

УДК 539.374

## МЕТОД СПЛАЙНОВ В РАСЧЕТАХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

В. П. ПАВЛОВ

victor.pavlov.51@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 09.10.2016

**Аннотация.** Рассматриваются возможности метода сплайн-функций степени 5 дефекта 1 для расчета критических сил при потере устойчивости прямого стержня, нагруженного продольной силой, при различных способах закрепления его концов. На примере решения ряда тестовых задач, имеющих точное аналитическое решение, анализируется точность предлагаемого метода. Показано, что реализованный алгоритм применения метода сплайн-функций степени 5 позволяет определять значения критических сил с весьма высокой точностью, ограничением которой являются только возможности современных компьютеров. Результаты расчетов по методу сплайнов сопоставляются с результатами расчетов критических сил в пакете ANSYS. Наблюдается ряд преимуществ по точности предлагаемого метода сплайнов в сравнении с методами, реализованными в ANSYS.

**Ключевые слова:** стержни, потеря устойчивости, критические силы, сплайны, ANSYS, математическое моделирование

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широко распространено мнение, что приобретя современный вычислительный комплекс типа ANSYS, можно, не утруждая себя углубленным изучением механики деформируемого твердого тела, получать решения задач о прочности, жесткости, потере устойчивости и колебаниях разнообразных конструкций с очень высокой точностью.

При этом, естественно, на первое место выходит задача поиска необходимых финансовых ресурсов, так как все пакеты типа ANSYS весьма дороги.

Конечно, ведущие конструкторские и исследовательские организации такие средства находят, и работники таких организаций начинают считать, что теперь у них не будет проблем с расчетами на прочность, жесткость и устойчивость конструкций любого вида. При этом они уверены, что необходимая точность расчетов уже гарантирована наличием сертификатов на применяемые вычислительные комплексы. В итоге большинство пользователей вычислительных комплексов им верят и не пытаются провести самостоятельную проверку точности применяемых программ на тестах, отличающихся от тестов создателей программ.

В нашей стране широкое распространение получил вычислительный комплекс ANSYS, который считается одним из самых мощных.

В данной статье, отказавшись от безусловного преклонения перед пакетом ANSYS, было проведено объективное исследование его точности при решении задачи об устойчивости прямого стержня в зависимости от числа применяемых конечных элементов.

Также для решения задачи устойчивости был реализован разрабатываемый автором метод сплайнов и оценена его точность в сравнении с точностью пакета ANSYS. Результаты исследований представлены в данной статье.

### 1. РЕЗУЛЬТАТЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ ДЛЯ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ В ПАКЕТЕ ANSYS

В документации к ANSYS приводится текст программы VM127, на основе которой дается оценка точности пакета ANSYS при решении задачи об устойчивости прямого стержня постоянного поперечного сечения при защемлении нижнего конца стержня и приложении продольной критической силы к верхнему свободному концу стержня.

Исходные данные в задаче VM127 заданы в американской системе единиц: длина стержня  $l = 100 \text{ in}$ , поперечное сечение квадратное

$b \times h$  при  $b = h = 0,5$  in, модуль упругости материала  $E = 30 \cdot 10^6$  psi. В документации по ANSYS численное решение сопоставляется с известным точным решением, для которого при рассматриваемых условиях закрепления стержня значения критических сил  $F_{кр}^{(m)}$  определяются формулой [1, 2]:

$$F_{кр}^{(m)} = \frac{\pi^2 EI_x}{2l^2} (2m-1)^2, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где  $m$  – номер формы потери устойчивости.

Чтобы объективно подойти к вопросу оценки точности, выполним по программе VM127 расчеты критических сил  $F_{кр}^{(m)}$  для 1-ой, 2-ой, 3-ей, 5-ой и 10-ой форм потери устойчивости на сетках различной размерности при числе конечных элементов  $M = 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1 \cdot 10^3, 2 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^3, 1 \cdot 10^4, 2 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^4, 1 \cdot 10^5$ .

Точность расчетов оценим десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки  $\lg |\delta F_{кр}|$ :

$$\lg |\delta F_{кр}| = \lg |(F_{кр}^{(T)} - F_{кр}) / F_{кр}^{(T)}|, \quad (2)$$

где  $F_{кр}$  – расчетное значение критической силы при потере устойчивости стержня;  $F_{кр}^{(T)}$  – точное значение критической силы при потере устойчивости стержня,

Результаты численных расчетов в пакете ANSYS представлены для различных форм потери устойчивости на рис. 1 графиками зависимостей логарифма относительной ошибки  $\lg |\delta F_{кр}|$  от десятичного логарифма  $\lg M$  числа конечных элементов  $M$  по длине стержня.

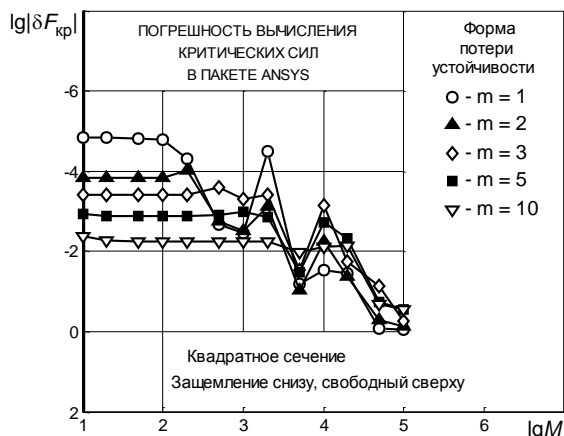


Рис. 1.

Анализируя результаты расчетов в пакете ANSYS (см. рис. 1), видим, что при числе конечных элементов в пределах от 10 до 100 наблюдается достаточно высокая точность расчета значений критических сил (в пределах 2–5 значащих цифр). А затем при росте числа конечных элементов погрешность расчетов начинает резко снижаться и при числе элементов  $1 \cdot 10^4$  точность расчетов определяется всего 1–3 значащими цифрами.

## 2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ МЕТОДОМ СПЛАЙНОВ

### 2.1. Дифференциальные соотношения, описывающие деформирование оси стержня при потере устойчивости

В работах [1, 2] изогнутая ось стержня при потере устойчивости описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + F_{кр} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (3)$$

где  $w = w(x)$  – функции перемещения точек осевой линии вдоль оси  $Z$ ;  $E$  – модуль упругости материала;  $I_y$  – осевой момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси  $Y$ ;  $F_{кр}$  – сжимающая критическая сила, направленная вдоль оси стержня, совпадающей в недеформированном состоянии с направлением оси  $X$ .

В случае постоянных  $E = \text{const}$  и  $I_y = \text{const}$  уравнение (3) приводится к виду

$$EI_y \frac{d^4 w}{dx^4} + F_{кр} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) содержит производные до четвертого порядка включительно, поэтому при его решении целесообразно применять сплайны степени 5 дефекта 1, обеспечивающие непрерывность производных до четвертого порядка включительно. Методика построения и применения таких сплайнов для решения задач о статическом деформировании стержней изложена в работах [3–8].

Учитывая, что до настоящего времени сплайны пятой степени не применялись для анализа устойчивости стержней, в данной статье была решена задача оценки возможностей метода сплайнов степени 5 дефекта 1 для расчета критических сил сжатого прямого стержня. При этом в качестве эталона при оценке точности решения выбрана задача Эйлера об устойчивости стержней [1, 2].

## 2.2. Основные положения метода сплайнов степени 5 дефекта 1

При построении сплайна пятой степени [3] на отрезке  $[a, b]$  формируется сетка  $\Delta$ :

$$\Delta: a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b, \quad (5)$$

имеющая  $N$  узлов. На данной сетке строится сплайн-функция  $W_{5,1}(x)$  степени 5 дефекта 1, имеющая  $N_s = N + 4$  степеней свободы [3].

В пределах каждого отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, \dots, N - 1$  сплайн-функция  $W_{5,1}(x)$  является многочленом пятой степени

$$\begin{cases} W_{5,1}(x) = \sum_{\alpha=0}^5 a_{\alpha}^{(i)} (x - x_i)^{\alpha}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (6)$$

Согласно [3], параметры, определяющие сплайн, сведены в вектор-столбец  $Q$  из  $N_s = N + 4$  параметров сплайна:

$$Q = (q_k, \quad k = 1, 2, \dots, N + 4)^T, \quad (7)$$

где

$$\begin{cases} q_1 = W_{5,1}(x_1), & q_2 = \frac{dW_{5,1}(x_1)}{dx}, \\ q_3 = \frac{d^2W_{5,1}(x_1)}{dx^2}, & q_4 = \frac{d^3W_{5,1}(x_1)}{dx^3}, \\ \{q_{i+4} = \frac{d^4W_{5,1}(x_i)}{dx^4}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (8)$$

Число компонент вектора  $Q$  равно числу степеней свободы сплайна.

Для узловых значений сплайн-функции  $W_{5,1}(x_i)$ , а также производных до четвертого порядка включительно в узлах выбранной сетки  $\Delta$  введем обозначения:

$$\begin{cases} f_i = W_{5,1}(x_i), & f_i^I = \frac{dW_{5,1}(x_i)}{dx}, \\ f_i^{II} = \frac{d^2W_{5,1}(x_i)}{dx^2}, & f_i^{III} = \frac{d^3W_{5,1}(x_i)}{dx^3}, \\ f_i^{IV} = \frac{d^4W_{5,1}(x_i)}{dx^4}, & i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (9)$$

Сформируем из них векторы-столбцы:

$$\begin{cases} V_f = (f_i, \quad i = 1, \dots, N)^T, \\ V_{df} = (f_i^I, \quad i = 1, \dots, N)^T, \\ V_{d2f} = (f_i^{II}, \quad i = 1, \dots, N)^T, \\ V_{d3f} = (f_i^{III}, \quad i = 1, \dots, N)^T, \\ V_{d4f} = (f_i^{IV}, \quad i = 1, \dots, N)^T. \end{cases} \quad (10)$$

Векторы узловых значений сплайн-функции  $W_{5,1}(x)$  и ее производных определим, согласно [3], матричными выражениями:

$$\begin{cases} V_f = M_f Q, \\ V_{df} = M_{df} Q, \\ V_{d2f} = M_{d2f} Q, \\ V_{d3f} = M_{d3f} Q, \\ V_{d4f} = M_{d4f} Q, \end{cases} \quad (11)$$

где  $M_f, M_{df}, M_{d2f}, M_{d3f}, M_{d4f}$  – прямоугольные матрицы размера  $N \times (N + 4)$ , формируемые по методике, изложенной в [3].

На основе соотношений (11) построим дискретный аналог дифференциального уравнения (4) для вычисления критической силы  $F_{кр}$ :

$$EI_y M_{d4f} Q + F_{кр} M_{d2f} Q = 0. \quad (12)$$

## 3. МОДЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ, ИМЕЮЩИЕ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

### 3.1. Общее решение уравнения потери устойчивости стержня

Для оценки точности метода сплайнов при расчете критических сил рассматривается прямой стержень длиной  $l = 2$  м, имеющий прямоугольное поперечное сечение шириной  $b = 0,03$  м и высотой  $h = 0,02$  м. Материал стержня – сталь с модулем упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Минимальный осевой момент инерции поперечного сечения стержня  $I_y = bh^3 / 12 = 2 \cdot 10^{-8}$  м<sup>4</sup>.

Рассматриваются стержни с различными креплениями по концам.

При традиционном обозначении [1]

$$a^2 = \frac{F_{кр}}{EI_y} \quad (13)$$

уравнение (4) приводится к виду

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + a^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad (14)$$

Общий интеграл уравнения (14) имеет вид

$$w = C_1 \sin ax + C_2 \cos ax + C_3 x + C_4, \quad (15)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  - произвольные постоянные, определяемые из краевых условий.

### 3.2. Стержень, шарнирно закрепленной по концам

Шарнирно закрепленный по концам стержень имеет краевые условия:

$$w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=l. \quad (16)$$

Для краевых условий (16) на основе (15) получено:

$$C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad \sin al = 0. \quad (17)$$

Из последнего выражения (17) следует, что

$$a_m = \frac{m\pi}{l}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (18)$$

При подстановки (18) в (13) получается выражение для определения точных значений критических сил, соответствующих потере устойчивости:

$$F_{кр}^T = a_m^2 EI_y = \frac{m^2 \pi^2 EI_y}{l^2}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

### 3.3. Стержень, защемленный на левом конце и шарнирно опертый на правом

Рассматривается стержень, защемленный на левом конце при  $x=0$  и шарнирно опертый на правом при  $x=l$ . Для такого стержня краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} w = \frac{dw}{dx} = 0 & \text{при } x=0, \\ w = \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 & \text{при } x=l. \end{cases} \quad (20)$$

При условиях (20) значения  $a_m$  параметра  $a$  являются [1] решением трансцендентного уравнения:

$$al \cos al - \sin al = 0. \quad (21)$$

По найденным значениям  $a_m$  рассчитываются точные значения критических сил:

$$F_{кр}^T = a_m^2 EI_y, \quad m = 1, 2, \dots \quad (22)$$

### 3.4. Стержень, защемленный по концам

Рассматривается стержень, защемленный на левом при  $x=0$  и правом при  $x=l$  концах. Для такого стержня краевые условия имеют вид:

$$\begin{cases} w = \frac{dw}{dx} = 0 & \text{при } x=0, \\ w = \frac{dw}{dx} = 0 & \text{при } x=l. \end{cases} \quad (23)$$

При условиях (23) значения  $a_m$  параметра  $a$  являются [1] решением трансцендентного уравнения:

$$\sin \frac{al}{2} \left( \frac{al}{2} \cos \frac{al}{2} - \sin \frac{al}{2} \right) = 0. \quad (24)$$

При найденных значениях  $a_m$  по формуле (22) рассчитываются точные значения критических сил:

### 3.3. Стержень с жестким закреплением слева и свободным правым концом

Рассматриваемый стержень жестко закреплен на левом конце при  $x=0$  и имеет свободный правый конец при  $x=l$ . Для такого стержня краевые условия имеют вид [1, 2]:

$$\begin{cases} w = \frac{dw}{dy} = 0 & \text{при } y=0, \\ \frac{d^2 w}{dy^2} = \frac{d^3 w}{dy^3} + a^2 \frac{dw}{dy} = 0 & \text{при } y=l. \end{cases} \quad (25)$$

При условиях (25) значения  $a_m$  параметра  $a$  являются [1] решением уравнения

$$\cos al = 0 \quad (26)$$

и принимают значения:

$$a_m = \frac{\pi}{2l} (2m-1), \quad m = 1, 2, \dots \quad (27)$$

Подставляя (27) в (13), получаем выражения для вычисления критических сил:

$$F_{кр}^{(m)} = \frac{\pi^2 EI_x}{2^2 l^2} (2m-1)^2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (28)$$

#### 4. ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ШАРНИРНО ЗАКРЕПЛЕННОГО ПО КОНЦАМ СТЕРЖНЯ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ, И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ

Введем обозначение

$$\lambda = -a^2 = -\frac{F_{кр}}{EI_y}, \quad (29)$$

на основе которого уравнение (12), являющееся дискретным аналогом дифференциального уравнения (4), принимает вид:

$$M_{d4f} \mathbf{Q} - \lambda M_{d2f} \mathbf{Q} = 0. \quad (30)$$

Рассматривая стержень, шарнирно закрепленный по концам, запишем систему из четырех уравнений краевых условий

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = 0. \quad (31)$$

где  $\mathbf{A}$  – прямоугольная матрица размера  $4 \times (N+4)$ , заполняемая компонентами соответствующих строк матриц  $M_f$  и  $M_{d2f}$ :

$$\begin{cases} A_{1,j} = M_{1,j}^f, \\ A_{2,j} = M_{1,j}^{d2f}, \\ A_{3,j} = M_{N,j}^f, \\ A_{4,j} = M_{N,j}^{d2f}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, N+4. \quad (32)$$

На концах шарнирно закрепленного стержня, согласно краевым условиям (16), равны нулю вторые производные

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=l. \quad (33)$$

Подставив (33) в (14), получим равные нулю четвертые производные

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=l. \quad (34)$$

Запишем матричный аналог дифференциальных уравнений (34) в виде системы двух алгебраических уравнений

$$\mathbf{T}\mathbf{Q} = 0, \quad (35)$$

где  $\mathbf{T}$  – прямоугольная матрица размера  $2 \times (N+4)$ :

$$\mathbf{T} = (T_{i,j}, \quad i=1,2, \quad j=1,2,\dots,N+4), \quad (36)$$

заполняемая компонентами соответствующих строк матрицы  $M_{d4f}$ :

$$\begin{cases} T_{1,j} = M_{1,j}^{d4f}, \\ T_{2,j} = M_{N,j}^{d4f}, \end{cases} \quad j = 1, \dots, N+4. \quad (37)$$

Объединим системы уравнений (31), (35) в единую систему:

$$\mathbf{U}\mathbf{Q} = 0 \quad (38)$$

где  $\mathbf{U}$  – прямоугольная матрица размера  $6 \times (N+4)$

$$\mathbf{U} = (U_{i,j}, \quad i=1,2,\dots,6, \quad j=1,2,\dots,N+4), \quad (39)$$

заполняемая компонентами матриц  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{cases} U_{i,j} = A_{i,j}, \quad i=1,\dots,4, \quad j=1,\dots,N+4, \\ U_{5,j} = T_{1,j}, \\ U_{6,j} = T_{2,j}, \quad j=1,\dots,N+4. \end{cases} \quad (40)$$

Из первых четырех столбцов и еще двух столбцов с номерами 5 и  $N+4$  матрицы  $\mathbf{U}$  сформируем квадратную матрицу  $\mathbf{B}$  размера  $6 \times 6$ :

$$\mathbf{B} = (B_{i,j}, \quad i=1,\dots,6 \quad j=1,\dots,6), \quad (41)$$

компоненты которой определим соотношениями:

$$\begin{cases} B_{i,j} = U_{i,j}, \quad i=1,\dots,6, \quad j=1,\dots,4, \\ B_{i,5} = U_{i,5}, \quad i=1,\dots,6, \\ B_{i,6} = U_{i,N+4}, \quad i=1,\dots,6. \end{cases} \quad (42)$$

Затем определим матрицу  $\mathbf{C}$ , обратную к матрице  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}. \quad (43)$$

Умножим слева матрицу  $\mathbf{U}$  на матрицу  $\mathbf{C}$  и получим матрицу  $\tilde{\mathbf{U}}$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{C}\mathbf{U}, \quad (44)$$

особенностью которой является то, что в первых четырех столбцах, а также в столбцах с номерами 5 и  $N+4$  расположены только нули, за исключением того, что в каждом из этих столбцов расположено еще только по одной единице:

$$\begin{cases} \tilde{U}_{1,1} = 1, \quad \tilde{U}_{2,2} = 1, \quad \tilde{U}_{3,3} = 1, \\ \tilde{U}_{4,4} = 1, \quad \tilde{U}_{5,5} = 1, \quad \tilde{U}_{6,N+4} = 1. \end{cases} \quad (45)$$

Введем в рассмотрение вектор  $\mathbf{V}_{spl}$  номеров ограничений, накладываемых на применяемый сплайн посредством матрицы  $\tilde{\mathbf{U}}$ :

$$\mathbf{V}_{spl} = (V_k, \quad k = 1, \dots, 6), \quad (46)$$

где в рассматриваемом конкретном случае:

$$\begin{aligned} V_1 &= 1, & V_2 &= 2, & V_3 &= 3, \\ V_4 &= 4, & V_5 &= 5, & V_6 &= N + 4. \end{aligned} \quad (47)$$

Используя матрицу  $\tilde{\mathbf{U}}$ , обнулим в матрицах  $\mathbf{M}_{d2f}$ ,  $\mathbf{M}_{d4f}$ , применяемых в матричном уравнении (30), первые четыре столбца, а также столбцы под номерами 5 и  $N + 4$ . При этом используем формулы:

$$\begin{cases} M_{i,j}^{d2f} = M_{i,j}^{d2f} - \sum_{k=1}^6 M_{i,V_k}^{d2f} \tilde{U}_{k,j}, \\ M_{i,j}^{d4f} = M_{i,j}^{d4f} - \sum_{k=1}^6 M_{i,V_k}^{d4f} \tilde{U}_{k,j}, \\ i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N + 4. \end{cases} \quad (48)$$

В преобразованных матрицах  $\mathbf{M}_{d2f}$ ,  $\mathbf{M}_{d4f}$  столбцы с номерами 1, 2, 3, 4, 5,  $N + 4$  заполнены только нулями.

Сформируем на основе преобразованных матриц  $\mathbf{M}_{d2f}$ ,  $\mathbf{M}_{d4f}$  квадратные матрицы  $\tilde{\mathbf{M}}_{d2f}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_{d4f}$  размера  $(N - 2) \times (N - 2)$ :

$$\begin{cases} \tilde{M}_{d2f} = (\tilde{M}_{i,j}^{d2f}, \quad i, j = 1, \dots, N - 2), \\ \tilde{M}_{d4f} = (\tilde{M}_{i,j}^{d4f}, \quad i, j = 1, \dots, N - 2), \end{cases} \quad (49)$$

исключая из матриц  $\mathbf{M}_{d2f}$ ,  $\mathbf{M}_{d4f}$  нулевые столбцы с номерами 1, 2, 3, 4, 5,  $N + 4$  и строки с номерами 1,  $N$ , воспользовавшись соотношениями:

$$\begin{cases} \tilde{M}_{i,j}^{d2f} = M_{i+1,j+5}^{d2f}, \\ \tilde{M}_{i,j}^{d4f} = M_{i+1,j+5}^{d4f}, \\ i = 1, \dots, N - 2, \quad j = 1, \dots, N - 2. \end{cases} \quad (50)$$

Введем в рассмотрение вектор-столбец параметров сплайна

$$\tilde{\mathbf{Q}} = (\tilde{Q}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N - 2)^T, \quad (51)$$

компоненты которого определяются по компонентам вектора  $\mathbf{Q}$ :

$$\tilde{Q}_k = q_{k+5}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 2. \quad (52)$$

На основе  $\tilde{\mathbf{M}}_{d2f}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_{d4f}$  и вектора  $\tilde{\mathbf{Q}}$  уравнение (30) принимает вид:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{d4f} \tilde{\mathbf{Q}} - \lambda \tilde{\mathbf{M}}_{d2f} \tilde{\mathbf{Q}} = 0. \quad (53)$$

Умножив уравнение (53) на матрицу  $\tilde{\mathbf{M}}_{d2f}^{-1}$ , обратную к матрице  $\tilde{\mathbf{M}}_{d2f}$ , получим:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{d2f}^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_{d4f} \tilde{\mathbf{Q}} - \lambda \mathbf{E} \tilde{\mathbf{Q}} = 0, \quad (54)$$

где  $\mathbf{E}$  – единичная матрица.

Введем обозначения:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\mathbf{M}}_{d2f}^{-1} \tilde{\mathbf{M}}_{d4f}, \quad (55)$$

где  $\mathbf{D}$  – квадратная матрица размера  $(N - 2) \times (N - 2)$ .

При обозначении (55) уравнение (54) принимает вид

$$(\tilde{\mathbf{D}} - \lambda \mathbf{E}) \tilde{\mathbf{Q}} = 0. \quad (56)$$

Система (56) имеет решения только при условии, что  $\lambda$  являются собственными числами матрицы  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

Определив значения  $\lambda$ , на основе (29) запишем формулу для вычисления критической силы потери устойчивости стержня:

$$F_{кр} = -\lambda EI_x. \quad (57)$$

Точность расчетов оценим десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки  $\lg |\delta F_{кр}|$ , определяемым формулой (2).

Результаты численных расчетов методом сплайнов представлены на рис. 2 графиком зависимости  $\lg |\delta F_{кр}|$  от десятичного логарифма  $\lg(M)$  числа отрезков сетки узлов сплайна  $M = N - 1$ .

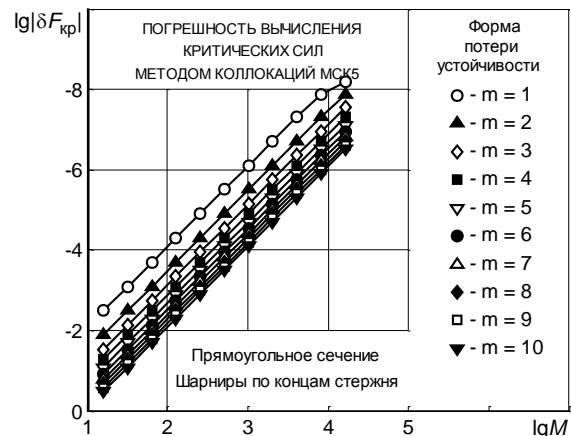


Рис. 2.

Видно (см. рис. 2), что при шарнирном закреплении стержня по концам реализованный метод сплайнов характеризуется вторым порядком сходимости [2], и вплоть до числа отрезков между узлами сплайнов  $M = 16384$  наблюдается непрерывное снижение погрешности расчетов с ростом  $M$ . При этом для  $M = 16384$  при первой форме потери устойчивости ( $m = 1$ ) модуль относительной погрешности расчета критической силы  $|\delta F_{кр}| < 1 \cdot 10^{-8}$ . Наблюдается (см. рис. 2), что с ростом номера формы потери устойчивости погрешности расчетов возрастает, но и при десятой форме потери устойчивости ( $m = 10$ ) модуль относительной погрешности расчета критической силы также весьма мала  $|\delta F_{кр}| < 1 \cdot 10^{-6}$ .

### 5. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ ДЛЯ СТЕРЖНЕЙ С РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ПО КОНЦАМ

#### 5.1. Стержень, защемленный по концам

На рис. 3 в координатах  $\lg |\delta F_{кр}| \sim \lg M$  представлены зависимости ошибок численного расчета критических сил при первых десяти формах для стержня, защемленного по концам.

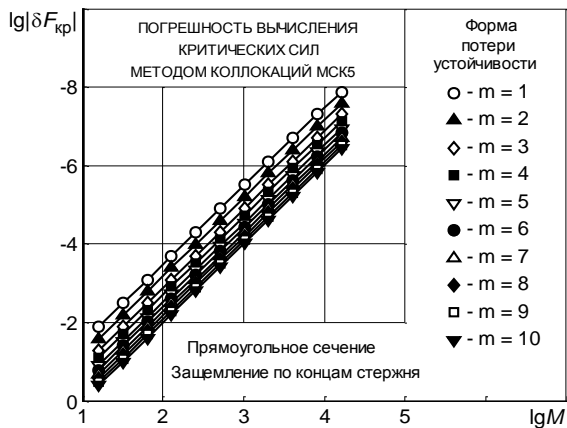


Рис. 3.

Видно (см. рис. 3), что и для стержня, защемленного по концам, метод сплайнов характеризуется вторым порядком сходимости [2], и вплоть до числа отрезков между узлами сплайна  $M = 16384$  наблюдается непрерывное снижение погрешности расчетов с ростом  $M$ . При этом при числе отрезков  $M = 16384$  для первой формы потери устойчивости ( $m = 1$ ) модуль относительной погрешности расчета критической силы  $|\delta F_{кр}| \approx 1 \cdot 10^{-8}$ . Также видно (см. рис. 3), что с ростом номера формы потери устойчивости

погрешности расчетов возрастает, но и при десятой форме потери устойчивости ( $m = 10$ ) погрешность расчета критической силы также весьма мала ( $|\delta F_{кр}| < 1 \cdot 10^{-6}$ ).

При этом отмечаем, что не было достигнуто пороговое значение величины  $M$ , при превышении которого начинается рост погрешности расчетов из-за величины погрешностей арифметических вычислений.

#### 5.2. Стержень, защемленный на левом конце и шарнирно опертый на правом

На рис. 4 в координатах  $\lg |\delta F_{кр}| \sim \lg M$  представлены зависимости ошибок численного расчета критических сил при первых десяти формах для стержня, защемленного на левом конце и шарнирно опертого на правом.

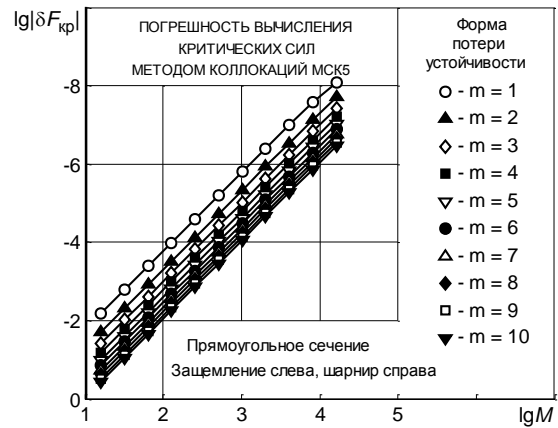


Рис. 4.

Видно (см. рис. 4), что для стержня, защемленного слева и шарнирно закрепленного справа, имеет место второй порядок сходимости [2], и вплоть до  $M = 16384$  наблюдается непрерывное снижение погрешности при росте  $M$ . При этом при числе отрезков  $M = 16384$  для первой формы потери устойчивости ( $m = 1$ ) модуль относительной погрешности расчета критической силы  $|\delta F_{кр}| \approx 1 \cdot 10^{-8}$ . А при десятой форме потери устойчивости ( $m = 10$ ) модуль относительной погрешности расчета критической силы  $|\delta F_{кр}| < 1 \cdot 10^{-6}$ .

#### 5.3. Стержень, с жестким закреплением слева и свободным правым концом

На рис. 5 в координатах  $\lg |\delta F_{кр}| \sim \lg M$  представлены зависимости ошибок численного расчета критических сил при первых десяти формах для стержня, защемленного на левом конце и свободного на правом на правом.

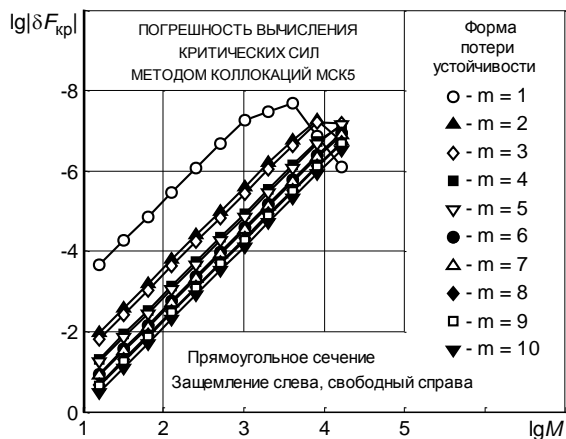


Рис. 5.

Видно (см. рис. 5), что для стержня, защемленного на левом конце и свободного на правом конце, имеет место второй порядок сходимости вплоть до момента, когда начинает проявляться влияние ошибки арифметических вычислений.

Процесс снижения точности расчетов из-за ошибки арифметических вычислений особенно заметен при вычислении критической силы при первой форме потери устойчивости для  $m = 1$ . Видно (см. рис. 5), что при  $M > 10^3$  для  $m = 1$  вначале снижается порядок сходимости, а затем при  $M > 4096$  погрешности расчетов начинают расти.

В целом же (см. рис. 5) при  $M = 16384$  для всех форм потери устойчивости погрешность расчета критической силы  $|\delta F_{кр}| < 1 \cdot 10^{-6}$ .

#### 6. СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА КРИТИЧЕСКИХ СИЛ В ПАКЕТЕ ANSYS И ПО МЕТОДУ СПЛАЙНОВ

Для стержня защемленного снизу при свободном верхнем конце погрешности расчетов в пакете ANSYS представлены на рис. 1, а по методу сплайнов степени 5 дефекта 1 для такого же способа закрепления – на рис. 5.

Видно, что метод сплайнов демонстрирует явную сходимость к точному решению вплоть до  $M = 1 \cdot 10^3$  а далее начинает сказываться влияние погрешностей арифметических вычислений. Реально достигнутая точность расчетов при  $M = 1 \cdot 10^4$  лежит в пределах 6–8 значащих цифр. При этом следует отметить, что современные компьютеры выполняют расчеты с шестнадцатью значащими цифрами. Следовательно, при появлении компьютеров, обеспечивающих расчеты с большим числом значащих цифр, метод сплайнов позволит получать более точные результаты.

Рассматривая результаты расчетов в пакете ANSYS, видим, что при числе конечных элементов не выше 100 наблюдается достаточно высокая точность расчета значений критических сил (в пределах 2–5 значащих цифр). А затем при росте числа конечных элементов погрешность расчетов начинает резко снижаться и при числе элементов  $1 \cdot 10^4$  точность расчетов определяется всего 1–3 значащими цифрами. А это очень низкая точность. Кроме этого, результаты, получаемые в пакете ANSYS вообще не имеют каких-либо традиционных признака сходимости при увеличении числа конечных элементов

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлены результаты исследования возможностей метода сплайнов степени 5 дефекта 1 для расчета критических сил при потере устойчивости прямого стержня.

Проведена оценка точности предложенного варианта метода сплайнов при решении тестовых задач о потере устойчивости продольно сжатых прямых стержней с различными способами их закрепления по концам. Показано, что разработанная автором методика применения сплайнов обеспечивает второй порядок сходимости и точность расчета критических сил при различных формах потери устойчивости с 6...8 значащими цифрами на сетке с числом отрезком сплайна в пределах  $10^4$ .

Для сравнения возможностей метода сплайна с возможностями пакета ANSYS выполнены расчеты критических сил в пакете ANSYS и выяснено, что у программы ANSYS есть определенный недостаток, заключающийся в том, что с ростом числа конечных элементов резко возрастает погрешность расчета и уже при числе конечных элементов порядка  $10^4$  результаты расчета имеют точность лишь в пределах 1 %.

Из этого можно сделать вывод, что пакет ANSYS возможно устроит пользователей при выполнении инженерных расчетов с точностью до 1 %, но может не устроит исследователей-механиков, имеющих намерение получать результаты с более высокой точностью.

В этом случае им предлагается обратить внимание на метод сплайнов, изложенный в данной статье.

По мнению автора, преимущества метода сплайнов по сравнению с традиционным методом конечных элементов заключается в том, что на его основе непосредственно решается дифференциальное уравнение, описывающее изучаемое явление потери устойчивости стержня.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Соппротивление материалов: Учебное пособие. М.: Наука, 1986. 560 с. [I. A. Birger., R. R. Mavlyutov. Mechanics of materials. tutorial. M.: Science, 1986. 560 p. ]
2. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3 Т. / под ред. д-ра техн. наук И. А. Биргера и чл.-корр. АН Латвийской ССР Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 568 с. [ Strength, stability, oscilations. Volume 3. Pod red. I. A. Birgera iA. G. Panovko. M.: Mashinostroenie, 1968. 568 p.]
3. Павлов В. П. Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа: Уфимск. Гос. Авиац. техн. ун-т Уфа. 2003. 197 с. [V. P. Pavlov. Spline-methods and other numerical methods for solving one-dimensional problems of deformable solids mechanics. Ufa: USATU. 2003. 197 p. ]
4. Абдрахманова А. А., Павлов В. П. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стеклопластикового стержня при различных жесткостях опор // Вестник УГАТУ, Уфа, 2007, Т.9, №5(23). С. 87–92. [A. A. Abdrakhmanova, V. P. Pavlov. Mathematical modeling of the stress-strain state of glass-plastic beam with different stiffnesses of supports // Vestnik UGATU, vol. 9, No. 5(23), 2007, pp. 87–92. ]
5. Павлов В. П. Оценка возможностей метода сплайн-функций при решении уравнений, описывающих изгиб стержней // межвузовский научн. сб. «Механика деформируемых тел и конструкций». 1998. Уфа. С. 15-20. [V. P. Pavlov. Assessment the possibilities of method of spline-functions for solving equations describing the bending of beams. // Mezhvuzovskij nauchn. sb. «Mekhanika deformiruemyyh tel i konstrukcij». Ufa, 1998, pp. 15–20.]/
6. Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П. Задача расчета стержней одномерным сплайном пятой степени дефекта два // математические заметки ЯГУ. 2013. Т.20, вып.1, с. 50–59. [V. P. Pavlov, A. A. Abdrahmanova, R. P. Abdrahmanova. The problem of calculating beams by one-dimensional spline fifth degree of the defect two // Matematicheskie zametki JaGU. vol.20, No.1, Jakutsk, 2013. pp.50–59. ]
7. Павлов В. П., Абдрахманова А. А. Расчет стержней на устойчивость методом сплайнов // материалы российской науч.-техн. конф. «Мавлютовские чтения». Уфа. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2016. Т. 1, С. 123–127. [V. P. Pavlov, A. A. Abdrahmanova. Calculation of beams stability by sing spline-method // Mavlyutovskie chteniya: materialy Rossijskoj auchno-tekhnicheskoj konferencii. Ufa: UGATU, 2016, Vol. 3, pp. 23–127.].
8. Павлов В. П., Абдрахманова А. А. Расчет частот собственных колебаний стержней методом сплайнов // Материалы российской науч.-техн. конф. «Мавлютовские чтения». Уфа. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2016. Т. 1, с. 128–132. [V. P. Pavlov, A. A. Abdrahmanova. The calculation of natural frequencies of the beam by splines // Mavlyutovskie chteniya: materialy Rossijskoj nauchno-tekhnicheskoj konferencii. Ufa: UGATU, 2016, Vol. 3, pp. 128–132. ]

## ОБ АВТОРЕ

**ПАВЛОВ Виктор Павлович** проф. каф. сопр. мат. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. механики композиционных материалов.

## METADATA

**Title:** The Method Of Splines In The Calculation Of The Studs For Stability

**Author:** V. P. Pavlov

**Affiliation:**

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

**Email:** victor.pavlov.51@yandex.ru

**Language:** Russian.

**Source:** Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 20, no. 4 (74), pp. 45-53, 2016. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

**Abstract:** Discusses the possibilities of the method of spline functions of degree 5 defect 1 for the calculation of critical forces during buckling of a straight rod loaded by a longitudinal force at a time, personal ways of fastening its ends. On the solution of several test problems with exact analytical solution, analyze the accuracy of the proposed method. It is shown that the implemented algorithm is the application of the method of spline functions of degree 5 allows to determine the values of critical forces with a very high accuracy, restriction where you are only the possibilities of modern computers. The results of calculations by the method of splines compared with the results of calculations of the critical-ical forces in ANSYS. There are a number of advantages in the accuracy of the proposed spline method in comparison with methods implemented in ANSYS.

**Key words:** studs, buckling, critical force, splines, ANSYS, mathematical modeling

**About author:**

**PAVLOV, Victor Pavlovich**, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005).