ISSN 1992-6502 (Print) Вестник УГАТУ ISSN 2225-2789 (Online)
2016. Т. 20, № 4 (74). С. 97–106 http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 517.9

Взаимосвязь математических моделей, описываемых уравнениями с производными целого и дробного порядков

С. Ю. Лукащук

lsu@ugatu.su

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 16.11.2016

Аннотация. Предложен эвристический принцип эквивалентности математических моделей, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного и целого порядков. В соответствии с этим принципом для любого обыкновенного дробно-дифференциального уравнения существует эквивалентное ему по решению обыкновенное дифференциальное уравнение с производными целого порядка, связанное с исходным дробно-дифференциальным уравнением некоторым нелокальным преобразованием. Приводятся примеры эквивалентных по решению уравнений, подтверждающие предложенный принцип, обсуждаются условия однозначной разрешимости и некоторые качественные свойства таких уравнений. Показано, что принцип эквивалентности распространяется и на модели, описываемые уравнениями в частных производных целого и дробного порядков.

Ключевые слова: математическая модель, дробно-дифференциальное уравнение, принцип эквивалентности, эквивалентность по решению, нелокальное преобразование, инвариантность, симметрия.

В настоящее время теория интегро-дифференцирования дробного порядка [1–3] превратилась в мощный аппарат математического моделирования различных процессов и явлений, в которых проявляются эффекты памяти и/или пространственной нелокальности. Кинетика протекания таких процессов, как правило, не подчиняется гауссовой (нормальной) статистике, поэтому их принято называть аномальными или неклассическими [4, 5]. Аномальные процессы часто наблюдаются экспериментально при исследовании различных неоднородных и неупорядоченных сложных сред [5–8].

При математическом моделировании эффекты памяти и пространственной нелокальности могут быть естественным образом учтены в модели через интегральные или интегро-дифференциальные члены. Если кинетика протекания аномального процесса подчиняется асимптотически степенному закону распределения с дробным показателем степени, то ядро соответствующего интегрального оператора также становится дробно-степенным. В результате в модели появляются интегралы и производные дробного порядка [4–8]. Уравнения, содержащие дробные производные какого-либо типа, принято называть дробно-дифференциальными.

Решения обыкновенных дробно-дифференциальных уравнений зависят от постоянных интегрирования, количество которых определяется старшими порядками дробных производных, входящих в уравнение [2]. По любому такому решению, зависящему от n произвольных постоянных, может быть восстановлено обыкновенное дифференциальное уравнение целого (n-го) порядка. В результате обыкновенному дробно-дифференциальному уравнению может быть поставлено в соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение с производными целого порядка, обладающее тем же решением.

Дробно-дифференциальные математические модели, особенно нелинейные, являются чрезвычайно сложным математическим объектом. До сих пор не существует каких-либо конструктивных алгоритмов построения их точных решений (исключение составляют лишь некоторые классы линейных моделей, в частности, с постоянными коэффициентами). С другой стороны, теория дифференциальных уравнений с производными целого порядка развита достаточно хорошо. Поэтому изучение пар уравнений дробного и целого порядков, имеющих одинаковые решения, представляется достаточно перспективным с точки зрения разработки новых подходов к исследованию качественных и количественных свойств дробно-дифференциальных моделей. Обсуждению этого вопроса и посвящена данная работа.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ ЦЕЛОГО И ДРОБНОГО ПОРЯДКОВ

Рассмотрим сначала один простой, но показательный, пример.

Пример 1. Пусть дано обыкновенное линейное дробно-дифференциальное уравнение

$$ {}_aD_x^{1+\alpha} y = 0, \;\; \alpha \in (0,1), \tag{1}$$

где ${}_aD_x^{\beta} y = D_x^n \left({}_aI_x^{n-\beta} y \right)$ – левосторонняя производная Римана–Лиувилля дробного порядка $\beta > 0$ и $n = [\beta] + 1$, а

$$ {}_aI_x^{\gamma} y = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^x \frac{y(s)}{(x-s)^{1-\gamma}} ds, \;\; \gamma > 0, \;\; x > a \tag{2}$$

– левосторонний дробный интеграл порядка γ (см., например [1, 2]). В (2) $\Gamma(\gamma)$ – гамма-функция [9].

Решение уравнения (1) хорошо известно [2]:

$$ y(x) = (x-a)^{\alpha-1}(C_1 x + C_2), \;\; x > a \tag{3}$$

(здесь C_1 и C_2 – произвольные постоянные). По данному решению восстанавливается соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$ (x-a)^2 y'' + 2(1-\alpha)(x-a)y' - \alpha(1-\alpha)y = 0, \tag{4}$$

которое также является линейным и обладает тем же общим решением (3).

В результате дробно-дифференциальному уравнению (1) по его общему решению (3) поставлено в соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (4).

Уравнение (1) связано с уравнением (4) нелокальным преобразованием

$$ x = \bar{x} + \varepsilon, \quad {}_aI_x^{1-\alpha} y = (\bar{x} - a)^{1-\alpha} \bar{y} \tag{5}$$

(здесь ε – произвольная постоянная), которое оставляет инвариантным решение (3).

Однако преобразование (5) является не единственным, связывающим уравнения (1) и (4). Рассмотрим линейное локальное неточечное преобразование

$$ x = \bar{x}, \;\; y = A_0 \bar{y} + A_1 (x-a) \bar{y}', \tag{6}$$

где A_0 и A_1 – не равные нулю постоянные. Нетрудно проверить, что преобразование (6) оставляет инвариантным решение (3). Производная дробного порядка ${}_aD_x^{\alpha} y$ преобразуется в этом случае по правилу

$$ {}_aD_x^{\alpha} y = (A_0 + \alpha A_1)\, {}_aD_{\bar{x}}^{\alpha} \bar{y} + A_1 (\bar{x} - a)\, {}_aD_{\bar{x}}^{\alpha+1} \bar{y}.$$

Если рассматривать данное преобразование дробной производной на многообразии, задаваемом (3), то его можно преобразовать к виду

$$ {}_aD_x^{\alpha} y = (A_0 + \alpha A_1)\Gamma(\alpha+1)(\bar{x} - a)^{-\alpha} \times \\ \times [(1-\alpha)\bar{y} + (\bar{x} - a)\bar{y}']. \tag{7}$$

При этом должно выполняться дополнительное условие $A_0 \neq -\alpha A_1$, обеспечивающее невырожденность данного преобразования. Дифференцируя по x равенство (7), в силу уравнения (1) приходим к уравнению (4), записанному в новых переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$.

Преобразование (6) является частным случаем преобразования вида

$$ x = \varphi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'), \qquad y = \psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'). \tag{8}$$

При этом преобразованию дробной производной удается придать аналогичный вид

$$ {}_aD_x^{\alpha} y = \theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') \tag{9}$$

при условии, что оно рассматривается на многообразии, задаваемом решением (3). Преобразования (8) и (9) связаны обобщенным условием касания

$$ [{}_aD_{\varphi}^{\alpha} \psi - \theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')]\big|_{(3)} = 0.$$

Заметим, что преобразование (9) является нелокальным.

Под действием преобразования (6) интеграл дробного порядка ${}_aI_x^{1-\alpha} y$ на многообразии будет преобразовываться по правилу

$$ {}_aI_x^{1-\alpha} y = \\ = [(2-\alpha)A_0 - (1-\alpha)^2 A_1]\Gamma(\alpha+1)(\bar{x} - a)^{1-\alpha} \bar{y} + \\ + [(\alpha-1)A_0 + (\alpha^2 - \alpha + 1)A_1]\Gamma(\alpha)(\bar{x} - a)^{2-\alpha} \bar{y}'.$$

При

$$ A_0 = \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\Gamma(\alpha+1)}, \;\; A_1 = \frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

данное преобразование совпадает с преобразованием (5) при условии $\varepsilon = 0$. Таким образом, при $\varepsilon = 0$ преобразование (5) является частным случаем преобразования (6). □

Уравнения, обладающие в некоторой области одним и тем же решением, будем называть *уравнениями, эквивалентными по этому решению в данной области.*

Следует отметить, что в данном случае речь не идет о полном совпадении всего множества решений рассматриваемых дифференциальных уравнений целого и дробного порядков. Добиться такого совпадения можно лишь для некоторых классов уравнений, в частности, линейных. В общем случае нелинейные уравнения в одной и той же области могут обладать различными многопараметрическими семействами решений и построить пару уравнений целого и дробного порядка, для которых одновременно все эти семейства являются решениями, оказывается невозможно.

Проиллюстрируем примерами данный факт.

Пример 2. Рассмотрим нелинейное дробно-дифференциальное уравнение

$$\left({}_0D_x^{1+\alpha}y\right)^2 - x\,{}_0D_x^{1+\alpha}y + {}_0D_x^{\alpha}y = 0, \qquad (10)$$

при $\alpha \in (0,1)$. Подстановкой ${}_0D_x^{\alpha}y = z$ это уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, которое легко интегрируется. В результате находятся следующие решения уравнения (10):

$$y(x) = \frac{C_1 x^{\alpha+1}}{\Gamma(2+\alpha)} - \frac{C_1^2 x^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{C_2 x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad (11)$$

$$y(x) = \frac{x^{\alpha+2}}{2\Gamma(3+\alpha)} + Cx^{\alpha-1}, \qquad (12)$$

где $x > 0$ и C, C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Решению (11) соответствует обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\begin{gathered}(1+\alpha)\Gamma(2+\alpha)[(x^{1-\alpha}y)'']^2 - \\ -4x(x^{1-\alpha}y)''+4(x^{1-\alpha}y)' = 0.\end{gathered} \qquad (13)$$

Таким образом, уравнения (10) и (13) эквивалентны по решению (11) в области $x > 0$. Однако при этом решение (12) уравнения (10) не является решением уравнения (13). Вместо (12) уравнение (13) имеет другое решение

$$y(x) = \frac{x^{\alpha+2}}{3(1+\alpha)\Gamma(2+\alpha)} + Cx^{\alpha-1}, \qquad (14)$$

отличающееся от (12) множителем в первом слагаемом.

Аналогично примеру 1, эквивалентные по решению (11) уравнения (10) и (13) оказываются связанными нелокальным преобразованием

$$x = \bar{x} + \varepsilon, \quad {}_0I_x^{1-\alpha}y = \frac{(1+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{4}\bar{x}^{1-\alpha}\bar{y}, \qquad (15)$$

где ε – произвольная постоянная. Данное преобразование оставляет инвариантным решение (11), по которому устанавливается эквивалентность уравнений (10) и (13), но изменяет решения (12) и (14).

Преобразование от уравнения (10) к уравнению (13) можно также искать в локальном виде (8). Например, линейное преобразование (6), рассматриваемое при $a = 0$, оставляет решение (11) инвариантным при дополнительном условии

$$(A_0 + (\alpha+1)A_1)^2 = A_0 + \alpha A_1 .$$

В частном случае

$$A_0 = \frac{(1+\alpha)(1+\alpha^2)}{4}, \quad A_1 = \frac{1-\alpha^2}{4}$$

соответствующее преобразование дробной производной ${}_0D_x^{\alpha}y$ на многообразии, задаваемом решением (11), приобретает особенно простой вид:

$$ {}_0D_x^{\alpha}y = \frac{(1+\alpha)\Gamma(2+\alpha)}{4}\bar{x}^{1-\alpha}\left[(1-\alpha)\frac{\bar{y}}{\bar{x}} + \bar{y}'\right]. \qquad (16)$$

Данное нелокальное преобразование соответствует также преобразованию (15), рассматриваемому при $\varepsilon = 0$, и переводит уравнение (10) в уравнение (13).

Важно отметить, что построенное преобразование

$$x = \bar{x}, \quad y = \frac{(1+\alpha)}{4}[(1+\alpha^2)\bar{y} + (1-\alpha)\bar{x}\,\bar{y}']$$

не связывает между собой особые решения (12) и (14) уравнений (10) и (13).

В предельном случае $\alpha = 1$ уравнения (10) и (13) переходят в одно и то же уравнение

$$(y'')^2 - xy'' + y' = 0, \qquad (17)$$

а решения (11), (12) и (14) – в решения этого уравнения:

$$y(x) = \frac{C_1 x^2}{2} - C_1^2 x + C_2, \qquad (18)$$

$$y(x) = \frac{x^3}{12} + C. \qquad (19)$$

По решению (18) строится нелинейное дробно-дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}4(1-\alpha)^2(2-\alpha)^2\left(z_\alpha + z_{\alpha+1}\right)^2 + \\ + x^3(2-\alpha)^2 z_\alpha + x^3(1-\alpha)(3-\alpha)z_{\alpha+1} = 0,\end{gathered} \qquad (20)$$

где

$$z_\alpha = \frac{1-\alpha}{\alpha}\left[\Gamma(1-\alpha)x^{\alpha}\,{}_0D_x^{\alpha}y - y\right],$$

$$z_{\alpha+1} = \frac{\alpha}{1+\alpha}\left[\Gamma(-\alpha)x^{\alpha+1}\,{}_0D_x^{\alpha+1}y - y\right].$$

Уравнение (20) эквивалентно по решению (18) уравнению (17) при $x > 0$. Уравнение (20), помимо решения (18), имеет также решение

$$y(x)=\frac{(5-2\alpha)(3-\alpha)}{2(2-\alpha)(7-\alpha)^2}x^3+C, \qquad (21)$$

которое не совпадает с (19), но переходит в него в предельном случае $\alpha=1$. □

В рассмотренном примере эквивалентные уравнения различались лишь особыми решениями, зависящими только от одной, а не от двух произвольных постоянных. Однако возможны ситуации, когда уравнения, эквивалентные по одному семейству решений, зависящему от максимально возможного количества постоянных интегрирования, не будут одновременно допускать другие семейства решений, зависящие от того же максимального количества постоянных.

Пример 3. Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$yy''-(y')^2+\left|\frac{y''}{y}\right|^{1-\alpha}=0. \qquad (22)$$

Данное уравнение имеет следующие решения:

$$C_1^\alpha y(x)=\sin(C_1x+C_2), \qquad (23)$$

$$C_1^\alpha y(x)=\pm\operatorname{sh}(C_1x+C_2), \qquad (24)$$

$$y(x)=C, \qquad (25)$$

где $C,\ C_1>0, C_2$ – постоянные интегрирования.

При $\alpha\in(1/2,1]$ уравнение (22) оказывается эквивалентным по решению (23) на всем множестве $\mathbb{R}$ следующему обыкновенному дробно-дифференциальному уравнению:

$$y\ {}_{-\infty}D_x^{2\alpha}y-\left({}_{-\infty}D_x^{\alpha}y\right)^2+\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}=0. \qquad (26)$$

При этом функции (24) и (25) не являются решениями этого дробно-дифференциального уравнения, поскольку дробные производные ${}_{-\infty}D_x^{\alpha}y$ и ${}_{-\infty}D_x^{2\alpha}y$ от них не существуют в силу расходимости соответствующих несобственных интегралов. В предельном случае $\alpha=1$ уравнения (22) и (26) переходят в одно и то же обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

Построить преобразование вида (8), переводящее уравнение (26) в соответствующее эквивалентное ему по решению (23) дифференциальное уравнение с производными целого порядка, оказывается весьма затруднительным. Тем не менее, удается построить преобразование с расширенным набором переменных следующего общего вида:

$$x=\varphi(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{y}',\ \bar{y}''),\quad y=\psi(\bar{x},\bar{y},\ \bar{y}',\ \bar{y}''). \qquad (27)$$

При этом преобразования дробных производных будут иметь аналогичный вид

$${}_{-\infty}D_x^{\alpha}y=\theta(\bar{x},\bar{y},\ \bar{y}',\ \bar{y}''),$$

$${}_{-\infty}D_x^{2\alpha}y=\omega(\bar{x},\bar{y},\ \bar{y}',\ \bar{y}'')$$

при условии, что они рассматриваются на многообразии, задаваемом (23), и на этом многообразии выполнены обобщенные условия касания

$$[{}_{-\infty}D_\varphi^{\alpha}\psi-\theta]\Big|_{(23)}=0,\ [{}_{-\infty}D_\varphi^{2\alpha}\psi-\omega]\Big|_{(23)}=0. \qquad (28)$$

Соответствующее преобразование, обеспечивающее инвариантность решения (23), имеет вид

$$x=\bar{x},\quad y=\sin\frac{\pi\alpha}{2}\bar{y}+\left(-\frac{\bar{y}''}{\bar{y}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\bar{y}', \qquad (29)$$

а производные дробного порядка преобразуются по правилу

$$\begin{aligned}{}_{-\infty}D_x^{\alpha}y&=\left(-\frac{\bar{y}''}{\bar{y}}\right)^{\frac{\alpha-1}{2}}\bar{y}',\\ {}_{-\infty}D_x^{2\alpha}y&=-\left(-\frac{\bar{y}''}{\bar{y}}\right)^{\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\bar{y}+\\ &+\left(-\frac{\bar{y}''}{\bar{y}}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi\alpha}{2}\bar{y}'.\end{aligned} \qquad (30)$$

Нетрудно проверить, что для (29), (30) условия (28) выполнены.

Подстановка (29) и (30) в уравнение (26) переводит его в уравнение

$$\bar{y}\,\bar{y}''-(\bar{y}')^2+\left(-\frac{\bar{y}''}{\bar{y}}\right)^{1-\alpha}=0. \qquad (31)$$

Уравнение (31) эквивалентно по решению (23) уравнению (26) и является частным случаем уравнения (22). Интересно отметить, что (31) имеет также решение (25), инвариантность которого сохраняется под действием преобразования (29), но функция (24) решением этого уравнения не является.

Уравнение (31) в общем случае не разрешимо относительно $\bar{y}''$, то есть не может быть записано в виде $\bar{y}''=f(\bar{y},\bar{y}')$. Если бы такое представление имело место, то подстановка его в преобразование (29) позволила бы привести его к виду (8). Именно неразрешимость (31) относительно $\bar{y}''$ не позволяет найти преобразование от уравнения (26) к эквивалентному ему по решению (23) уравнению (31) в виде (8). □

Рассмотренные примеры позволяют сформулировать следующее эвристическое утверждение: *для любого обыкновенного дробно-дифференциального уравнения с дробными производными Римана–Лиувилля существует эквивалентное ему по решению, зависящему от максимально возможного количества постоянных интегрирования, обыкновенное дифференциальное уравнение с производными целого порядка, связанное с исходным дробно-дифференциальным уравнением некоторым нелокальным преобразованием, относительно которого это решение остается инвариантым*. В дальнейшем это предложение будет называться кратко *принципом эквивалентности дифференциальных уравнений целого и дробного порядков*.

Данный принцип эквивалентности позволяет свести задачу исследования дробно-дифференциальной математической модели к задаче поиска некоторого нелокального преобразования, переводящего дробно-дифференци-альное уравнение модели в эквивалентное ему уравнение с производными целого порядка, и последующего исследования этого уравнения.

СВОЙСТВА ЭКВИВАЛЕНТНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В силу совпадения решений математические модели, описываемые эквивалентными уравнениями, будут обладать рядом общих свойств.

С точки зрения математического моделирования, эквивалентные уравнения могут рассматриваться в качестве равносильных функциональных моделей (то есть моделей типа «черный ящик», в которых не учитывается внутренняя структура моделируемого объекта). Обладая одинаковым решением, такие модели обеспечивают идентичное количественное описание объекта. При этом прогноз качественных свойств объекта у моделей разного типа может принципиально отличаться.

Тем не менее, эквивалентные уравнения будут обладать некоторыми общими качественными свойствами. Например, такие уравнения должны допускать одинаковые группы точечных преобразований, относительно которых будет инвариантно то их решение, по которому устанавливается эквивалентность. Однако полной идентичности свойств не будет наблюдаться даже у линейных эквивалентных уравнений, у которых имеет место полное совпадение множества их решений.

Проиллюстрируем некоторые свойства эквивалентных уравнений на примере уравнений (1) и (4), эквивалентных по решению (3).

Область определения. Уравнение (1) имеет смысл только при $x > a$, поскольку именно в этой области определен оператор ${}_aD_x^{1+\alpha}$ дробного дифференцирования. При этом решение (3) обладает в точке $x = a$ интегрируемой особенностью. Дифференциальное уравнение (4) определено всюду, кроме точки $x = a$, в которой оно вырождается в алгебраическое уравнение $y = 0$. Таким образом, уравнения (1) и (4) эквивалентны только в области $x > a$.

Уравнение (4) инвариантно относительно преобразования отражения $\bar{x} - a = a - x$. Дробно-дифференциальное уравнение (1) это преобразование не допускает, поскольку оно выводит (1) за область его определения.

В предельном случае $\alpha = 1$ уравнения (1) и (4) переходят в уравнение $y'' = 0$, а решение (3) переходит в общее решение этого уравнения.

Первые интегралы. Уравнения (1) и (4) могут быть записаны в виде равенства $D_x I = 0$ с некоторой функцией $I(x, y, ...)$, представляющей собой первый интеграл соответствующего уравнения. Однако для уравнения (1) $I = {}_aD_x^{\alpha} y,$ то есть является величиной нелокальной, в то время как для уравнения (4) величина I является локальной: $I = (x-a)^{1-\alpha} y' + (1-\alpha)(x-a)^{-\alpha} y$. Поэтому смысл этих величин для рассматриваемых уравнений будет разным.

Условия однозначной разрешимости. Ограничимся рассмотрением задачи Коши. Начальные условия для дробно-дифференциального уравнения (1) задаются в виде [1, 2]:

$$ {}_aD_x^{\alpha} y\Big|_{x=a} = A_1, \quad {}_aI_x^{1-\alpha} y\Big|_{x=a} = A_2, \tag{32}$$

где A_1, A_2 – некоторые постоянные. Такая постановка начальных условий для уравнения (1) обеспечивает построение сингулярного в точке $x = a$ решения вида (3). Подстановка общего решения (3) в начальные условия (32) дает следующую связь между C_1, C_2 и A_1, A_2:

$$C_1 = \frac{A_1}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad C_2 = \frac{A_2}{\Gamma(\alpha)} - \frac{aA_1}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

Условия однозначной разрешимости для уравнения (4) могут быть заданы в любой точке. Если эти условия определяются в точке $x = b \ (b \neq a)$, то они имеют классический вид

$$y(b) = B_1, \quad y'(b) = B_2, \tag{33}$$

где B_1, B_2 – некоторые постоянные. В точке $x = a$ для уравнения (4) возможна постановка начальных условий следующего специального вида:

$$D_x\left[(x-a)^{1-\alpha}y(x)\right]_{x=a}=\tilde{A}_1,\quad (x-a)^{1-\alpha}y(x)\Big|_{x=a}=\tilde{A}_2, \tag{34}$$

где $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ – некоторые постоянные.

В [2, 10] показано, что при

$$A_1=\Gamma(1+\alpha)\tilde{A}_1,\ A_2=\Gamma(\alpha)\tilde{A}_2$$

условия (32) и (34) могут рассматриваться как эквивалентные.

Условия (33), являющиеся классическими для уравнения (4), при $b>a$ могут быть также использованы как условия однозначной разрешимости и дробно-дифференциального уравнения (1) (такой вид условий рассмотрен, в частности, в монографии [2]). Однако в силу нелокальности оператора дробного дифференцирования, уравнение (1) всегда рассматривается в области $x>a$ с фиксированной границей $x=a$. Поэтому задача (1), (33) является, по сути, граничной обратной задачей для уравнения (1). Решение такого класса задач для дробно-дифференциальных уравнений оказывается в общем случае весьма нетривиальным.

Таким образом, для эквивалентных уравнений могут быть использованы либо одинаковые условия однозначной разрешимости, либо эти условия могут быть приведены к эквивалентному виду.

Симметрийные свойства. Фиксированность начала отсчета в дробно-дифференциальных моделях с точки зрения моделирования является вопросом неоднозначным. Наличие жестко заданной точки отсчета означает, что данная точка пространства или времени должна соответствовать какому-то особому свойству или событию моделируемой системы. Однако на практике в подавляющем большинстве случаев такие свойства или события у системы не наблюдаются.

Известно, что возможность относительно произвольного выбора начала отсчета связана со свойством однородности времени и/или пространства. Уравнение модели в этом случае оказывается инвариантным относительно преобразования переноса (сдвига) по соответствующей временной или пространственной координате. Так, для любого $x>a$, уравнение (4) инвариантно относительно однопараметрической группы точечных преобразований

$$\bar{x}=x+\varepsilon,\ \bar{y}=\left(1+\frac{\varepsilon}{x-a}\right)^{\alpha-1}y,\ \varepsilon\in\Delta, \tag{35}$$

где ε – параметр группы и Δ – симметричный относительно нуля интервал в $\mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что при любом $x>a$ общий вид решения (3) под действием преобразования (35) также остается неизменным.

Однако в отличие от уравнения (4), дробно-дифференциальное уравнение (1) не допускает преобразование (35), что обусловлено нелокальностью оператора дробного дифференцирования Римана–Лиувилля. Обыкновенное дифференциальное уравнение (4) локально и преобразование (35) допускается им также локально, то есть в окрестности любого фиксированного x. Для любого $x>a$ всегда найдется непустой интервал Δ, такой, что для любого $\varepsilon\in\Delta$ будет выполнено условие $x-a+\varepsilon>0$. Симметричность интервала Δ относительно нуля обеспечивает локальную обратимость преобразования (35).

Для допускаемости группы преобразований (35) нелокальным дробно-дифференциальным уравнением (1) необходимо, чтобы существовал такой симметричный относительно нуля интервал Δ, что условие $x-a+\varepsilon>0$ было выполнено для любого $\varepsilon\in\Delta$ при *всех* значениях $x>a$, что невозможно. Такое требование обусловлено правилом замены переменных в интеграле дробного порядка ${}_aI_x^{1-\alpha}y$, входящем в дробную производную ${}_aD_x^{1+\alpha}y\equiv D_x^2\,{}_aI_x^{1-\alpha}y$. Для замены переменных в этом интеграле при любом фиксированном x требуется замена входящей в подынтегральное выражение функции $y(s)$ *для всех* $s\in(a,x)$ (см. определение дробного интеграла (2)).

Преобразование (35) переводит уравнение (1) в эквивалентное ему по решению (3) дробно-дифференциальное уравнение

$${}_{a-\varepsilon}D_x^{1+\alpha}\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{x-a}\right)^{\alpha-1}y\right]=0. \tag{36}$$

Это уравнение будет также эквивалентно по решению дробно-дифференциальному уравнению (1) в области $x>b,\ b=\max\{a,a-\varepsilon\}$.

Таким образом, в результате применения к уравнению (1) преобразования (35), оставляющего инвариантным общее решение этого уравнения (3), уравнение (1) переходит в новое, эквивалентное ему дробно-дифференциальное уравнение (36). Если (36) рассматривать как однопараметрическое ε-семейство уравнений, то исходное уравнение (1) будет частным представителем этого семейства при $\varepsilon=0$.

Тем не менее, как показано в работе [11], уравнения (1) и (4) будут одновременно допускать следующие однопараметрические группы точечных преобразований:

$$\bar{x}=x,\qquad \bar{y}=y+\varepsilon(x-a)^{\alpha-1};$$

$$\bar{x}=x,\qquad \bar{y}=y+\varepsilon(x-a)^{\alpha};$$

$$\bar{x}=x,\qquad \bar{y}=e^{\varepsilon}y;$$

$$\bar{x} = e^{\varepsilon} x, \qquad \bar{y} = y;$$

$$\bar{x} = \frac{x-a}{1-\varepsilon(x-a)} + a, \quad \bar{y} = \frac{y}{\left[1-\varepsilon(x-a)\right]^{\alpha}} \tag{37}$$

(здесь ε – параметр группы).

Таким образом, полного совпадения симметрийных свойств уравнений (1) и (4) не наблюдается, однако оба уравнения допускают одну и ту же пятипараметрическую группу точечных преобразований (37).

Интересно отметить, что в данном случае различными оказываются симметрийные свойства дробно-дифференциального уравнения и его решения. Преобразование (35) уравнением (1) не допускается, но сохраняет (локально) его общее решение (3). В этом проявляется еще одно важное отличие дробно-дифференциальных моделей от моделей, описываемых дифференциальными уравнениями с производными целых порядков.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений целого порядка, которые однозначно (точнее, с точностью до элементарных преобразований) восстанавливаются по своему решению, дробно-дифференциальные уравнения по своему решению однозначно восстановлены быть не могут. Существуют целые многопараметрические семейства эквивалентных по решениям дробно-дифференциальных уравнений, принадлежащих одному и тому же классу. Один из таких примеров был построен в конце предыдущего раздела – это эквивалентные уравнения (1) и (36). Приведем еще два примера такого соответствия.

Пример 4. Простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение $y''=0$ при $x>a$ эквивалентно по своему общему решению $y(x)=C_1x+C_2$ двухпараметрическому $\{a,\alpha\}$– семейству линейных уравнений

$$(x-a)^{1+\alpha}\ {}_aD_x^{1+\alpha} y - \\ -\frac{1-\alpha^2}{\alpha}(x-a)^{\alpha}\ {}_aD_x^{\alpha} y + \frac{1}{\alpha\Gamma(1-\alpha)} y = 0, \tag{38}$$

где $\alpha\in(0,1)$. В пределе $\alpha\to 1-0$ уравнение (38) переходит в уравнение $y''=0$. Более того, эти уравнения оказываются связанными линейным преобразованием (6), при этом преобразование дробной производной имеет вид

$$ {}_aD_x^{\alpha} y = A_0 \frac{(\bar{x}-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \bar{y} + \\ +(A_1+\alpha A_0)\frac{(\bar{x}-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \bar{y}'. \tag{39}$$

Обобщенное условие касания при этом также выполнено на многообразии, задаваемом общим решением рассматриваемых уравнений.

Применение преобразования (6), (39) к уравнению (38) переводит его в уравнение

$$(A_1+\alpha A_0)\frac{(x-a)^2}{\Gamma(2-\alpha)} \bar{y}''=0,$$

то есть $\bar{y}''=0$. □

С точки зрения теории дробного интегро-дифференцирования, семейство уравнений (38) оказывается весьма интересным. Так, несмотря на наличие в (38) дробных производных Римана–Лиувилля, начальные условия могут быть поставлены для такого уравнения в точке $x=a$ классическим образом: $y(a)=A_1,\ \ y'(a)=A_2$. Это объясняется отсутствием у общего решения сингулярности в точке $x=a$. Поставить начальные условия в виде (32), являющемся естественным для дробно-дифференциальных уравнений вида ${}_aD_x^{1+\alpha}y = f(x,y,{}_aD_x^{\alpha}y)$ с дробными производными Римана–Лиувилля, к которому принадлежит и семейство (38), в данном случае оказывается невозможным. Это связано с тем, что на общем решении ${}_aD_x^{\alpha-1}y\big|_{x=a}=0$, а ${}_aD_x^{\alpha}y\big|_{x=a}$ обращается в бесконечность.

Общее решение семейства уравнений (38) не зависит явно от параметра a. Это приводит к тому, что семейство (38) оказывается инвариантным относительно преобразования переноса $\bar{x}=x+\varepsilon,\ \bar{y}=y$ в том смысле, что в результате преобразования одно уравнение семейства переходит в другое уравнение этого же семейства. С точки зрения группового анализа это преобразование может рассматриваться как преобразование эквивалентности для (38). Однако каждое конкретное уравнение этого семейства, выделяемое путем фиксирования значения параметра a, такое преобразование по-прежнему допускать не будет по тем же причинам, по которым уравнение (1) не допускает преобразование (35).

Пример 5. Для уравнения (1) можно построить семейство эквивалентных ему по решению (3) дробно-дифференциальных уравнений того же типа, но со смещенным началом отсчета. С использованием общего решения (3) было получено следующее b – параметрическое семейство уравнений:

$$-\alpha\Gamma(1-\alpha)(x-b)^{1+\alpha}\,{}_bD_x^{1+\alpha}\left[(x-a)^{1-\alpha}y\right]+ \\ +(1+\alpha)\Gamma(2-\alpha)(x-b)^{\alpha}\,{}_bD_x^{\alpha}\left[(x-a)^{1-\alpha}y\right]- \\ -(x-a)^{1-\alpha}y=0. \quad (40)$$

Так как в уравнении (1) $x>a$, то в данном случае $b>a$. Как и в случае уравнения (38), преобразование (35) допускается этим семейством уравнений, но не конкретным его представителем. Интересно отметить, что в пределе $b\to a$ уравнение (40) не переходит в уравнение (1), а превращается в другое эквивалентное дробно-дифференциальное уравнение. □

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Понятие эквивалентности по решению можно формально распространить и на уравнения в частных производных. Рассмотрим в качестве примера дифференциальное уравнение

$$u_t+Lu=0,\ u=u(t,x), \quad (41)$$

где L – линейный дифференциальный оператор, действующий по переменной x и не зависящий от t и u. Например, при $L=-D_x^2$ уравнение (41) представляет собой одномерное линейное уравнение теплопроводности (или диффузии).

Уравнение (41) можно формально рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение относительно только одной независимой переменной t. Тогда его формальное решение может быть записано в виде

$$u(t,x)=e^{-(t-t_0)L}u_0(x), \quad (42)$$

где $u_0(x)=u(t_0,x)$. Оператор

$$e^{-(t-t_0)L}=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-t_0)^k}{k!}L^k$$

(здесь I – единичный оператор) принято называть оператором эволюции.

Формальное решение (42) позволяет построить эквивалентное уравнению (41) дробно-дифференциальное уравнение с дробной производной по времени Римана–Лиувилля вида ${}_{t_0}D_t^{\alpha}u,\ \alpha\in(0,1)$. Вычисления приводят к следующему результату:

$${}_{t_0}D_t^{\alpha}u-(t-t_0)^{-\alpha}e^{(t-t_0)L}E_{1,1-\alpha}(-(t-t_0)L)u=0, \quad (43)$$

где оператор

$$E_{1,1-\alpha}(-(t-t_0)L)=I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(t-t_0)^k}{\Gamma(k+1-\alpha)}L^k$$

порождается функцией типа Миттаг–Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ z\in\mathbb{C}$$

(см., например, [12]).

На практике достаточно часто интерес представляет поведение системы на больших временах, то есть при $t>>t_0$. Можно показать, что если оператор L ограничен и нуль не является его точкой спектра, то в уравнении (43) можно осуществить предельный переход при $t_0\to-\infty$. Используя асимптотическое свойство функции Миттаг–Леффлера [12]

$$E_{\mu,\nu}(z)=z^{(1-\nu)/\mu}\exp(z^{1/\mu})\mu^{-1}+O(|z|^{-1}),\ |z|\to\infty,$$

$$\mu\neq 0,\ |\arg z|\le\beta,\ \beta\in\left(\frac{\pi\gamma}{2},\min\{\pi,\pi\gamma\}\right),\ \gamma\in(0,2)$$

и предполагая, что оператор L обладает свойствами, обеспечивающими выполнение приведенных условий, для второго слагаемого в левой части уравнения (43) получаем разложение

$$(t-t_0)^{-\alpha}e^{(t-t_0)L}E_{1,1-\alpha}(-(t-t_0)L)u\approx \\ \approx(t-t_0)^{-\alpha}e^{(t-t_0)L}\left[-(t-t_0)L\right]^{\alpha}e^{-(t-t_0)L}u= \\ =(-L)^{\alpha}u.$$

Здесь приближенное равенство означает равенство с точностью до членов порядка $O\left(\left|\left[-(t-t_0)L\right]^{-1}\right|\right)$, а дробная степень $(-L)^{\alpha}$ оператора L определяется формулой Балакришнана [1, 13]:

$$(-L)^{\alpha}u=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{e^{tL}-I}{t^{1+\alpha}}dt,\ \alpha\in(0,1).$$

В результате предельного перехода $t_0\to-\infty$ уравнение (43) принимает следующий вид:

$${}_{-\infty}D_t^{\alpha}u-(-L)^{\alpha}u=0. \quad (44)$$

Решение (42) при любом значении t_0 удовлетворяет уравнению (44), так как

$${}_{-\infty}D_t^{\alpha}e^{-tL}=(-L)^{\alpha}e^{-tL}.$$

Таким образом, уравнение (44) эквивалентно уравнениям (41) и (43) по формальному решению (42) и, следовательно, может рассматриваться как дробно-дифференциальная *функциональная* модель того же процесса, который моделируется уравнением (41).

Если же модель (44) рассматривать как структурную, то процессы, описываемые уравнениями (41) и (44), оказываются принципиально различными. Слагаемые в виде дробных производных в моделях (43) и (44) отвечают за эффекты степенной памяти. Однако совпадение формальных решений этих уравнений с решением уравнения (41), являющегося локальным и не описывающего эффекты памяти, означает, что память в моделях (43) и (44) не оказывает влияния на развитие процесса во времени, то есть скомпенсирована вторым слагаемым соответствующего уравнения. Здесь можно провести аналогию с тепловыми процессами в стационарном режиме, когда теплообмен с окружающей средой существует, однако изменения температуры в среде не происходит. Любое нарушение равновесия в этой системе приводит к проявлению влияния эффектов памяти на эволюцию. Например, на больших временах t вместо уравнения (44) можно перейти к рассмотрению его возмущения

$$ {}_{t_0}D_t^{\alpha}u-(-L)^{\alpha}u=0. \quad (45)$$

В такой модели память системы уже не скомпенсирована и оказывает влияние на эволюцию. Как следствие, общее решение уравнения (45) уже будет отличаться от (42). В результате модель (45) будет описывать слабо неравновесные по памяти процессы. При этом с течением времени система будет стремиться к равновесному состоянию, описываемому формальным решением (42).

Данный подход был впервые применен автором в работе [14] для уравнения Лиувилля, являющегося эволюционным уравнением вида (41), что позволило построить новые дробно-дифференциальные кинетические уравнения типа Цванцига.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе эвристический принцип эквивалентности по решению уравнений целого и дробного порядков открывает принципиальную возможность проводить исследование ряда качественных и количественных свойств дробно-дифференциальных моделей на эквивалентных им моделях, описываемых в терминах дифференциальных уравнений с производными целого порядка. При этом ключевой становится задача построения нелокальных преобразований, связывающих такие эквивалентные уравнения. Также остается открытым вопрос о том, образуют ли такие преобразования группу. Указанные задачи определяют возможное направление дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев, О. И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993.]

2. **Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p. [A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006.]

3. **Учайкин В. В.** Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с. [V. V. Uchaikin, *Fractional derivatives method*, (in Russian). Ul'yanovsk: <<Artishok>> publisher, 2008.]

4. **Учайкин В. В.** Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. 2003. Т. 173, № 8. С. 847–876. [V. V. Uchaikin, “Self-Similar Anomalous Diffusion and Levy-Stable Laws”, in *Physics-Uspekhi*, vol. 46, no. 8, pp. 821–849, 2003.]

5. **Аномальная** диффузия радионуклидов в сильнонеоднородных геологических формациях / под. ред. Л. А. Большова; Ин-т проблем безопасного развития атомной энергетики РАН. М.: Наука, 2010. 342 с. [*Anomalous Radionuclide Diffusion in Highly Heterogeneous Geological Formations*, ed. by L. A. Bolshov, (in Russian). Nuclear Safety Institute (IBRAE) RAS. Moscow: Nauka, 2010.]

6. **Metzler R., Klafter J.** The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamic Approach // Physics Reports. 2000. V. 339. P. 1–77. [R. Metzler, J. Klafter, “The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamic Approach”, in *Physics Reports,* vol. 339, pp. 1–77, 2000.]

7. **Anomalous** Transport: Foundations and Applications / R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov (eds.). Berlin: Willey-VCH, 2008, 584 p. [*Anomalous Transport: Foundations and Applications* / R. Klages, G. Radons, I. M. Sokolov (eds.). Berlin: Willey-VCH, 2008.]

8. **Fractional** Dynamics: Recent Advances / J. Klafter, S. C. Lim, R. Metzler (eds.). Singapore: World Scientific, 2011, 532 p. [*Fractional Dynamics: Recent Advances* / J. Klafter, S. C. Lim, R. Metzler (eds.). Singapore: World Scientific, 2011.]

9. **Справочник** по специальным функциям / под ред. М. Абрамовиц и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с. [*Handbook of mathematical functions* / M. Abramovitz and I. A. Stegun (eds.). Washington: U.S. Government Printing Office, 1972.]

10. **Псху А. В.** Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с. [A. V. Pskhu, *Partial fractional differential equations*. Moscow: Nauka, 2005.]

11. **Газизов Р. К., Касаткин А. А., Лукашук С. Ю.** Непрерывные группы преобразований дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, № 3 (21). С. 125–135. [R. K. Gazizov, A. A. Kasatkin, and S. Yu. Lukashchuk, “Continuous transformation groups for fractional differential equations” (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 9, no. 3 (21), pp. 125–135, 2007.]

12. **Джрбашян М. М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с. [M. M. Dzhrbashyan, *Integral transformations and representations of functions in complex domain*. Moscow: Nauka, 1966.]

13. **Иосида К.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с. **[** K. Yosida, *Functional analysis*. Springer, 1995. **]**

14. **Lukashchuk S. Yu.** Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equations // Central European Journal of Physics. 2013. V. 11, № 6. P. 740–749. **[** S. Yu. Lukashchuk, "Time-fractional extensions of the Liouville and Zwanzig equations", in *Central European Journal of Physics*, vol. 14, no. 6. pp. 740–749, 2013. **]**

ОБ АВТОРЕ

ЛУКАЩУК Станислав Юрьевич, доц. каф. высокопроизводительных вычислительных технологий и систем. Дипл. инж.-теплофизик (УГАТУ, 1997). Канд. физ.-мат. наук по теплофизике и молекулярной физике (БашГУ, 1999). Иссл. в обл. математического и компьютерного моделирования.

METADATA

Title: Interconnection between mathematical models described by integer- and fractional-order differential equations.

Authors: S. Yu. Lukashchuk.

Affiliation:
Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: lsu@ugatu.su.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 20, no. 4 (74), pp. 97-106, 2016. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: A heuristic solution-equivalence principle is proposed for mathematical models described by ordinary differential equations of integer and fractional order. In accordance with this principle, an integer-order ordinary differential equation exists for any ordinary fractional differential equation such that both equations have the same solution and are connected by a nonlocal transformation. The proposed principle is verified in the paper by several examples. Some qualitative properties for solution-equivalent equations and corresponding initial conditions are also discussed. Furthermore, it is shown that the solution-equivalence principle can be enhanced to partial differential equations of integer and fractional orders.

Key words: mathematical model, fractional differential equation, solution-equivalence principle, solution-equivalent equation, nonlocal transformation, invariance, symmetry.

About author:

LUKASHCHUK, Stanislav Yur'evich, Associate Prof., Dept. of High Performance Computing Technologies and Systems. Cand. of Phys. and Math. Sci. (BashGU, 1999).