, no. 2, pp. 4-20, 2021. ]
12. **Даринцев О. В., Мигранов А. Б.** Капиллярный микрозахват с обратной связью // Патент № 2261795. Опубл. 10.10.2005. Бюл. № 28. [ O. V. Darintsev, A. B. Migranov, "Capillary micro-grip with feedback", Patent RF 2261795, 2005. ]
13. **Laser D. J., Santiago J. G.** A Review of Micro Pumps // *Journal of Micromechanics and Microengineering*. 2004. Vol. 14, No. 6. Pp. R35-R64. [ D. J. Laser, J. G. Santiago, "A Review of Micro Pumps", in *Journal of Micromechanics and Microengineering*, vol. 14, no. 6, pp. R35-R64, 2004. ]
14. **Bruus H.** Theoretical microfluidics. Lecture notes, third edition. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. 247 p. [ H. Bruus, *Theoretical microfluidics. Lecture notes, third edition*. MIC Department of Micro and Nanotechnology Technical University of Denmark, 2006. ]
15. **Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш.** Течение жидкости через гидросопротивление с динамически изменяемой геометрией // Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова УНЦ РАН. 2017. Т. 12, № 1. С. 59–66. [ I. Sh. Nasibullayev, E. Sh. Nasibullaeva, "Fluid flow through the hydraulic resistance with a dynamically variable geometry", (in Russian), in *Trudy Instituta mekhaniki im. R. R. Mavlyutova UNCz RAN*, vol. 12, no. 1, pp. 59-66, 2017. ]
16. **Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш., Даринцев О. В.** Изучение течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом канал // Многофазные системы. 2018. Т. 13, № 3. С. 1–10. [ I. Sh. Nasibullayev, E. Sh. Nasibullaeva, O. V. Darintsev, "Study of fluid flow through a channel deformed by piezoelement", (in Russian), in *Mnogofaznye sistemy*, vol. 13, no. 3, pp. 1-10, 2018. ]
17. **Насибуллаев И. Ш., Насибуллаева Э. Ш., Даринцев О. В.** Моделирование течения жидкости через деформируемый пьезоэлементом эластичный микроканал системы охлаждения микрозахвата // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 12. С. 740–750. [ I. Sh. Nasibullayev, E. Sh. Nasibullaeva, O. V. Darintsev, "Simulation of fluid flow through a elastic microchannel deformed by a piezoelement in microgrip cooling systems", (in Russian), in *Mekhatronika, avtomatizaciya, upravlenie*, vol. 20, no. 12, pp. 740-750, 2019. ]
18. **Piezoelectric** Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation / I. Sh. Nasibullayev, et al. // *Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings"*. Smart Innovation, Systems and Technologies. Singapore: Springer, 2021. Vol. 187. Pp. 525-536. [ I. Sh. Nasibullayev, et al., "Piezoelectric Micropumps for Microrobotics: Operating Modes Simulating and Analysis of the Main Parameters of the Fluid Flow Generation", in *Proceedings of 15th International Conference on Electromechanics and Robotics "Zavalishin's Readings"*. Smart Innovation, Systems and Technologies, vol. 187, pp. 525–536, 2021. ]
19. **Насибуллаев И. Ш., Даринцев О. В.** Двумерная динамическая модель взаимодействия жидкости и пьезоэлектрического привода с поперечным изгибом в плоском канале // Многофазные системы. 2019. Т. 14, № 4. С. 220–232. [ I. Sh. Nasibullayev, O. V. Darintsev, "Two-dimensional dynamic model of the interaction of a fluid and a piezoelectric bending actuator in a plane channel", (in Russian), in *Mnogofaznye sistemy*, vol. 14, no. 4, pp. 220-232, 2019. ]

20. **Насибуллаев И. Ш.** Разработка компьютерной модели основного элемента агрегата дозирования топлива // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 2. С. 26–41. [ I.Sh. Nasibullayev, "The development of a computer model for the main element of the fuel metering unit", (in Russian), in *Vychislitelnye tekhnologii*, vol. 21, no. 2, pp. 26-41, 2016. ]
21. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с. [ L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics. Vol. 6. Hydrodynamics*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1987. ]
22. **Сивухин Д. В.** Общий курс физики: термодинамика и молекулярная физика. М.: Физматлит, 2006. 345 с. [ D. V. Sivukhin, *General physics course: thermodynamics and molecular physics*, (in Russian). Moscow: Fizmatlit, 2006. ]
23. **Hecht F.** New development in FreeFem++ // J. of Numer. Math. 2012. Vol. 20, no. 3-4. Pp. 251-265. [ F. Hecht, "New development in FreeFem++", in *J. of Numer. Math.*, vol. 20, no. 3-4, pp. 251-265, 2012. ]
24. **ГОСТ 15527-2004.** Сплавы медно-цинковые (латуни), обрабатываемые давлением. М.: ИПК Издательство стандартов, 2004. 7 с. [ *Pressure treated copper zinc alloys (brasses)*, (in Russian), Federal standard 15527-2004, Moscow, IPK Izdatelstvo standartov, 2004. ]
25. **Шляхин П. Н., Бершадский М. Л.** Краткий справочник по паротурбинным установкам. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1961. 128 с. [ P. N. Shlyakhin, M. L. Bershadsky, *A short guide to steam turbine installations*, (in Russian). Moscow-Leningrad: Gosenergoizdat, 1961. ]
26. **Handbook of Linear Algebra.** 2nd Edition / L. Hogben (ed.). New York: CRC Press, 2014. 1904 p. [ L. Hogben (ed.), *Handbook of Linear Algebra, 2nd Edition*. New York: CRC Press, 2014. ]
27. **Волков А. И., Жарский И. М.** Большой химический справочник. Мн.: Современная школа, 2005. 608 с. [ A. I. Volkov, I. M. Zharskiy, *Big chemical reference book*, (in Russian). Minsk: Sovremennaya shkola, 2005. ]
28. **Тихонов А. Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики: учебник для вузов. 7-е изд. Москва: Наука, 2004. 798 с. [ A. N. Tikhonov, A. A. Samarsky, *Equations of mathematical physics: textbook for universities, 7th ed.*, (in Russian). Moscow: Nauka, 2004. ]
29. **Riffat S. B., Ma X.** Thermoelectrics: a review of present and potential applications // Applied Thermal Engineering. 2003. Vol. 23, Iss. 8. Pp. 913-935. [ S. B. Riffat, X. Ma, "Thermoelectrics: a review of present and potential applications", in *Applied Thermal Engineering*, vol. 23, iss. 8, pp. 913-935, 2003. ]

#### ОБ АВТОРЕ

**НАСИБУЛЛАЕВ Ильдар Шамилевич**, ст. науч. сотр. лаборатории «Робототехника и управление в технических системах». Дипл. физик (БашГУ, 2000). Канд. физ.-мат. наук (ИФМК УФИЦ РАН, 2005). Иссл. в обл. математического и компьютерного моделирования.

#### METADATA

**Title:** Analytical analysis of operating mode switching in a 2D model of a fluid cooling system of the micro-gripper.

**Author:** I. Sh. Nasibullayev

**Affiliation:** Mavlyutov Institute of Mechanics, UFRC RAS, Russia

**Email:** sp.ishn@gmail.com

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 25, no. 3 (93), pp. 120-131, 2021. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** In this work, a mathematical and computer study of the fluid cooling system of a capillary micro-gripper is carried out. Mathematical models of the fluid flow through the micro-gripper chamber, the heating of the radiator by the hot side of the Peltier element, and the heat transfer from the fluid radiator are constructed. The following values were determined: the maximum temperature established on the radiator and the time for the cooling system to reach the operating mode. Based on the results of numerical calculations, one-parameter analytical approximations were constructed for the dependence of the radiator temperature on time, as well as the duration of switching the operating mode.

**Key words:** hydrodynamics; thermal conductivity; micro-gripper; least square method; finite element method; FreeFem++.

**About author:**

**NASIBULLAYEV, Ildar Shamilevich**, Senior researcher of Laboratory "Robotics and Control in Technical Systems". Dipl. Physics (BSU, 2000). Cand. of Phys. and Math. Sci. (IMCP UFRC RAS, 2005). Research in mathematical and computer simulations.