ISSN 1992-6502 (Print)
2016. Т. 20, № 4 (74). С. 107–113

Вестник УГАТУ

ISSN 2225-2789 (Online)
http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 519.676

Статистические алгоритмы оптимальной фильтрации сигналов в нелинейных диффузионно-скачкообразных стохастических системах

К. А. Рыбаков

rkoffice@mail.ru

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Поступила в редакцию 26.03.2016

Аннотация. В статье предложен статистический алгоритм приближенного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации, а также его модификации. Модель системы наблюдения описывается стохастическими дифференциальными уравнениями, одно из которых содержит не только диффузионную компоненту, но и скачкообразную. Основу предложенных алгоритмов составляет переход от задачи фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий с помощью интерпретации одного из слагаемых в соответствующем уравнении Дункана–Мортенсена–Закаи как функции поглощения и восстановления реализаций вспомогательного случайного процесса. Решение такой задачи анализа можно найти приближенно, используя методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий. В работе приведен алгоритм совместного моделирования системы наблюдения и приближенного оценивания, основанный на применении метода «максимального сечения». Преимущества разработанного алгоритма состоят в простоте реализации и универсальности, а именно возможности решения задачи оптимальной фильтрации для линейных и нелинейных моделей объекта наблюдения и измерительной системы, для одномерного и многомерного случаев.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности; ветвящийся процесс; диффузионный процесс; метод статистических испытаний; оптимальная фильтрация; скачкообразный процесс; стохастическая система; уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи.

ВВЕДЕНИЕ

В работе описан метод сведения задачи оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа, т.е. задачи оценивания вектора состояния объекта наблюдения по результатам косвенных измерений со случайными ошибками в соответствии с заданным критерием оптимальности, к задаче статистического анализа вспомогательной стохастической системы с разрывами, обрывами и ветвлениями траекторий.

Работы [1, 2] содержат основные соотношения для решения задачи анализа вспомогательной стохастической системы, а также детальные алгоритмы моделирования ее траекторий методом Монте-Карло с последующим получением оценки вектора состояния исходной системы в приложении к стохастическим системам диффузионного типа. Этот подход основан на общности структуры уравнения оптимальной нелинейной фильтрации для ненормированной апостериорной плотности вероятности, а именно уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи при фиксированных измерениях, и обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, включающего дополнительные слагаемые – функции поглощения и восстановления [3]. Он применялся и для решения задач прогнозирования [4]. Апробация разработанных в [1, 2] алгоритмов проводилась на модельных примерах: для линейно-гауссовского случая эти алгоритмы обеспечивают практически потраекторное совпадение с оптимальной оценкой, получаемой при применении фильтра Калмана–Бьюси. Погрешности обусловлены тем, что и анализ вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий, и фильтрация

Работа поддержана грантом РФФИ 13-08-00323-а.

Калмана–Бьюси проводились приближенно с использованием методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений невысокой точности [5] и методов моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий [6–8]. Кроме того, апробация проводилась на моделях, заданных нелинейными уравнениями, с последующим сравнением результатов с обобщенным фильтром Калмана–Бьюси, фильтром Пугачева и фильтром оптимальной структуры [5, 9–11].

Далее в [12] был рассмотрен более сложный класс стохастических систем – системы диффузионно-скачкообразного типа, т.е. в предположении, что объект наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей. Такие уравнения позволяют описывать различные явления и процессы, учитывающие случайные воздействия, в том числе импульсные. Было показано, что задача оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа может быть решена как задача анализа вспомогательной стохастической системы, траектории которой могут иметь разрывы, обрываться и разветвляться в случайные моменты времени. Разрывы траекторий обусловлены исходной постановкой задачи, они характеризуются заданными интенсивностью и распределением величины приращений, а обрывы и ветвления должны моделироваться на основе текущих измерений оцениваемого вектора состояния. Интенсивности обрывов и ветвлений выражаются через функции, задающие модель измерительной системы, и текущие измерения.

Основные приложения для подобных систем хорошо известны. Это задачи радиотехники и навигации, управление движущимися объектами, идентификация параметров математических моделей процессов и систем управления.

В статье предлагается детальный статистический алгоритм приближенного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа с помощью моделирования ансамбля траекторий вспомогательной стохастической системы с разрывами, обрывами и ветвлениями траекторий. Обсуждаются возможные модификации предложенного алгоритма.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей [9, 12, 13]:

$$dX(t) = f(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dW(t) + \\ + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

в котором $X \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния; $t \in \mathrm{T} = [t_0, T]$ – отрезок времени функционирования системы; $f(t,x)$: $\mathrm{T}\times\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, $\sigma(t,x)$: $\mathrm{T}\times\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^{n\times s}$ – заданные функции; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального вектора состояния X_0, $Q(t)$ – общий пуассоновский процесс, заданный в форме $Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k$, где $P(t)$ – пуассоновский процесс, Δ_k – независимые случайные векторы из R^n, распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k, \Delta)$, т.е. вектор состояния X получает случайные приращения в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots \in \mathrm{T}$, образующие пуассоновский поток событий:

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k. \tag{2}$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k, \Delta \mid \xi)$, характеризующая распределение Δ_k при условии $X(\tau_k - 0) = \xi$. В частном случае $\psi(\tau_k, \Delta \mid \xi) = \psi(\tau_k, \Delta)$. Наряду с $\psi(\tau_k, \Delta \mid \xi)$ введем плотность вероятности $\eta(\tau_k, \Delta \mid \xi)$, характеризующую распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k - 0) = \xi$.

Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени $\tau_1, \tau_2, \ldots$, а также пуассоновский процесс $P(t)$ определяются интенсивностью $\lambda(t, x)$, т.е. условная вероятность события (2) при $X(t) = x$ на промежутке $[t, t + \Delta t]$ определяется равенством

$$\mathrm{P}(t, t+\Delta t) = \lambda(t,x)\Delta t + o(\Delta t). \tag{3}$$

Модель измерительной системы записывается в форме [5]

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \tag{4}$$

где $Z \in \mathrm{R}^m$ – вектор измерений; $c(t,x)$: $\mathrm{T}\times\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$, $\zeta(t)$: $\mathrm{T}\to\mathrm{R}^{m\times d}$ – заданные функции; $N(t)$ – d-мерный стандартный гауссовский белый шум.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$. При использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оценивания имеем [14]:

$$\hat{X}(t) = \mathrm{M}\left[X(t) \mid Z_0^t\right] = \int_{\mathrm{R}^n} x p(t, x \mid Z_0^t) dx,$$

где $p(t, x \mid Z_0^t)$ – апостериорная плотность вероятности вектора состояния X, удовлетворяющая уравнению Стратоновича–Кушнера. Как и в [1, 2], апостериорную плотность вероятности

$p(t,x\,|\,Z_0^t)$ будем определять через решение уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи, которое в отличие от уравнения Стратоновича–Кушнера линейно и в детерминированной записи имеет структуру обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [3].

В симметризованной форме Стратоновича уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи записывается в виде [12]

$$\frac{d_{1/2}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)}{dt} = \mathrm{K}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) + \mu(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t), \quad \varphi(t_0,x) = \varphi_0(x), \tag{5}$$

где K – линейный оператор, определенный соотношением

$$\mathrm{K}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f_i(t,x)\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)\Big] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)\Big] - \lambda(t,x)\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) + \int_{\mathrm{R}^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\varphi(t,\xi\,|\,Z_0^t)d\xi,$$

а $\mu(t,x,z)$ – функция, заданная следующим образом:

$$\mu(t,x,z) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}c_k(t,x)q_{kr}(t)\left(z_r - \frac{c_r(t,x)}{2}\right).$$

Здесь $\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$ – ненормированная апостериорная плотность вероятности вектора состояния X, связанная с нормированной плотностью $p(t,x\,|\,Z_0^t)$ формулой

$$p(t,x\,|\,Z_0^t) = \frac{\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)}{\int_{\mathrm{R}^n}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)dx}, \tag{6}$$

функции $g(t,x)$: $\mathrm{T}\times\mathrm{R}^n\to\mathrm{R}^{n\times n}$, $q(t)$: $\mathrm{T}\to\mathrm{R}^{m\times m}$ определяются следующим образом:

$$g(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x), \quad q(t) = \left(\zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t)\right)^{-1},$$

а $\varphi_0(x)$ – заданная плотность вероятности начального вектора состояния X_0.

СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С РАЗРЫВАМИ, ОБРЫВАМИ И ВЕТВЛЕНИЯМИ ТРАЕКТОРИЙ

Далее будем использовать детерминированную запись уравнения (5) при фиксированных измерениях Z_0^t:

$$\frac{\partial\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)}{\partial t} = \mathrm{K}\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) - \mu^-(t,x,Z(t))\times \times\varphi(t,x\,|\,Z_0^t) + \mu^+(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t), \tag{7}$$

где

$$\mu^-(t,x,z) = \begin{cases} -\mu(t,x,z), & \mu(t,x,z) < 0, \\ 0, & \mu(t,x,z) \ge 0, \end{cases}$$

$$\mu^+(t,x,z) = \begin{cases} \mu(t,x,z), & \mu(t,x,z) > 0, \\ 0, & \mu(t,x,z) \le 0. \end{cases}$$

В правой части уравнения (7) по терминологии [3] слагаемые $\mu^-(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$ и $\mu^+(t,x,Z(t))\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$ – функции поглощения и восстановления траекторий случайного процесса $X(t)$ соответственно. Следовательно, функции $\mu^-(t,x,z)$ и $\mu^+(t,x,z)$ – интенсивности обрывов и ветвлений траекторий, а условные вероятности обрывов и ветвлений при $X(t) = x$ и $Z(t) = z$ на промежутке $[t,\ t+\Delta t]$ определяются равенствами

$$\mathrm{P}^-(t,t+\Delta t) = \mu^-(t,x,z)\Delta t + o(\Delta t),$$
$$\mathrm{P}^+(t,t+\Delta t) = \mu^+(t,x,z)\Delta t + o(\Delta t). \tag{8}$$

Таким образом, функции $p(t,x\,|\,Z_0^t)$ и $\varphi(t,x\,|\,Z_0^t)$ характеризуют распределение вектора X – состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), – с учетом того, что траектории случайного процесса $X(t)$ имеют разрывы, обрываются и разветвляются. Все перечисленные события образуют неоднородные пуассоновские потоки с известными интенсивностями, при ветвлении в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь, при обрыве прекращается моделирование только одной ветви. Для удобства моделирования, как и в случае стохастических систем диффузионного типа [1, 2], каждая из ветвей должна рассматриваться как самостоятельная траектория.

При приближенном решении задачи оптимальной фильтрации необходимо моделировать траектории вспомогательной стохастической системы, отличающейся от исходной модели объекта наблюдения (1) наличием обрывов и ветвлений траекторий, соответствующий случайный процесс будем также обозначать $X(t)$. По ансамблю траекторий, полученному в результате применения методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методов моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий [5–8, 13], можно оценить как нормированную $p(t, x \mid Z_0^t)$, так и ненормированную $\varphi(t, x \mid Z_0^t)$ апостериорные плотности вероятности, получив таким образом приближенные решения уравнений Стратоновича–Кушнера и Дункана–Мортенсена–Закаи. Оптимальная оценка $\hat{X}(t)$ может быть найдена и с помощью усреднения по ансамблю траекторий, и по апостериорной плотности вероятности.

Чтобы сформировать алгоритм решения задачи оптимальной фильтрации, можно воспользоваться результатами работ [1, 2] и алгоритмами численного решения стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей [8, 13].

Наличие разрывов, а также обрывов и ветвлений траекторий вспомогательного случайного процесса $X(t)$ усложняет алгоритм моделирования. Так, регулярную (с постоянным шагом) или нерегулярную (с переменным шагом) сетку для численного интегрирования стохастического дифференциального уравнения (1) без пуассоновской составляющей (система диффузионного типа):

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{9}$$

необходимо дополнить узлами, которые соответствуют событиям двух пуассоновских потоков: разрывов с заданной интенсивностью $\lambda(t, x)$, а также обрывов и ветвлений, интенсивность которых определяется функцией $\mu(t, x, z)$. Напомним, что отрицательные значения функции $\mu(t, x, z)$ задают интенсивность обрывов, а положительные значения – интенсивность ветвлений. Эти дополнительные узлы сетки, соответствующие событиям двух пуассоновских потоков, формируются отдельно для каждой траектории вспомогательного случайного процесса $X(t)$. Чтобы упростить алгоритм моделирования, предлагается рассмотреть пуассоновский поток событий, включающий и разрывы, и обрывы, и ветвления траекторий. Суммарная интенсивность такого потока определяется формулой $\Lambda(t, x, z) = \lambda(t, x) + |\mu(t, x, z)|$, причем события типа разрыва траектории реализуются с вероятностью $\lambda(t, x) / \Lambda(t, x, z)$, а события типа обрыва и ветвления траектории – с вероятностью $|\mu(t, x, z)| / \Lambda(t, x, z)$. Моделирование такого пуассоновского потока событий проще, а результаты будут статистически эквивалентны независимому моделированию двух исходных пуассоновских потоков, что основано на свойстве композиции пуассоновских потоков событий. Здесь, как и в [1, 2], учтено, что события типа обрыва и события типа ветвления траектории разделены во времени, т.е. не могут происходить одновременно, поэтому определять суммарную интенсивность как

$$\Lambda(t, x, z) = \lambda(t, x) + \mu^-(t, x, z) + \mu^+(t, x, z)$$

нет необходимости.

При приближенном определении оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ предлагается использовать метод статистических испытаний: моделирование траекторий вспомогательного случайного процесса $X(t)$ с учетом разрывов, обрывов и ветвлений при фиксированных измерениях Z_0^t с последующим усреднением. При этом можно применять различные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий. Далее приведен алгоритм совместного моделирования системы наблюдения и приближенного оценивания на основе одношагового численного метода решения стохастических дифференциальных уравнений [5] и метода «максимального сечения» [6–8].

Шаг 1. Задать M – число моделируемых вспомогательных траекторий; h – шаг численного интегрирования; величину Λ^*:

$$|\Lambda(t, X(t), Z(t))| \le \Lambda^*$$

(Λ^* можно оценить по результатам пробного моделирования траекторий системы наблюдения). Получить реализации начальных векторов состояний X_0 и X_0^i согласно заданной плотности вероятности $\varphi_0(x)$, где X_0 – начальный вектор состояния для основной траектории, для которой проводятся измерение и оценивание, X_0^i – для вспомогательных траекторий, по которым приближенно вычисляется оптимальная оценка, и моменты времени ξ^i, через которые могут произойти разрывы, обрывы или ветвления траекторий: $\xi^i = -\ln\beta/\Lambda^*$, $i = 1, 2, ..., M$.

Здесь и далее β – различные реализации (для всех i) случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (0,1).

Положить $k = 0$, $t_*^i = t_0$, $F^i = 1$ (в случае обрыва траектории с номером i при последующем моделировании $F^i = 0$), $i = 1, 2, ..., M$.

Шаг 2. Положить $M_k = \Sigma_{i=1}^M F^i$ и найти оптимальную оценку $\hat{X}_k$ как выборочное среднее реализаций $\mathrm{X}_k = \{X_k^i\}_{i=1,2,...,M;\, F^i=1}$:

$$\hat{X}_k = \frac{1}{M_k} \sum_{i=1,2,\ldots,M;\; F^i=1} X_k^i.$$

Проверить условия:

а) если $0 < T - t_k < h$, то скорректировать шаг численного интегрирования: $h = T - t_k$.

б) если $T - t_k = 0$, то завершить процесс.

Получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k = t_0 + kh\}$:

$$X_{k+1} = F(t_k, X_k, \Delta W, h),$$

получить вектор измерений:

$$Z_k = G(t_k, X_k, \Delta V, h),$$

и положить $i = 1$, $j = 0$ (j – количество новых ветвей на шаге k).

В этих формулах и далее $F(t_k, X_k, \Delta W, h)$ – функция, ставящая в соответствие реализации вектора состояния X_k в узле t_k новую реализацию в узле $t_k + h$, $G(t_k, X_k, \Delta V, h)$ – функция, ставящая в соответствие реализации вектора состояния X_k вектор измерений Z_k, ΔW и ΔV – различные для всех k и i (а также для промежуточных расчетов) реализации случайных векторов размеров s и d соответственно, координаты которых независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Например,

$$F(t_k, X_k, \Delta W, h) = X_k + h\, f(t_k, X_k) + \\ + \sqrt{h}\,\sigma(t_k, X_k)\Delta W,$$

$$G(t_k, X_k, \Delta V, h) = c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}}\Delta V$$

для стохастического метода Эйлера [5].

Здесь же можно получить ковариационную матрицу ошибки оценивания:

$$\Gamma_k = \frac{1}{M_k - 1} \sum_{i=1,2,\ldots,M;\; F^i=1} (X_k^i - \hat{X}_k)(X_k^i - \hat{X}_k)^{\mathrm{T}},$$

а также по выборке X_k можно найти оценку апостериорной плотности вероятности $p(t_k, x \mid Z_0^{t_k})$, например, с помощью построения гистограммы. Это дает возможность использовать другие критерии при нахождении оценки вектора состояния, а не только критерий минимума среднеквадратической ошибки, или вычислять оптимальную оценку $\hat{X}_k$ следующим образом:

$$\hat{X}_k = \int_{\mathrm{R}^n} x p(t_k, x \mid Z_0^{t_k}) dx .$$

Приближенные решения уравнений Стратоновича–Кушнера и Дункана–Мортенсена–Закаи в узлах сетки $\{t_k\}$, т.е. функции $p(t_k, x \mid Z_0^{t_k})$ и $\varphi(t_k, x \mid Z_0^{t_k})$ соответственно, связаны соотношением $\varphi(t_k, x \mid Z_0^{t_k}) = M_k p(t_k, x \mid Z_0^{t_k}) / M$, где M – начальное число моделируемых вспомогательных траекторий, задаваемое на шаге 1 алгоритма, что является приближенным аналогом формулы (6).

Шаг 3. Проверить условие $F^i = 0$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 10, иначе: при $t_*^i + \xi^i \ge t_k + h$ перейти к шагу 4, а при $t_*^i + \xi^i < t_k + h$ положить $\tilde{X}^i = X_k^i$, $\tau^i = t_k$ и перейти к шагу 5.

Шаг 4. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1}^i = F(t_k, X_k^i, \Delta W, h).$$

Перейти к шагу 10.

Шаг 5. Проверить условие $t_*^i + \xi^i \ge t_k + h$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 9, иначе – к шагу 6.

Шаг 6. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{X}^i = F(\tau^i, \tilde{X}^i, \Delta W, h^i), \quad h^i = t_*^i + \xi^i - \tau^i.$$

Положить $\tau^i = \tau^i + h^i$ и получить реализацию α случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (0,1). Проверить условие $\alpha \le |\Lambda(\tau^i)| / \Lambda^*$, где $\Lambda(\tau^i) = \Lambda(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k)$, и если оно выполнено, то перейти к шагу 7, иначе – к шагу 8.

Шаг 7. Получить реализацию γ случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (0,1), и проверить условия:

а) если $\lambda(\tau^i)/\Lambda(\tau^i) \le \gamma$, $\lambda(\tau^i) = \lambda(\tau^i, \tilde{X}^i)$ (разрыв траектории), то получить реализацию случайного вектора Δ, распределенного с плотностью вероятности $\psi(\tau^i, \Delta \mid \tilde{X}^i)$, и положить $\tilde{X}^i = \tilde{X}^i + \Delta$ или сразу получить реализацию случайного вектора $\tilde{X}^i$, распределенного с плотностью вероятности $\eta(\tau^i, x \mid \tilde{X}^i)$;

б) если

$$\lambda(\tau^i)/\Lambda(\tau^i) > \gamma \text{ и } \mu(\tau^i) = \mu(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) < 0$$

($\mu^-(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$, обрыв траектории), то положить $F^i = 0$ (траектория далее не моделируется) и перейти к шагу 10;

в) если

$$\lambda(\tau^i)/\Lambda(\tau^i) > \gamma \text{ и } \mu(\tau^i) = \mu(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$$

($\mu^+(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$, ветвление траектории), то положить $j = j + 1$, $F^{M+j} = 0$, $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$, $\tilde{X}^{M+j} = \tilde{X}^i$, $\tau^{M+j} = \tau^i$ и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или новое ветвление: $\xi^{M+j} = -\ln\beta/\Lambda^*$.

Шаг 8. Положить $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или новое ветвление рассматриваемой траектории: $\xi^i = -\ln\beta/\Lambda^*$.

Перейти к шагу 5.

Шаг 9. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1}^i = F(\tau^i, \tilde{X}^i, \Delta W, h^i), \quad h^i = t_k + h - \tau^i.$$

Шаг 10. Проверить условия:

а) если $i = M + j$, то положить $M = M + j$, $t_{k+1} = t_k + h$, $k = k + 1$ и перейти к шагу 2;

б) если $i < M$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 3;

в) если $M \le i < M + j$ (новые ветви), то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 5.

Вариант упрощения приведенного алгоритма состоит в следующем: полагается, что на промежутке времени между двумя соседними узлами сетки $\{t_k\}$ происходит только одно событие типа разрыва, обрыва или ветвления траектории случайного процесса $X(t)$. Для систем диффузионного типа (9) такой алгоритм был предложен в [1]. Для систем диффузионно-скачкообразного типа (1) приведенный выше алгоритм можно сформировать аналогичным образом. В этом случае соответствующий пуассоновский поток событий моделируется, вообще говоря, неточно, но сокращается число шагов в алгоритме и увеличивается скорость расчетов при прочих равных условиях.

Более радикальный способ упрощения процедуры моделирования траекторий вспомогательного случайного процесса $X(t)$ состоит в применении численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений только на сетке $\{t_k\}$ без дополнительных узлов. Если при этом используется метод «максимального сечения» для моделирования неоднородного пуассоновского потока событий, то значения вектора состояния $\tilde{X}^i$ в промежуточные моменты времени τ^i на вспомогательных траекториях можно получать в результате линейной интерполяции с использованием значений, полученных в узлах сетки $\{t_k\}$. Кроме того, события типа разрыва, обрыва и ветвления можно моделировать только в узлах сетки $\{t_k\}$ с вероятностями, которые определяются формулами (3) и (8). Такой вариант алгоритма для систем диффузионного типа (9) приведен в [14, 15].

Предложенный алгоритм может эффективно применяться при решении задачи фильтрации в частных случаях, а именно для систем диффузионного типа, описываемых уравнением (9), т.е. в случае, если траектории случайного процесса $X(t)$ не имеют разрывов (при условии $\lambda(t, x) = 0$ и $\Delta_k = 0$), и для систем скачкообразного типа:

$$dX(t) = dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \qquad (10)$$

когда $X(t) = X_0 + Q(t)$ – случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями (при условии $f(t, x) = 0$ и $\sigma(t, x) = 0$), при этом уравнение измерительной системы (4) остается неизменным.

Преимущества предлагаемого алгоритма приближенного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации в системах диффузионно-скачкообразного типа такие же, как и для алгоритма приближенного решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации в системах диффузионного типа (9), перечисленные в [1, 2]. Они остаются неизменными и при решении задачи фильтрации для систем скачкообразного типа (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рыбаков К. А.** Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 3. С. 91–110. [K. A. Rybakov, “Reducing the nonlinear filtering problem to the analysis of stochastic systems with terminating and branching paths,” (in Russian), in *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya*, no. 3, pp. 91-110, 2012.]

2. **Рыбаков К. А.** Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Авиакосмическое приборостроение. 2013. № 3. С. 15–20. [K. A. Rybakov, “Modified algorithm for optimal signal filtering based on modeling special branching process,” (in Russian), in *Aviakosmicheskoe priborostroenie*, no. 3, pp. 15-20, 2013.]

3. **Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А.** Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. [I. E. Kazakov, V. M. Artem’ev, V. A. Bukhalev, *Analysis of Systems with Random Structure*, (in Russian). Moscow: Nauka Publishers, 1993.]

4. **Рыбаков К. А.** Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2015. № 1. С. 25–38. [K. A. Rybakov, “Extrapolation algorithms for stochastic differential systems based on modeling special branching process,” (in Russian), in *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya*, no. 1, pp. 25-38, 2015.]

5. **Пантелеев А. В., Руденко Е. А., Бортаковский А. С.** Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008. [A. V. Panteleev, E. A. Rudenko, A. S. Bortakovskii, *Nelineynye sistemy upravleniya: opisanie, analiz i sintez*, (in Russian). Moscow: University Book, 2008.]

6. **Михайлов Г. А., Аверина Т. А.** Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. 2009. Т. 428, № 2. С. 163–165. [G. A. Mikhaylov, T. A. Averina, “The maximal section algorithm in the Monte Carlo method,” in *Doklady Mathematics*, vol. 80, no. 2, pp. 671-673, 2009.]

7. **Михайлов Г. А., Рогазинский С. В.** Модифицированный метод «мажорантной частоты» для численного моделирования обобщенного экспоненциального распределения // Доклады АН. 2012. Т. 444, № 1. С. 28–30. [G. A. Mikhaylov, S. V. Rogazinskii, “The modified majorant frequency method for numerical simulation of the generalized exponential distribution,” in *Doklady Mathematics*, vol. 85, no. 3, pp. 325-327, 2012.]

8. **Аверина Т. А.** Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12, № 4. С. 361–374. [T. A. Averina, “Statistical simulation methods for a nonhomogeneous Poisson ensemble,” in *Numerical Analysis and Applications*, vol. 2, no. 4, pp. 289-301, 2009.]

9. **Пугачев В. С., Синицын И. Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. [V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn, *Stochastic Systems: Theory and Applications*. World Scientific, 2001.]

10. **Руденко Е. А.** Оптимальная структура непрерывного нелинейного фильтра Пугачева пониженного порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. 2013. № 6. С. 25–51. [E. A. Rudenko, “Optimal structure of continuous nonlinear reduced-order Pugachev filter,” in *Journal of Computer and Systems Sciences International*, vol. 52, no. 6. pp. 866-892, 2013.]

11. **Руденко Е. А.** Оптимальный конечномерный непрерывный нелинейный фильтр произвольного порядка // XII Всероссийское совещание по проблемам управления. Москва, 16–19 июня 2014 г.: Тр. М.: Институт проблем управления РАН, 2014. С. 676–687. [E. A. Rudenko, “Optimal finite continuous nonlinear filter of arbitrary order,” (in Russian), in *Proc. 12th All-Russian Conference on Control Problems* (Moscow, 16-19 June 2014, Institute of Control Sciences), pp. 676-687, 2014.]

12. **Рыбаков К. А.** Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. 2014. № 207. С. 54–60. [K. A. Rybakov, “Approximate filter for jump-diffusion models,” (in Russian), in *Nauchnyi vestnik MGTU GA*, no. 207, pp. 54-60, 2014.]

13. **Аверина Т. А., Рыбаков К. А.** Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 3. С. 85–116. [T. A. Averina, K. A. Rybakov, “Two methods for analysis of stochastic systems with Poisson component,” (in Russian), in *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya*, no. 3, pp. 85-116, 2013.]

14. **Параев Ю. И.** Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Советское радио, 1976. [Yu. I. Paraev, *Introduction to Statistical Dynamics of Control and Filtering Processes*, (in Russian). Moscow: Soviet Radio, 1976.]

15. **Рыбаков К. А.** Модифицированные статистические алгоритмы фильтрации и прогнозирования в непрерывных стохастических системах // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. № 2 (46). С. 155–162. [K. A. Rybakov, “Modified statistical algorithms for filtering and extrapolation in continuous-time stochastic systems,” (in Russian), in *Izvestiya Instituta matematiki i informatiki UdGU*, no. 2 (46), pp. 155-162, 2015.]

ОБ АВТОРЕ

РЫБАКОВ Константин Александрович, доц. каф. математической кибернетики. Дипл. математик-инж. (МАИ, 2002). Канд. физ.-мат. наук по сист. анализу, управл. и обраб. информ. (МАИ, 2006). Иссл. в обл. методов моделирования, анализа и синтеза стохастических систем управления.

METADATA

Title: Statistical algorithms of optimal filtering problem for nonlinear jump-diffusion models.

Authors: K. A. Rybakov

Affiliation:
Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI), Russia.

Email: rkoffice@mail.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 20, no. 4 (74), pp. 107-113, 2016. **ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).**

Abstract: New statistical algorithm and its modifications for solving the optimal nonlinear filtering problem are described. It is assumed that the observation object and measurement system are described by Itô stochastic differential equation, the observation object equation has compound Poisson component, which allows simulating impulse noises and perturbations. Statistical algorithms are based on the reducing the filtration problem to the analysis of stochastic systems with terminating and branching paths by the interpretation of the term in Duncan–Mortensen–Zakai equation as an absorption and recovery function of sample paths for auxiliary random process. The solution of analysis problem can be found approximately by using numerical methods for solving stochastic differential equations and methods for modeling nonhomogeneous Poisson flows. The modeling algorithm for observation system and optimal estimation of its state based on the maximal section method is given in the paper. The main advantages of this algorithm are easy implementation and universality, namely the possibility of solving the optimal filtering problem for linear and non-linear models of the observation system, for one-dimensional and multidimensional case.

Key words: branching processes; conditional density; Duncan–Mortensen–Zakai equation; jump-diffusion model; Monte Carlo method; optimal filtering problem; stochastic system.

About author:

RYBAKOV, Konstantin Alexandrovich, Associate Prof., Dept. of Math. Cybernetics. Dipl. Math.-Engineer (MAI, 2002). Cand. of Phys.-Math. Sci. (MAI, 2006).