

УДК 629.7

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВИБРАЦИЙ КОНСТРУКЦИИ И ОБОРУДОВАНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ ПУЛЬСАЦИИ ТЯГИ ДВИГАТЕЛЕЙ

А. А. Золотов¹, Э. Д. Нуруллаев²

¹zolotovaa@mai.ru, ²ned@mai.ru

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Поступила в редакцию 24.03.2023

Аннотация. В статье проанализированы воздействия при пульсации тяги двигателей, представлены модели и методы оценки спектральной плотности вибрационной перегрузки и перемещения сечения, что позволяет прогнозировать вибрационное нагружение отсека летательного аппарата и оборудования летательного аппарата с учетом амортизатора для различных конструктивных решений в широком спектре исходных данных. Работоспособность представленных подходов проиллюстрирована на конкретных примерах в различных сечениях корпуса. Полученные результаты могут быть полезны инженерно-техническим работникам профильных организаций, а также студентам соответствующего направления образования.

Ключевые слова: пульсация тяги; вибрационная перегрузка; спектральная плотность; среднее квадратическое отклонение.

ВВЕДЕНИЕ

При работе двигателей летательных аппаратов (ЛА) (ракетного блока, разгонного блока, космического аппарата, космической станции) возникает пульсация тяги, в связи с чем в прилегающих зонах появляются постоянно высокие вибрационные перегрузки, которые передаются на конструктивные элементы, расположенные в соответствующих сечениях корпуса. Тогда при оценке работоспособности конструкции и оборудования ЛА требуется знать вибрационное нагружение в различных сечениях корпуса.

АНАЛИЗ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПРИ ПУЛЬСАЦИИ ТЯГИ ДВИГАТЕЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Пульсация тяги характеризуется формированием не статических, а динамических нагрузок, т.к. время изменения значения вибрационного нагружения меньше периода собственных колебаний конструктивных элементов. Работоспособность конструкции и оборудования ЛА на активном участке полета характеризуется воздействием при пульсации тяги. Вероятностные характеристики воздействия при пульсации тяги позволяют определить вибрационное нагружение отсека ЛА. Схема вибрационного нагружения отсека ЛА представлена на рис. 1.

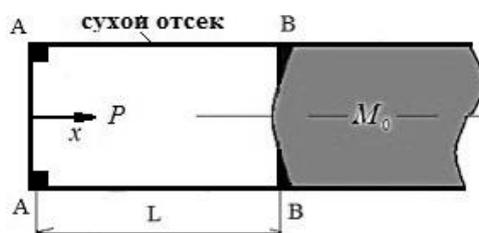


Рис. 1. Схема вибрационного нагружения отсека летательного аппарата.

Согласно представленной схеме предполагается, что отсек ЛА имеет 2 конструктивных стыка – в сечении А-А и в сечении В-В. Воздействие при пульсации тяги приложено к стыковочному шпангоуту в сечении А-А, тогда как в сечении В-В сохраняется соединение с ракетным блоком массой M_0 . Тягу двигателей представим в виде: $P(t)=P+f(t)$, где P – математическое ожидание тяги двигателей; $f(t)$ – воздействие при пульсации тяги. При проведении динамического анализа будем рассматривать отсек ЛА, как упругий стержень с постоянными массовыми и жесткостными характеристиками.

Вибрационное нагружение отсека ЛА может приводить к отказу оборудования ЛА. Для защиты оборудования ЛА от динамических нагрузок применяют специальные амортизаторы, которые погашают вибрационную перегрузку, что обеспечивается внутренним трением материала и внешним трением демпфера. Схема вибрационного нагружения оборудования ЛА представлена на рис. 2 [1].

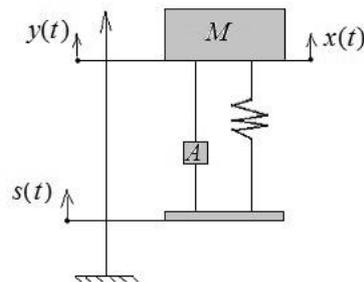


Рис. 2. Схема вибрационного нагружения оборудования летательного аппарата.

Согласно представленной схеме, предполагается, что оборудование ЛА имеет амортизатор, при анализе работы которого рассматривается колебательная система: колеблющееся основание → амортизатор → оборудование, где $s(t)$ – исходное смещение основания; $y(t)$ – результирующее выходное смещение оборудования; $x(t)=y(t)-s(t)$ – смещение оборудования относительно основания; A – основание; M – оборудование. При проведении динамического анализа будем рассматривать оборудование ЛА, как подвижный блок при колебании в сечении основания.

Рассмотрим задачу прогнозирования продольных вибраций конструкции ЛА по случайным колебаниям упругого стержня.

АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ ВИБРАЦИОННОГО НАГРУЖЕНИЯ ОТСЕКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Уравнение продольных колебаний отсека ЛА представим в виде [2]:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2 \cdot \eta \cdot \omega \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

где $y(x,t)$ – функция перемещения сечения; η – коэффициент демпфирования; ω – круговая частота колебаний; $c^2=E \cdot F/m(x)$ – жесткость оболочки; E – модуль упругости материала; F – площадь сечения оболочки; $m(x)$ – погонная масса оболочки.

Уравнение (1) решается при граничных условиях на концах упругого стержня.

На конце в сечении А-А продольные колебания уравниваются силой инерции μ -массы двигателей и $f(t)$ -воздействием при пульсации тяги:

$$\left(E \cdot F \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -\mu \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + f(t) \right)_{x=0} \quad (2)$$

На конце в сечении В-В продольные колебания уравниваются силой инерции M_0 – массы ракетного блока:

$$\left(E \cdot F \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = -M_0 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=L} \quad (3)$$

Решение уравнений $y(x,t)$ и $f(t)$ представим в виде интеграла Фурье [3]:

$$S_y(x, \omega) = \int_0^{\infty} y(x, t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$$

$$S_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$$
(4)

Подставляя уравнения (4) в уравнение (1), получим:

$$-\omega^2 \cdot S_y(x, \omega) + 2 \cdot \eta \cdot i \cdot \omega^2 \cdot S_y(x, \omega) - c^2 \cdot \frac{\partial^2 S_y(x, \omega)}{\partial x^2} = 0$$

После преобразований получим:

$$a^2 \cdot S_y(x, \omega) + S_y''(x, \omega) = 0$$
(5)

где

$$a = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \eta \cdot i};$$

$$S_y''(x, \omega) = \frac{\partial^2 S_y(x, \omega)}{\partial x^2}.$$

Учитывая малость коэффициента демпфирования, получим [4]:

$$a \approx \frac{\omega}{c} \cdot (1 - \eta \cdot i)$$

Согласно граничным условиям (2) и (3) получим краевое решение уравнения (5).

При вычислении значений преобразования Фурье на концах упругого стержня, если функция перемещения сечения непрерывна, и интеграл от $y'(x,t)_x$ равномерно сходится, то справедливо равенство [5]:

$$S_y'(x, \omega)_x = \int_0^{\infty} y'(x, t)_x \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt$$

Отсюда

$$S_y'(0, \omega)_x = \int_0^{\infty} y'(0, t)_x \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = 0$$

$$S_y'(L, \omega)_x = \int_0^{\infty} y'(L, t)_x \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} dt = 0$$

Подставляя граничные условия (2) и (3), получим:

$$S_y'(0, \omega)_x = \frac{1}{E \cdot F} \cdot S_f(\omega) - \frac{\mu \cdot \omega^2}{E \cdot F} \cdot S_y(0, \omega)$$
(6)

$$S_y'(L, \omega)_x = \frac{M_0 \cdot \omega^2}{E \cdot F} \cdot S_y(L, \omega)$$
(7)

АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВИБРАЦИОННОГО НАГРУЖЕНИЯ ОТСЕКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Общее решение уравнения (5) представим в виде [6]:

$$S_y(x, \omega) = A \cdot \sin(a \cdot x + B)$$
(8)

Дифференцируя уравнение (8), получим:

$$S_y'(x, \omega)_x = A \cdot a \cdot \cos(a \cdot x + B)$$
(9)

Подставляя граничное условие (7) в уравнение (9), получим:

$$S_y'(L, \omega)_x = A \cdot a \cdot \cos(a \cdot L + B) = \frac{M_0 \cdot \omega^2}{E \cdot F} \cdot S_y(L, \omega) \quad (10)$$

Отсюда:

$$A = \frac{M_0 \cdot \omega^2}{E \cdot F \cdot a \cdot \cos(a \cdot L + B)} \cdot S_y(L, \omega) \quad (11)$$

Подставляя уравнение (11) в уравнение (8) при $x=L$, получим:

$$S_y(L, \omega) = \frac{M_0 \cdot \omega^2}{E \cdot F \cdot a \cdot \cos(a \cdot L + B)} \cdot S_y(L, \omega) \cdot \sin(a \cdot L + B)$$

После преобразований получим:

$$\Phi = \frac{E \cdot F \cdot a}{M_0 \cdot \omega^2} = \text{tg}(a \cdot L + B) \quad (12)$$

Отсюда:

$$B = \text{arctg}\left(\frac{E \cdot F \cdot a}{M_0 \cdot \omega^2}\right) - a \cdot L = \text{arctg}(\Phi) - a \cdot L \quad (13)$$

Подставляя граничное условие (6) в уравнение (9), получим:

$$S_y'(0, \omega)_x = A \cdot a \cdot \cos(B) = \frac{1}{E \cdot F} \cdot S_f(\omega) - \frac{\mu \cdot \omega^2}{E \cdot F} \cdot S_y(0, \omega)$$

Отсюда:

$$A = \frac{1}{E \cdot F \cdot a \cdot \cos(B)} \cdot S_f(\omega) - \frac{\mu \cdot \omega^2}{E \cdot F \cdot a \cdot \cos(B)} \cdot S_y(0, \omega) \quad (14)$$

Подставляя уравнения (13) и (14) в уравнение (8), получим:

$$S_y(x, \omega) = \frac{1}{L} \cdot \left(S_f(\omega) - \mu \cdot \omega^2 \cdot S_y(0, \omega) \right) \cdot \sin(a \cdot x + B) \quad (15)$$

где $L = E \cdot F \cdot a \cdot \cos(B)$

Уравнение (15) при $x=0$ примет вид:

$$S_y(0, \omega) = \frac{1}{L} \cdot \left(S_f(\omega) - \mu \cdot \omega^2 \cdot S_y(0, \omega) \right) \cdot \sin(B) \quad (16)$$

После преобразований получим:

$$S_y(0, \omega) \cdot \left(1 + \frac{\sin(B)}{L} \cdot \mu \cdot \omega^2 \right) = \sin(B) \cdot \frac{S_f(\omega)}{L} \quad (17)$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} S_y(0, \omega) &= \sin(B) \cdot \frac{S_f(\omega)}{L} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\sin(B)}{L} \cdot \mu \cdot \omega^2 \right)} = \\ &= \frac{\sin(B)}{L + \sin(B) \cdot \mu \cdot \omega^2} \cdot S_f(\omega) \end{aligned}$$

Общее решение уравнения (8) примет вид:

$$\begin{aligned} S_y(x, \omega) &= \sin(a \cdot x + B) \cdot \frac{S_f(\omega)}{L} \cdot \left(1 - \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot \sin(B)}{L + \sin(B) \cdot \mu \cdot \omega^2} \right) = \\ &= H(x, \omega) \cdot S_f(\omega) \cdot \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{L}{\mu \cdot \omega^2 \cdot \sin(B)} \right)} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$H(x, \omega) = \frac{\sin(\operatorname{arctg}(\Phi) + a \cdot (x-L))}{E \cdot F \cdot a \cdot \cos(\operatorname{arctg}(\Phi) - a \cdot L)},$$

$H(x, \omega)$ – частотная характеристика.

Явно, что значение $S_y(x, \omega)$ изменяется от нуля до значения $H(x, \omega) \cdot S_f(\omega)$ при изменении значения $\mu \cdot \omega^2$ от бесконечности до нуля.

Таким образом, значение $S_y(x, \omega) = H(x, \omega) \cdot S_f(\omega)$ дает гарантированную оценку перемещения сечения отсека ЛА.

Спектральную плотность перемещения сечения отсека ЛА представим в виде [1]:

$$\begin{aligned} G_y(x, \omega) &= H(x, \omega) \cdot H^*(x, \omega) \cdot G_f(\omega) = \\ &= \frac{1}{a \cdot a^*} \cdot \frac{1}{(E \cdot F)^2} \cdot D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) \cdot G_f(\omega) \end{aligned} \quad (19)$$

где комплексно-сопряженные величины отмечены звездочкой; $D(x, \omega) = \frac{\sin(\operatorname{arctg}(\Phi) + a \cdot (x-L))}{\cos(\operatorname{arctg}(\Phi) - a \cdot L)}$, $G_f(\omega)$ – спектральная плотность воздействия при пульсации тяги.

Отсюда:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \eta \cdot i} = \omega \cdot \frac{L \cdot m(x)}{L \cdot \sqrt{m(x) \cdot E \cdot F}} \cdot (1 - \eta \cdot i) = \\ &= \omega \cdot \frac{m}{L \cdot \sqrt{m(x) \cdot E \cdot F}} \cdot (1 - \eta \cdot i) \end{aligned} \quad (20)$$

где $m = L \cdot m(x)$.

Подставляя уравнение (20) в уравнение (12), получим:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{E \cdot F \cdot a}{M_0 \cdot \omega^2} = \frac{E \cdot F \cdot \omega}{M_0 \cdot \omega^2} \cdot \frac{m}{L \cdot \sqrt{m(x) \cdot E \cdot F}} \cdot (1 - \eta \cdot i) = \\ &= A(\omega) \cdot (1 - \eta \cdot i) \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} A(\omega) &= (c \cdot m_1) / (\omega \cdot L); \\ c &= \sqrt{E \cdot F / m(x)}; \\ m_1 &= m / M_0. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\operatorname{arctg}(\Phi) = \operatorname{arctg}(A(\omega) \cdot (1 - \eta \cdot i)) \quad (22)$$

Раскрывая комплексно-сопряженные величины, получим [5]:

$$\begin{aligned} D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) &= \\ &= \left[\frac{\sin(\operatorname{arctg}(\Phi) + a \cdot (x-L))}{\cos(\operatorname{arctg}(\Phi) - a \cdot L)} \right] \cdot \left[\frac{\sin(\operatorname{arctg}(\Phi) + a \cdot (x-L))}{\cos(\operatorname{arctg}(\Phi) - a \cdot L)} \right]^* = \\ &= \frac{[\sin(U_1)]^2 + [\operatorname{sh}(V_1)]^2}{[\cos(U_2)]^2 + [\operatorname{sh}(V_2)]^2} \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}(\Phi) &= \operatorname{arctg}(A(\omega) \cdot (1 - \eta \cdot i)) = \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{sh}2(A(\omega) \cdot \eta)}{\sin2(A(\omega))} \right] = C(\omega); \\ U_1 &= C(\omega) + \frac{\omega \cdot (x-L)}{c}; U_2 = C(\omega) - \frac{\omega \cdot L}{c}; V_1 = \frac{\omega \cdot (x-L) \cdot \eta}{c}; V_2 = -\frac{\omega \cdot L \cdot \eta}{c}; \\ a \cdot a^* &= \omega^2 \cdot \frac{m}{L \cdot E \cdot F} \cdot (1 + \eta^2) \approx \omega^2 \cdot \frac{m}{L \cdot E \cdot F} \cdot \frac{1}{a \cdot a^*} \cdot \frac{1}{(E \cdot F)^2} \approx \frac{1}{\omega^2 \cdot m} \cdot \frac{1}{(E \cdot F)^2} = \frac{L}{\omega^2 \cdot m \cdot E \cdot F}. \end{aligned}$$

После преобразований получим:

$$G_y(x, \omega) = \frac{L}{\omega^2 \cdot m \cdot E \cdot F} \cdot D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) \cdot G_f(\omega)$$

Спектральную плотность вибрационной перегрузки отсека ЛА представим в виде [7]:

$$G_{n_x}(x, \omega) = \frac{G_y(x, \omega) \cdot (i \cdot \omega)^4}{g^2} = \omega^2 \cdot D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) \cdot G_f(\omega) \cdot \gamma_1 \quad (23)$$

где $\gamma_1 = \frac{1}{g^2 \cdot m(x) \cdot E \cdot F}$

Спектральную плотность перемещения отсека ЛА представим в виде:

$$G_y(x, \omega) = D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) \cdot G_f(\omega) \cdot \gamma_2 \quad (24)$$

где $\gamma_2 = \frac{1}{\omega^2 \cdot m(x) \cdot E \cdot F}$

Представим сводную таблицу.

Таблица 1

Основные уравнения вибрационной перегрузки отсека ЛА

Конструктивные решения	Расчетные уравнения
Общее выражение	$G_{n_x}(x, \omega) = \omega^2 \cdot D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) \cdot G_f(\omega) \cdot \gamma$ $D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) = \frac{[\sin(U_1)]^2 + [\text{sh}(V_1)]^2}{[\cos(U_2)]^2 + [\text{sh}(V_2)]^2}$ $U_1 = C(\omega) + \frac{\omega \cdot (x - L)}{c}$ $U_2 = C(\omega) - \frac{\omega \cdot L}{c}$ $V_1 = \frac{\omega \cdot (x - L) \cdot \eta}{c}$ $V_2 = -\frac{\omega \cdot L \cdot \eta}{c}$ $\gamma = \frac{1}{g^2 \cdot m(x) \cdot E \cdot F}$ $c = \sqrt{\frac{E \cdot F}{m(x)}}$
Жесткая заделка упругого стержня $m_1 \rightarrow 0$ $C(\omega) = 0$	$D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) = \frac{[\sin(U_1)]^2 + [\text{sh}(V_1)]^2}{[\cos(U_2)]^2 + [\text{sh}(V_2)]^2}$
Свободный конец упругого стержня $m_1 \rightarrow \infty$ $C(\omega) = \pi/2$	$D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) = \frac{[\cos(U_1)]^2 + [\text{sh}(V_1)]^2}{[\sin(U_2)]^2 + [\text{sh}(V_2)]^2}$

Зная спектральную плотность вибрационной перегрузки отсека ЛА, можно оценить среднее квадратическое отклонение вибрационной перегрузки отсека ЛА:

$$\sigma_{n_x} = \sqrt{\int_0^\infty G_{n_x}(x, \omega) d\omega} \quad (25)$$

Зная спектральную плотность перемещения отсека ЛА, можно оценить среднее квадратическое отклонение перемещения отсека ЛА:

$$\sigma_y = \sqrt{\int_0^\infty G_y(x, \omega) d\omega} \quad (26)$$

Верхний предел интегрирования формул (25) и (26) определяет α -частотный диапазон.

Учитывая малость коэффициента демпфирования, проведём исследование спектральной плотности вибрационной перегрузки отсека ЛА при малых значениях частоты круговых колебаний.

Получим спектральную плотность вибрационной перегрузки отсека ЛА для свободного конца:

$$G_{n_x}(x, \omega) = \omega^2 \cdot D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) \cdot G_f(\omega) \cdot \gamma$$

$$D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) = \frac{[\cos(U_1)]^2}{[\sin(U_2)]^2}$$

Отсюда при $\omega \rightarrow 0$:

$$G_{n_x}(x, \omega) = \omega^2 \cdot D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) \cdot G_f(\omega) \cdot \gamma = \frac{c^2}{L^2} \cdot G_f(\omega) \cdot \gamma$$

Отсюда при $\omega=0$:

$$G_{n_x}(x, 0) = \omega^2 \cdot D(x, 0) \cdot D^*(x, 0) \cdot G_f(0) \cdot \gamma = \frac{G_f(0)}{m^2 \cdot g^2} \quad (27)$$

Получим спектральную плотность вибрационной перегрузки отсека ЛА для жесткой заделки:

$$G_{n_x}(x, \omega) = \omega^2 \cdot D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) \cdot G_f(\omega) \cdot \gamma$$

$$D(x, \omega) \cdot D^*(x, \omega) = \frac{[\sin(U_1)]^2}{[\cos(U_2)]^2}$$

Отсюда при $\omega=0$:

$$G_{n_x}(x, 0) = \omega^2 \cdot D(x, 0) \cdot D^*(x, 0) \cdot G_f(0) \cdot \gamma = 0 \quad (28)$$

Уравнения (27) и (28) задают спектральную плотность вибрационной перегрузки отсека ЛА статического продольного плана, что описывает динамику корпуса, как абсолютно твердого тела.

Для иллюстрации представленных подходов рассмотрим расчетные примеры.

РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ОТСЕКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

При проведении расчетов примем следующие исходные данные для цилиндрического отсека ЛА: радиус $R=1,5\text{м}$; длина $L=8\text{м}$; приведенная толщина оболочки $h=5 \cdot 10^{-3}\text{м}$; удельная масса оболочки $\gamma=2,7 \cdot 10^3\text{кг/м}^3$; модуль упругости материала $E=71 \cdot 10^9\text{Па}$; логарифмический декремент затухания $\delta_l=0,12$; коэффициент демпфирования $\eta=\delta_l/2\pi$; спектральная плотность воздействия при пульсации тяги $G_f(\omega)=G_0=8 \cdot 10^3\text{Н}^2/\text{Гц}$, диапазон частот круговых колебаний $\omega=0 \dots 5 \cdot 10^3\text{Гц}$.

1. Погонная масса оболочки:

$$m=2\pi \cdot R \cdot h \cdot \gamma=2 \cdot 3,14 \cdot 1,5 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2,7 \cdot 10^3=127\text{кг/м}$$

2. Площадь сечения оболочки:

$$F=2\pi \cdot R \cdot h=2 \cdot 3,14 \cdot 1,5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}=0,047\text{м}^2$$

РАСЧЕТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВИБРАЦИОННОЙ ПЕРЕГРУЗКИ ОТСЕКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Проведем параметрический анализ вибрационной перегрузки отсека ЛА для различных сечений корпуса и различных значений m_1 по уравнению (23). Оценим среднее квадратическое отклонение вибрационной перегрузки отсека ЛА для различных сечений корпуса и различных значений m_1 по уравнению (25).

Характер зависимости спектральной плотности вибрационной перегрузки отсека ЛА от частоты круговых колебаний представлен на рис. 3.

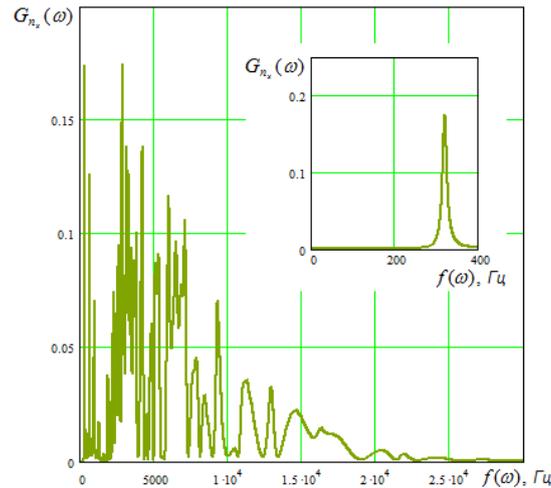


Рис. 3. Параметрический анализ вибрационной перегрузки отсека ЛА для $x=7,2\text{м}$, $m_1=10^3$.

Собственную частоту первого тона колебаний можно оценить по графику в правом верхнем углу на рис. 3. Как видно из графика, $f(\omega)=320[\text{Гц}]=2000[1/\text{с}]$, что совпадает с собственной частотой первого тона колебаний для свободного конца упругого стержня [8]:

$$f(\omega) = \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\gamma}} = \frac{3,14}{8} \cdot \sqrt{\frac{71 \cdot 10^9}{2,7 \cdot 10^3}} = 2000[1/\text{с}]$$

Для $x=7,2\text{м}$, $m_1=10^3$ при $\alpha=31 \cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{nx}=31,786$, при $\alpha=100 \cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{nx}=55,494$.

Для $x=0,1\text{м}$, $m_1=10^3$ при $\alpha=31 \cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{nx}=51,164$, при $\alpha=100 \cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{nx}=244,854$.

Характер зависимости спектральной плотности вибрационной перегрузки отсека ЛА от частоты круговых колебаний представлен на рис. 4.

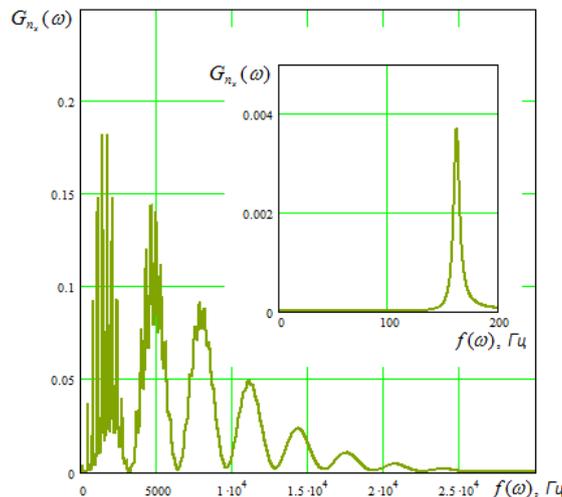


Рис. 4. Параметрический анализ вибрационной перегрузки отсека ЛА для $x=7,2\text{м}$, $m_1=5 \cdot 10^{-3}$.

Собственную частоту первого тона колебаний можно оценить по графику в правом верхнем углу на рис. 4. Как видно из графика, $f(\omega)=160\text{Гц}=1000[1/\text{с}]$, что совпадает с собственной частотой первого тона колебаний для жесткой заделки упругого стержня [8]:

$$f(\omega) = \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\gamma}} = \frac{3,14}{2 \cdot 8} \cdot \sqrt{\frac{71 \cdot 10^9}{2,7 \cdot 10^3}} = 1000[1/\text{с}]$$

Для $x=7,2\text{м}$, $m_1=5\cdot 10^{-3}$ при $\alpha=31\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{nx}=34,214$, при $\alpha=100\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{nx}=57,197$.

Для $x=0,1\text{м}$, $m_1=5\cdot 10^{-3}$ при $\alpha=31\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{nx}=49,587$, при $\alpha=100\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{nx}=244,945$.

Вывод, что среднее квадратическое отклонение вибрационной перегрузки отсека ЛА вблизи сечения А-А существенно больше, нежели вблизи сечения В-В.

РАСЧЕТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОТСЕКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Проведем параметрический анализ перемещения отсека ЛА для различных сечений корпуса и различных значений m_1 по уравнению (24). Оценим среднее квадратическое отклонение перемещения отсека ЛА для различных сечений корпуса и различных значений m_1 по уравнению (26).

Характер зависимости спектральной плотности перемещения отсека ЛА от частоты круговых колебаний представлен на рис. 5.

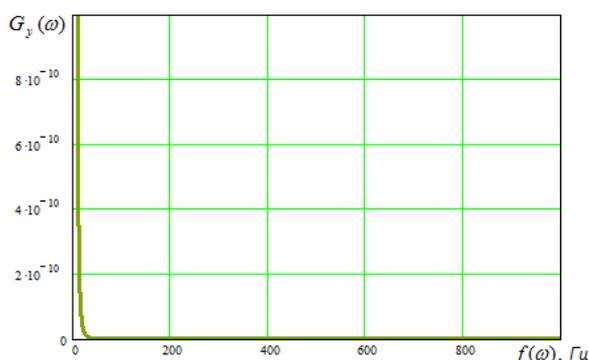


Рис. 5. Параметрический анализ перемещения отсека ЛА для $x=7,2\text{м}$, $m_1=10^3$.

Для $x=7,2\text{м}$, $m_1=10^3$ при $\alpha=31\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_y=1,364\cdot 10^{-4}\text{м}$.

Характер зависимости спектральной плотности перемещения отсека ЛА от частоты круговых колебаний представлен на рис. 6.

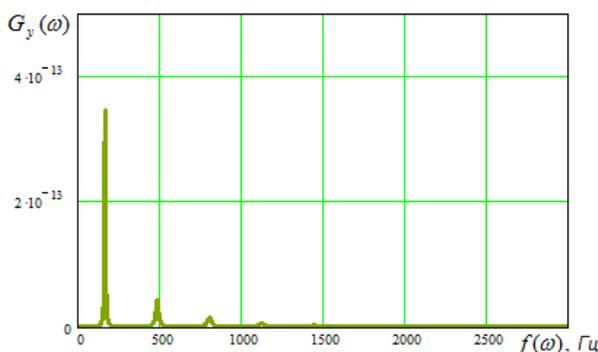


Рис. 6. Параметрический анализ перемещения отсека ЛА для $x=7,2\text{м}$, $m_1=5\cdot 10^{-3}$.

Для $x=7,2\text{м}$, $m_1=5\cdot 10^{-3}$ при $\alpha=31\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_y=7,022\cdot 10^{-6}\text{м}$.

Вывод, что среднее квадратическое отклонение перемещения отсека ЛА со свободным концом существенно больше, нежели с жесткой заделкой.

Рассмотрим задачу прогнозирования продольных вибраций оборудования ЛА с учетом амортизатора по случайным колебаниям упругого стержня.

АНАЛИЗ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВИБРАЦИОННОГО НАГРУЖЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ АМОРТИЗАТОРА

Исходное смещение основания представим в виде:

$$s(t) = A \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t}$$

где A – амплитуда колебаний основания.

Выходное смещение оборудования ЛА представим в виде:

$$y(t) = a \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t - i \cdot \varphi}$$

где a – амплитуда колебаний оборудования ЛА, φ – фазовый сдвиг колебаний оборудования ЛА относительно основания.

Эффективность амортизатора оценивается коэффициентом виброизоляции:

$$\eta = \frac{a}{A}$$

Коэффициент виброизоляции представим в виде:

$$|H(\omega)| = \frac{a}{A}$$

Уравнение движения системы представим в виде [9]:

$$F_M(t) + F_h(t) + F_k(t) = 0$$

где $F_M(t) = -M \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$ – сила инерции; $F_h(t) = -h \cdot \left[\frac{dy}{dt} - \frac{ds}{dt} \right]$ – демпфирующая сила; $F_k(t) = -k \cdot [y(t) - s(t)]$ – упругая сила пружины; M – масса оборудования ЛА; h – коэффициент трения демпфера; k – коэффициент упругости материала.

С учетом введенных обозначений уравнение движения системы примет вид:

$$M \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + h \cdot \frac{dy}{dt} + k \cdot y(t) = h \cdot \frac{ds}{dt} + k \cdot s(t)$$

Применяя прямое преобразование Фурье к обеим частям уравнения, получим:

$$S_y(\omega) \cdot [M \cdot (i \cdot \omega)^2 + h \cdot (i \cdot \omega) + k] = S_s(\omega) \cdot [h \cdot (i \cdot \omega) + k]$$

Частотная характеристика амортизатора примет вид:

$$H(\omega) = \frac{h \cdot (i \cdot \omega) + k}{-M \cdot \omega^2 + k + h \cdot (i \cdot \omega)}$$

Квадрат частотной характеристики амортизатора примет вид:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(h \cdot \omega)^2 + k^2}{(-M \cdot \omega^2 + k)^2 + (h \cdot \omega)^2}$$

Коэффициент демпфирования амортизатора представим в виде:

$$\xi = \frac{h}{2 \cdot M \cdot \omega_0}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$; ω_0 – резонансная частота нагруженного амортизатора.

С учетом введенных обозначений квадрат частотной характеристики амортизатора примет вид:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1 + (2 \cdot \xi \cdot \gamma)^2}{(1 - \gamma^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \gamma)^2}$$

где $\gamma = \frac{\omega}{\omega_0}$.

С учетом введенных обозначений коэффициент виброизоляции примет вид:

$$\eta = \sqrt{\frac{1 + (2 \cdot \xi \cdot \gamma)^2}{(1 - \gamma^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \gamma)^2}}$$

Характер зависимости коэффициента виброизоляции от отношения частот для различных коэффициентов демпфирования амортизатора представлен на рис. 7.

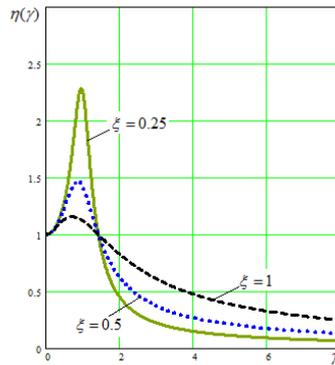


Рис. 7. Параметрический анализ коэффициента виброизоляции.

Как видно из графика, при $\gamma < 1,5$ амортизатор не уменьшает, а увеличивает амплитуду колебаний, при $\gamma > 1,5$ эффективность амортизатора увеличивается, при $\gamma > 5$ эффективность амортизатора уменьшается.

Спектральную плотность вибрационной перегрузки оборудования ЛА с учетом амортизатора представим в виде [1,3]:

$$G1_{n_x}(x, \omega) = G_{n_x}(x, \omega) \cdot |H(\omega)|^2 \quad (29)$$

Спектральную плотность перемещения оборудования ЛА с учетом амортизатора представим в виде [1,3]:

$$G1_y(x, \omega) = G_y(x, \omega) \cdot |H(\omega)|^2 \quad (30)$$

Параметры амортизатора из рекомендаций для ракетной техники [10]: $\xi=1$; $\gamma=3$.

Для иллюстрации представленных подходов рассмотрим расчетные примеры.

РАСЧЕТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВИБРАЦИОННОЙ ПЕРЕГРУЗКИ ОБОРУДОВАНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ АМОРТИЗАТОРА

Проведем параметрический анализ вибрационной перегрузки оборудования ЛА с учетом амортизатора для различных сечений корпуса и различных значений m_1 по уравнению (29). Оценим среднее квадратическое отклонение вибрационной перегрузки оборудования ЛА с учетом амортизатора для различных сечений корпуса и различных значений m_1 по уравнению (25).

Характер зависимости спектральной плотности вибрационной перегрузки оборудования ЛА с учетом амортизатора от частоты круговых колебаний представлен на рис. 8.

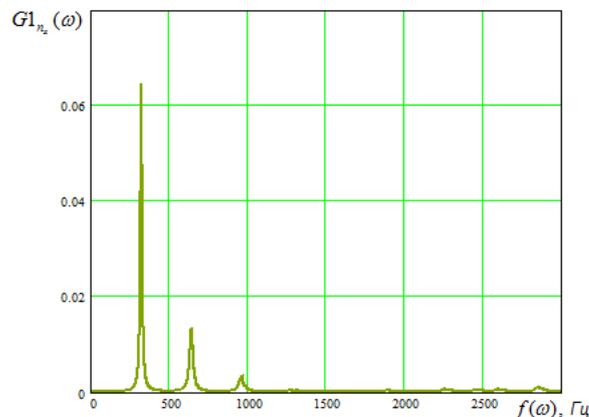


Рис. 8. Параметрический анализ вибрационной перегрузки оборудования ЛА с учетом амортизатора для $x=7,2$ м, $m_1=10^3$.

Для $x=7,2\text{м}$, $m_1=10^3$ при $\alpha=31\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1_{nx}}=4,127$, при $\alpha=100\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1_{nx}}=4,627$.

Для $x=0,1\text{м}$, $m_1=10^3$ при $\alpha=31\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1_{nx}}=5,465$, при $\alpha=100\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1_{nx}}=7,405$.

Характер зависимости спектральной плотности вибрационной перегрузки оборудования ЛА с учетом амортизатора от частоты круговых колебаний представлен на рис. 9.

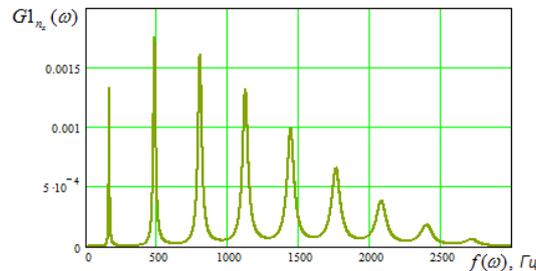


Рис. 9. Параметрический анализ вибрационной перегрузки оборудования ЛА с учетом амортизатора для $x=7,2\text{м}$, $m_1=5\cdot 10^{-3}$.

Для $x=7,2\text{м}$, $m_1=5\cdot 10^{-3}$ при $\alpha=31\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1_{nx}}=1,844$, при $\alpha=100\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1_{nx}}=1,952$.

Для $x=0,1\text{м}$, $m_1=5\cdot 10^{-3}$ при $\alpha=31\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1_{nx}}=3,235$, при $\alpha=100\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1_{nx}}=4,007$.

Вывод, что среднее квадратическое отклонение вибрационной перегрузки оборудования ЛА с учетом амортизатора существенно меньше, нежели среднее квадратическое отклонение вибрационной перегрузки отсека ЛА в соответствующем сечении корпуса.

РАСЧЕТ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ОБОРУДОВАНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С УЧЕТОМ АМОРТИЗАТОРА

Проведем параметрический анализ перемещения оборудования ЛА с учетом амортизатора для различных сечений корпуса и различных значений m_1 по уравнению (30). Оценим среднее квадратическое отклонение перемещения оборудования ЛА с учетом амортизатора для различных сечений корпуса и различных значений m_1 по уравнению (26).

Характер зависимости спектральной плотности перемещения оборудования ЛА с учетом амортизатора от частоты круговых колебаний представлен на рис. 10.

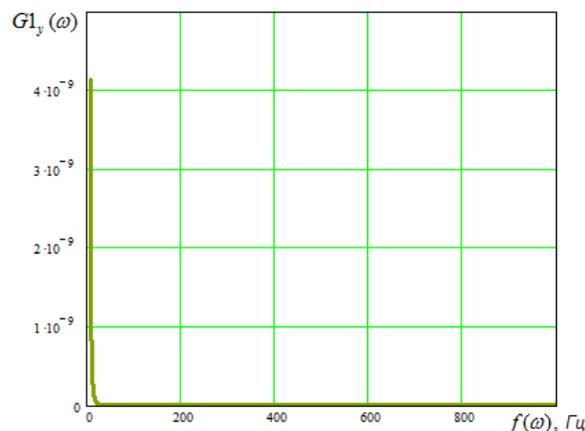


Рис. 10. Параметрический анализ перемещения оборудования ЛА с учетом амортизатора для $x=7,2\text{м}$, $m_1=10^3$.

Для $x=7,2\text{м}$, $m_1=10^3$ при $\alpha=31\cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1_y}=1,381\cdot 10^{-4}\text{м}$.

Характер зависимости спектральной плотности перемещения оборудования ЛА с учетом амортизатора от частоты круговых колебаний представлен на рис. 11.

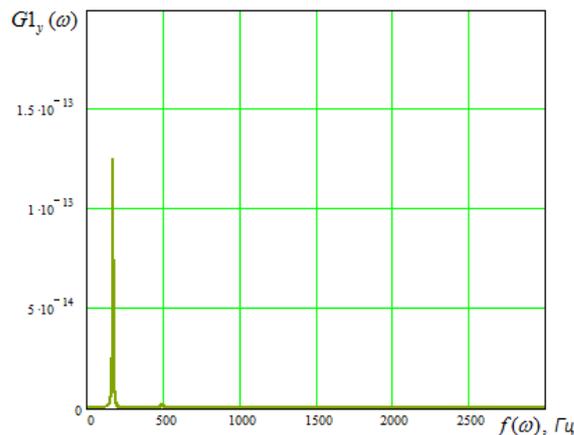


Рис. 11. Параметрический анализ перемещения оборудования ЛА с учетом амортизатора для $x=7,2\text{м}$, $m_1=5 \cdot 10^{-3}$.

Для $x=7,2\text{м}$, $m_1=5 \cdot 10^{-3}$ при $\alpha=31 \cdot 10^3\text{Гц}$ получим $\sigma_{1y}=3,745 \cdot 10^{-6}\text{м}$.

Вывод, что среднее квадратическое отклонение перемещения оборудования ЛА с учетом амортизатора соизмеримо со средним квадратическим отклонением перемещения отсека ЛА в соответствующем сечении корпуса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Представлены модели гарантированной оценки вибрационного нагружения отсека ЛА при пульсации тяги двигателей.
2. Разработан метод спектральной оценки вибрационной перегрузки и перемещения отсека ЛА.
3. Разработан метод спектральной оценки вибрационной перегрузки и перемещения оборудования ЛА с учетом амортизатора.
4. Разработанные методы применимы для различных конструктивных решений ЛА в широком спектре исходных данных при пульсации тяги двигателей.
5. Показано, что применение амортизатора позволяет существенно уменьшить вибрационную перегрузку оборудования ЛА в сравнении с вибрационной перегрузкой отсека ЛА в соответствующем сечении корпуса.
6. Работоспособность разработанных методов проиллюстрирована на расчетных примерах вибрационного нагружения отсека ЛА и оборудования ЛА с учетом амортизатора в различных сечениях корпуса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989. 540 с. [J. Bendat, A. Piersol, *Random data analysis and measurement procedures*, (in Russian). Moscow: Mir, 1989. 540 p.]
2. Основы строительной механики ракет / Л. И. Балабух [и др.] М.: Высшая школа, 1969. 496 с. [L. I. Balabuh, et al., *Basics of rocket structural mechanics*, (in Russian). Moscow: Vishaya shkola, 1969. 496 p.]
3. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968. 449 с. [A. A. Sveshnikov, *Applied methods of the theory of random functions*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1968. 449 p.]
4. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: АСТ: Астрель, 2006. 991 с. [M. Ya. Vigodskiy, *Reference book of higher mathematics*, (in Russian). Moscow: AST: Astrel, 2006. 991 p.]
5. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с. [I. N. Bronshtein, K. A. Semendyaev, *Reference book of mathematics for engineers and technical university students*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1986. 544 p.]
6. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1965. 424 с. [L. E. Elsgolts, *Differential equations and the calculus of variations*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1965. 424 p.]
7. Харкевич А. А. Спектры и анализ. М.: Физико-математическая литература, 1962. 236 с. [A. A. Harkevich, *Spectra and analysis*, (in Russian). Moscow: Fiziko-matematicheskaya literatura, 1962. 236 p.]
8. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с. [I. M. Babakov, *Theory of oscillation*, (in Russian). Moscow: Nauka, 1968. 560 p.]
9. Золотов А. А., Нуруллаев Э. Д. Прогнозирование продольных вибраций конструкции и оборудования летательных аппаратов при срабатывании пиротехнических средств // Вестник УГАТУ. 2020. Т. 24, № 4 (90). С. 25-32. [A. A. Zolotov, E. D.

Nurullaev, *Forecasting longitudinal vibrations of spacecraft structure and equipment during the operation of pyrotechnics*, (in Russian) // Vestnik UGATU. 2020. Vol. 24, no. 4 (90). P. 25–32.]

10. **Надежность** и эффективность в технике. Справочник. В 10 т. / под ред. В. А. Кузнецова. М.: Машиностроение, 1990. Т. 10. 336 с. [V. A. Kuznetsov (ed.), *Reliability and efficiency in technology. Reference book in ten volumes*, (in Russian). Moscow: Mashinostroenie, 1990. Vol. 10. 336 p.]

ОБ АВТОРАХ

ЗОЛОТОВ Александр Алексеевич, проф. Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д-р техн. наук, проф. Направление научных исследований: надежность и безопасность сложных технических систем.

НУРУЛЛАЕВ Эльмар Джаннаталиевич, ст. преп. Московского авиационного института (национального исследовательского университета). Направление научных исследований: надежность и безопасность сложных технических систем.

METADATA

Title: Forecasting longitudinal vibrations of spacecraft structure and equipment during the pulsation of engine thrust.

Authors: A. A. Zolotov¹, E. D. Nurullaev²

Affiliation:

Moscow Aviation Institute (National Research University), Russia.

Email: ¹zolotovaa@mai.ru, ²ned@mai.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), vol. 27, no. 2 (100), pp. 68-81, 2023. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The article analyzes the effect during a pulsation of engine thrust, presents models and methods for estimating the spectral density of vibration overload and section displacement, which make it possible to predict the vibration load of the spacecraft compartment and spacecraft equipment, taking into account the shock absorber, for various constructive solutions in a wide range of initial data. The efficiency of the presented approaches is illustrated with specific examples in various sections of the spacecraft body. The obtained results can be useful to engineering and technical specialists of organizations, as well as to students of the corresponding educational field.

Key words: thrust pulsation; vibration overload; spectral density; standard deviation.

About authors:

ЗОЛОТОВ, Aleksandr Alekseevich, Prof. of the Moscow Aviation Institute (National Research University). Dr. of Tech. Sci., Prof. Research interests: reliability and safety of complex technical systems.

НУРУЛЛАЕВ, Elmar Djannatalievich, Assist. Prof. of the Moscow Aviation Institute (National Research University). Research interests: reliability and safety of complex technical systems.