

УДК 519.1(075.8)

ОЦЕНКА МОЩНОСТИ *OE*-ПОКРЫТИЯ ПЛОСКОГО ГРАФА

Т. А. МАКАРОВСКИХ

Makarovskikh.T.A@susu.ru

ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет» (ЮУрГУ)

Поступила в редакцию 12.05.2017

Аннотация. В статье рассматриваются оценки количества цепей в эйлеровом *OE*-покрытии плоского графа цепями. Под эйлеровым *OE*-покрытием понимается такое минимальное по мощности упорядоченное множество реберно-непересекающихся цепей, для которых выполнено условие отсутствия пересечения внутренности цикла из ребер пройденной части маршрута с ребрами непройденной части.

В соответствии с теоремой Листинга–Люка минимальная мощность покрытия графа реберно-непересекающимися цепями равна k , где $2k$ – число вершин нечетной степени. Ранее автором показано, что мощность эйлерова *OE*-покрытия плоского графа без мостов равна k , если хотя бы одна вершина нечетной степени инцидентна внешней грани и $k+1$, в противном случае. В данной работе показано, что точная верхняя оценка мощности эйлерова *OE*-покрытия равна $2k$.

Ключевые слова: плоский граф; маршрутизация; параллельный алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

Лазерная резка является одной из основных технологий, используемых при обработке листового материала. Таким образом, задача определения траектории движения режущего инструмента является актуальной. Задача определения траектории заключается в определении точной последовательности резов. Развитие автоматизации производства привело к появлению технологического оборудования с числовым программным управлением, используемого для резки листовых материалов. Новые технологии позволяют осуществлять вырезание по произвольной траектории с достаточной для практики точностью. Преимуществом при использовании лазерной резки является минимальность таких показателей как ширина реза и термические деформации. Целью задачи определения маршрута резки является поиск такого пути режущего инструмента, при котором выполняются условия предшествования, а время, затраченное на вырезание, минимально [1].

В терминах задачи лазерной резки под условием предшествования понимается требование к тому, чтобы отрезанная от листа часть не требовала дополнительных разрезов (т.е. все элементы вложенного контура должны быть выре-

заны прежде, чем внешний контур окажется полностью вырезанным).

В [1] и [2] приводится классификация задач маршрутизации режущего инструмента и отмечается, что технологии ECP (Endpoint Cutting Problem) и ICP (Intermittent Cutting Problem) за счет возможности совмещения границ вырезаемых деталей позволяют сократить расход материала, длину резки, и длину холостых проходов [2]. Проблемы уменьшения отходов материала и максимального совмещения фрагментов контуров вырезаемых деталей решаются на этапе составления раскройного плана. В [1] отмечено, что для решения задачи ECP известен алгоритм [3], который находит траекторию движения режущего инструмента и минимизирует число точек врезки. Для решения этой задачи авторами статьи [3] использован аппарат теории графов, а предложенный в работе алгоритм строит дополнительные ребра между вершинами нечетной степени графа. Однако приведенный в [3] алгоритм позволяет решить задачу только для случая планарной достройки плоского эйлерова графа.

В [4, 5] отмечено, что применение технологий ECP и ICP в системе технологической подготовки процессов раскроя плоских деталей предполагает следующие этапы.

1. Составление раскройного плана, заключающееся в нахождении такого варианта размещения вырезаемых деталей на прямоуголь-

ном листе, при котором минимизируются отходы и максимизируется длина совмещенных элементов контуров вырезаемых деталей.

2. *Абстрагирование раскройного плана до плоского графа.* Для определения последовательности резки фрагментов раскройного плана не используется информация о форме детали, поэтому все кривые без самопересечений и соприкосновений на плоскости, представляющие форму деталей, интерпретируются в виде ребер графа, а все точки пересечений и соприкосновений представляются в виде вершин графа. Для анализа выполнения технологических ограничений необходимо введение дополнительных функций на множестве вершин, граней и ребер полученного графа.

3. *Решение задачи построения маршрутов с ограничениями, наложенными на порядок обхода ребер.* Данные ограничения непосредственно вытекают из технологических ограничений, наложенных на порядок вырезания деталей: отрезанная от листа часть не должна требовать дополнительных разрезов, должны отсутствовать пересечения резов, необходимо оптимизировать длину холостых переходов, минимизировать количество точек врезки и т.д.

4. *Составление программы управления процессом раскроя* на основе маршрута, найденного с помощью алгоритма решения абстрагированной задачи маршрутизации. Здесь выполняется обратная замена абстрактных ребер плоского графа системой команд раскройному автомату, обеспечивающей движение по кривым на плоскости, соответствующим форме вырезаемой детали.

В статье приводится алгоритм решения проблемы маршрутизации при вырезании деталей, когда раскройный план представлен плоским неэйлеровым графом, не имеющем вершин нечетной степени, инцидентных внешней грани.

КОДИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО ГРАФА

Для решения поставленной задачи раскройный план необходимо представить в виде плоского графа [6]. Моделью раскройного листа будем считать плоскость S , моделью раскройного плана – плоский граф G с внешней гранью f_0 на плоскости S . Для плоского графа G далее через $E(G)$ будем обозначать множество его ребер, представляющих плоские жордановы кривые с попарно непересекающимися внутренностями, гомеоморфные отрезкам. Через $V(G)$ обозначим множество граничных точек этих кривых.

Топологическое представление плоского графа $G = (V, E)$ на плоскости S с точностью до гомеоморфизма определяется заданием для каждого ребра $e \in E$ следующих функций [4–6]:

- $v_k(e)$, $k=1,2$ – вершины, инцидентные ребру e ;
- $f_k(e)$ – грань, находящаяся справа при движении по ребру e от вершины $v_k(e)$ к вершине $v_{3-k}(e)$, $k=1,2$;
- $l_k(e)$ – ребро, инцидентное грани $f_{3-k}(e)$ и $v_k(e)$, $k=1,2$;
- $r_k(e)$ – ребро, инцидентное грани $f_k(e)$ и $v_k(e)$, $k=1,2$.

Поскольку функции $v_k(e)$, $f_k(e)$, $l_k(e)$, $r_k(e)$, $k=1,2$, построенные на ребрах графа $G = (V, E)$, для каждого ребра определяют инцидентные вершины, инцидентные грани и смежные ребра, то справедливо следующее

Утверждение. *Функции $v_k(e)$, $f_k(e)$, $l_k(e)$, $r_k(e)$, $k=1,2$, построенные на ребрах графа $G = (V, E)$, определяют плоский граф $G = (V, E)$ с точностью до гомеоморфизма.*

Далее будем считать, что все рассматриваемые плоские графы представлены указанными функциями. Пространственная сложность такого представления будет $O(|E| \cdot \log_2 |V|)$.

ОЕ-ПОКРЫТИЕ ПЛОСКОГО ГРАФА

Как было отмечено выше, за модель раскройного листа принимается плоскость S , модель раскройного плана – плоский граф G с внешней гранью f_0 на плоскости S . Для любой части графа $J \subseteq G$ (части траектории движения режущего инструмента) обозначим через $\text{Int}(J)$ теоретико-множественное объединение его внутренних граней (объединение всех связанных компонент S , J , не содержащих внешней грани). Тогда $\text{Int}(J)$ можно интерпретировать как отрезанную от листа часть. Множества вершин, ребер и граней графа.

Начальную часть маршрута в графе G будем рассматривать как часть графа, содержащую все вершины и ребра, принадлежащие маршруту. Это позволяет формализовать требование к маршруту режущего инструмента как условие отсутствия пересечения внутренних граней любой начальной части маршрута в заданном плоском графе G с ребрами его оставшейся части [7]. Такие маршруты будем называть маршрутами с упорядоченным охватыванием [8]

(или для краткости *ОЕ-маршрутами*, от англ. «ordered enclosing»).

Определение 1 [7]. Цепь $C = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_k$ в плоском графе G имеет упорядоченное охватывание (является *ОЕ-цепью*), если для любой его начальной части $C_l = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_l$, $l \leq (|E|)$ выполнено условие $\text{Int}(C_l) \cap G = \emptyset$.

Определение 2 [8]. Упорядоченная последовательность реберно-непересекающихся *ОЕ-цепей*

$$C^0 = v^0 e_1^0 v_1^0 e_2^0 \dots e_{k_0}^0 v_{k_0}^0, \quad C^1 = v^1 e_1^1 v_1^1 e_2^1 \dots e_{k_1}^1 v_{k_1}^1, \dots,$$

$$C^{n-1} = v^{n-1} e_1^{n-1} v_1^{n-1} e_2^{n-1} \dots e_{k_{n-1}}^{n-1} v_{k_{n-1}}^{n-1},$$

покрывающая граф G и такая, что

$$(\forall m: m < n), \left(\bigcup_{l=0}^{m-1} \text{Int}(C^l) \right) \cap \left(\bigcup_{l=m}^{n-1} C^l \right) = \emptyset,$$

называется *маршрутом с упорядоченным охватыванием (ОЕ-маршрутом)*.

Построение *ОЕ-маршрута* графа G решает поставленную задачу раскроя. Наибольший интерес представляют маршруты с минимальным числом цепей, поскольку переход от одной цепи к другой соответствует холостому проходу режущего инструмента.

Определение 3. *ОЕ-маршрут, содержащий минимальную по мощности упорядоченную последовательность реберно-непересекающихся цепей в плоском графе G будем называть эйлеровым маршрутом с упорядоченным охватыванием (эйлеровым ОЕ-маршрутом), а составляющие его ОЕ-цепи – эйлеровым ОЕ-покрытием.*

ОЕ-ПОКРЫТИЕ ПЛОСКОГО ГРАФА БЕЗ МОСТОВ

Для плоского неэйлерова графа без мостов справедлива следующая теорема.

Теорема 1 [9]. Для плоского графа $G = (V, E)$ без мостов, заданного на плоскости S , существует такое множество ребер $M: (M \cap S) \setminus V = \emptyset$, что граф $\hat{G} = (V, E \cup M)$ является эйлеровым и в нем существует эйлеров цикл $C = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_n v_1$, $n = |E| + |M|$, для любой начальной части которого $C_l = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_l$, $l \leq |E| + |M|$ выполнено условие $\text{Int}(C_l) \cap G = \emptyset$.

В условии теоремы считается, что ребра из множества M не лежат в плоскости S , этой плоскости принадлежат только концы указанных ребер. В терминах задачи вырезания деталей таким ребрам соответствуют холостые переходы инструмента.

Определение 4 [5]. Рангом ребра $e \in E(G)$ будем называть значение функции $\text{rank}(e): E(G) \rightarrow \mathbf{N}$, определяемую рекурсивно:

пусть $E_1 = \{e \in E: e \subset f_0\}$ – множество ребер, ограничивающих внешнюю грань f_0 графа $G = (V, E)$, тогда $(\forall e \in E_1)(\text{rank}(e) = 1)$; пусть $E_k(G)$ – множество ребер ранга k графа

$$G_k \left(V, E \setminus \left(\bigcup_{l=1}^{k-1} E_l \right) \right),$$

тогда $(\forall e \in E_k)(\text{rank}(e) = k)$.

Ранг ребра определяет его удаленность от внешней грани и показывает, какое минимальное число граней необходимо пересечь, чтобы добраться от внешней грани f_0 до этого ребра.

Доказательство теоремы 1 конструктивно и дает результативность алгоритма *ОЕ-Cover* [9].

Алгоритм *ОЕ-Cover*

Входные данные:

$G = (V, E)$ – плоский граф;

$V_{\text{odd}} \subseteq V$ – множество вершин нечетной степени;

Выходные данные:

$\text{first} \in E, \text{last} \in E, \text{mark}_1: E \rightarrow E$;

Initiate();

Order();

SortOdd(); // Сортировка списка вершин

// нечетной степени по убыванию ранга

If ($\{\exists v \in V_{\text{odd}} \mid v \in f_0\}$)

$v^0 \leftarrow \arg \max_{v \in V_{\text{odd}}} \text{rank}(v)$;

$V_{\text{odd}} \leftarrow V_{\text{odd}} \setminus \{v^0\}$;

Else

$v^0 \leftarrow v \mid v \in f_0$;

EndIf

Do

$v \leftarrow \text{FormChain}(v^0)$;

$V_{\text{odd}} \leftarrow V_{\text{odd}} \setminus \{v\}$;

If ($V_{\text{odd}} = \emptyset$) **break**; **EndIf**

$v^0 \leftarrow \arg \max_{v \in V_{\text{odd}}} \text{rank}(v)$;

While (true);

End

Алгоритм *ОЕ-Cover* вызывает процедуры *Initiate()*, *Order()*, *SortOdd()* и функцию *FormChain(v)*.

Процедура *Initiate()* [9] выполняет следующие функции:

- определяет вершину, смежную внешней грани;
- инициализирует очередь $Q(v)$ инцидентных каждой вершине $v \in V(G)$ ребер;
- инициализирует результирующую очередь.

Процедура Order() [9] выполняет следующие функции:

- определяет для каждого ребра $e \in E(G)$ функции $\text{rank}(e)$ и для каждой вершины $v \in V(G)$ функции $\text{rank}(v)$;

- формирует очереди $Q(v)$ инцидентных каждой вершине $v \in V(G)$ ребер в порядке убывания их ранга.

Процедура SortOdd() формирует очередь V_{Odd} вершин нечетной степени в порядке убывания их рангов.

Процедура позволяет построить цепь *OE*-покрытия, начинающуюся в вершине v и заканчивающуюся в вершине нечетной степени u . Если невозможно построить цепь, заканчивающуюся в вершине нечетной степени, то в качестве u выступает последняя вершина сформированной цепи.

Функциональное назначение процедуры FormChain (v, u) состоит в формировании *OE*-цепи, начинающейся в заданной вершине w и заканчивающейся в некоторой вершине $v \in V_{\text{Odd}}$, $v \neq w$.

Процедура FormChain

In: w – начальная вершина цепи;

Out: v – конечная вершина цепи

$v \leftarrow w$; $e \leftarrow Q(v)$;

Do

$e_1 = \arg \max_{e \in Q(v)} \text{rank}(e)$;

$e_2 = \arg \max_{e \in Q(v); f_1(e) = f_2(e)} \text{rank}(e)$;

If $\text{rank}(e_1) = \text{rank}(e_2)$ // Найти ребро

// максимального ранга,

// по возможности не являющееся

// мостом

$e = e_2$;

Else

$e = e_1$;

EndIf

If $v = v_1(e)$

REPLACE(e); // Изменить индексы

// функций ребра e с k на $3-k$, $k=1,2$

EndIf

$E(G) \leftarrow E(G) \setminus \{e\}$;

// Удалить ребро e и удалить грани,

// разделенные ребром e

$\text{Trail} \leftarrow \text{Trail} \cup \{e\}$;

$v \leftarrow v_1(e)$;

While ($v \notin V_{\text{Odd}}$ and $Q(v) \neq \emptyset$);

Return v ;

EndProcedure

В результате выполнения процедуры будет построена простая цепь $C^i = v_0^i e_1^i v_1^i e_2^i \dots e_k^i v_k^i$, в которой $v_1^i, v_2^i, \dots, v_{k-1}^i \notin V_{\text{Odd}}$, $v_0, v_k \in V_{\text{Odd}}$, а для $i \neq 0$ и $i \neq n$ вершины $v_0^i, v_k^i \in V_{\text{Odd}}$, при $i=0$ вершина $v_k^i \in V_{\text{Odd}}$, а при $i=n$ вершина $v_0^i \in V_{\text{Odd}}$,

$e_i = \arg \max_{e \in E(v_i) \setminus \{e_j | j < i\}} \text{rank}(e)$, $v_{i+1} = v_1(e_i)$, $i=1, 2, \dots, k$,

кроме того, для любой начальной части $C_l = v^0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_l$, $l \leq k$ и для любой вершины $v \in V$ имеет место неравенство

$$\min_{e \in E(v) \cap E(C_l)} \text{rank}(e) > \max_{e \in E(v) \setminus E(C_l)} \text{rank}(e).$$

ОЦЕНКА МОЩНОСТИ *OE*-ПОКРЫТИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПЛОСКОГО СВЯЗНОГО ГРАФА

Рассмотрим произвольный плоский связный граф. В этом случае справедлива следующая теорема об оценке мощности эйлерова *OE*-покрытия.

Теорема. Пусть G – плоский связный граф, $V_{\text{Odd}}(G)$ – множество вершин нечетной степени графа G , тогда для мощности N эйлерова *OE*-покрытия графа G имеет место неравенство

$$k = \frac{|V_{\text{Odd}}(G)|}{2} \leq N \leq |V_{\text{Odd}}(G)| = 2k.$$

Причем как верхняя, так и нижняя оценки достижимы.

Доказательство. Из теоремы Листинга–Люка следует, что нижняя оценка не может быть меньше k . Эта граница достигается для графов без мостов, имеющих хотя бы одну вершину нечетной степени, инцидентную внешней грани (см. алгоритм *OE-Cover*). Так, в [9] предложен алгоритм построения упорядоченной последовательности цепей, удовлетворяющей условию упорядоченного охватывания и покрывающей граф без мостов не более чем $k+1$ цепями. Маршруты, которые реализуют построенное покрытие, содержат дополнительные ребра между концом текущей цепи и началом следующей.

Достижимость верхней оценки иллюстрирует пример, приведенный на рис. 1.

Действительно, любая из вершин нечетной степени $v_1^*, v_2^*, \dots, v_{2k}^*$ может быть только началом покрывающей *OE*-цепи, так как маршрут, заканчивающийся в любой из этих вершин, не может быть *OE*-маршрутом.

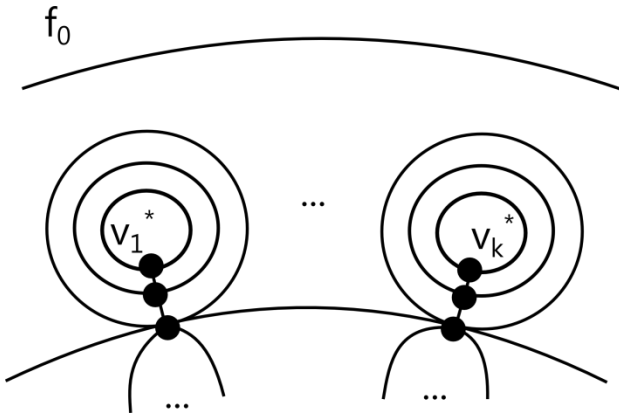


Рис. 1. Пример графа, в котором все вершины нечетной степени должны быть началом покрывающей *OE*-цепи

Таким образом, для указанного примера мощность эйлерова *OE*-покрытия (т.е. наименьшего по мощности) не меньше величины $2k$.

Для доказательства, что $2k$ является точной верхней оценкой мощности эйлерова *OE*-покрытия, опишем процесс построения *OE*-покрытия, в котором каждая из вершин нечетной степени является началом цепи.

Алгоритм параллельный. Организуем $2k$ процессов, которые стартуют в вершинах $v_1^*, v_2^*, \dots, v_{2k}^*$. Начнем построение *OE*-цепей с помощью процедуры `ParallelFormChain()` из вершин $v_1^*, v_2^*, \dots, v_{2k}^*$. Для синхронизации процессов используется глобальная переменная `cur_rank`. Процедура ждет продолжение построения цепи, если ранг текущего ребра оказывается ниже `cur_rank`.

Процедура `ParallelFormChain`

Внешняя переменная: `cur_rank` – синхронизатор по рангам ребер;

Входные данные: w – первая вершина цепи;

Выходные данные: v – последняя вершина текущей цепи

$v \leftarrow w; e \leftarrow Q(v);$

Do

$e_1 = \arg \max_{e \in Q(v)} \text{rank}(e);$

$e_2 = \arg \max_{e \in Q(v); f_1(e)=f_2(e)} \text{rank}(e);$

\parallel Найти ребро максимального ранга,

\parallel по возможности не являющееся мостом

If $\text{rank}(e_1) = \text{rank}(e_2)$

$e = e_2;$

Else

$e = e_1;$

EndIf

Wait ($\text{rank}(e) = \text{cur_rank}$);

If ($e \in E(G)$)

$E(G) \leftarrow E(G) - \{e\}; \parallel$ Удалить ребро e
 \parallel и объединить грани, разделенные ребром e

If $v = v_1(e)$

`REPLACE`(e);

\parallel Перестановка индексов функций ребра e

\parallel с k на $3-k, k = 1, 2$.

EndIf

$Trail_w \leftarrow Trail_w \cup \{e\};$

$v \leftarrow v_1(e);$

EndIf

While ($(v \notin V_{odd}) \wedge (Q(v) \neq \emptyset)$);

Return $v;$

EndProcedure

На каждом этапе будем добавлять по одному ребру в каждую из этих цепей.

Каждый из запущенных процессов вернет либо вершину нечетной степени, либо вершину, инцидентную внешней грани. После окончания данных процессов необходимо упорядочить полученные цепи по убыванию ранга стартовой вершины $v_1^*, v_2^*, \dots, v_{2k}^*$. Сказанное выше можно обобщить в алгоритме `Parallel OE-Cover`.

Алгоритм `Parallel OE-Cover`

Входные данные: $G = (V, E)$ – плоский связный граф; $V_{odd} \subseteq V$ – множество вершин нечетной степени графа G ;

Выходные данные: $Trail$ – *OE*-покрытие как упорядоченный массив ребер.

`Initiate`();

`Order` ();

`SortOdd` (); \parallel Сортировка вершин нечетной

\parallel степени по убыванию их ранга

For each ($w \in V_{odd}$) **DoParallel**

\parallel Синхронизация процессов

$cur_rank \leftarrow \max_{v \in V_{odd}} \text{rank}(Q(v));$

\parallel Построение *OE*-цепи

`ParallelFormChain` (w, v);

EndFor

$Trail \leftarrow Trail(v_1) \bullet Trail(v_2) \bullet \dots \bullet Trail(v_{2k});$

End

Таким образом, будет построено не более, чем $2k$ цепей.

Теорема доказана.

Рассмотрим граф, приведенный на рис. 2.

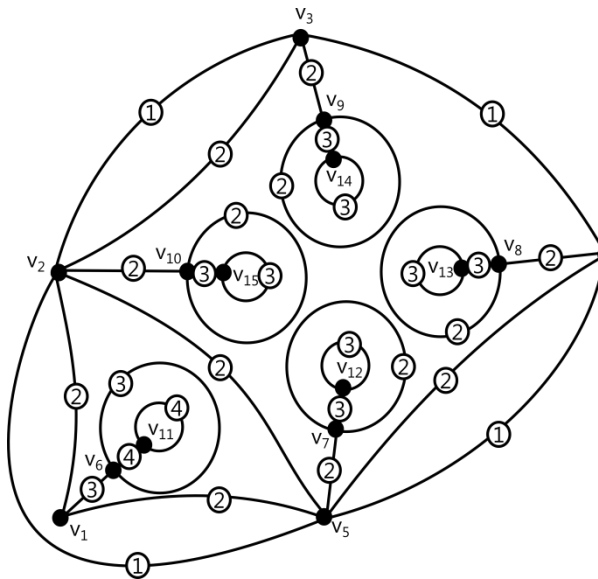


Рис. 2. Пример графа для демонстрации работы алгоритма Parallel OE-Cover. Для каждого ребра указан его ранг

Выполнение алгоритма Parallel OE-Cover можно представить в виде следующей таблицы.

Таблица
Трассировка работы алгоритма Parallel OE-Cover по шагам

cur_rank	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
4	v_{11}	–	–	–	–
4	v_{11}	–	–	–	–
3	v_6	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}
3	v_6	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}
2	v_1	v_7	v_8	v_9	v_{10}
2	–	v_7	v_8	v_9	v_{10}
2	–	v_5	v_4	v_3	v_2
2	–	v_1	v_5	v_2	v_5
2	–	v_2	–	–	–
1	–	v_5	v_4	v_3	–
1	–	–	v_3	–	–

Всего будет запущено шесть процессов по числу вершин нечетной степени. Первым начнется построение цепи из вершины v_{11} максимального ранга. Остальные процессы будут дожидаться, когда ранг текущего ребра совпадет со значением cur_rank . Так, на третьей итерации алгоритма стартует еще четыре процесса из вершин v_{12} , v_{13} , v_{14} и v_{15} . Шестой процесс, который должен стартовать из вершины v_1 , не будет начат, так как эта вершина будет достигнута первым процессом, и она станет конечной для цепи, построенной этим процессом.

Так, в результате работы процессов будет построено пять OE-цепей, которые, будучи упорядоченными в соответствии с убыванием ранга начальной вершины, дадут эйлерово OE-покрытие графа, представленного на рис. 2. Следовательно, построенное покрытие представляет собой последовательность цепей:

$$C_1 = v_{11}v_{11}v_6v_6v_1; \quad C_2 = v_{12}v_{12}v_7v_7v_5v_1v_2v_5; \\ C_3 = v_{14}v_{14}v_9v_9v_3v_2v_3; \quad C_4 = v_{15}v_{15}v_{10}v_{10}v_2v_5; \\ C_5 = v_{13}v_{13}v_8v_8v_4v_5v_4v_3.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, показано, что мощность эйлерова OE-покрытия для произвольного плоского связного графа удовлетворяет неравенству

$$k = \frac{|V_{odd}(G)|}{2} \leq N \leq |V_{odd}(G)| = 2k.$$

На мощность покрытия существенное влияние оказывает наличие мостов в графе. При их отсутствии достигается нижняя граница, в случае существования вершин нечетной степени, инцидентных внешней грани; либо, если таких вершин нет, мощность покрытия на единицу выше нижней границы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D. A review of cutting path algorithms for laser cutters // *International Journal Adv Manuf. Technol.* 2015. Vol. 87, P. 1865–1884. [R. Dewil, P. Vansteenwegen, D. Cattrysse, "A review of cutting path algorithms for laser cutters", in *International Journal Adv Manuf. Technol.*, vol. 87, pp. 1865-1884, 2015.]
2. Dewil R., Vansteenwegen P., Cattrysse D., Laguna M., Vossen T. An improvement heuristic framework for the laser cutting tool path problem // *International Journal of Production Research.* 2015. Vol. 53, Iss. 6, P. 1761–1776. [R. Dewil, P. Vansteenwegen, D. Cattrysse, M. Laguna, T. Vossen, "An improvement heuristic framework for the laser cutting tool path problem", in *International Journal of Production Research.* vol. 53, iss. 6, pp. 1761-1776, 2015.]
3. Manber U., Israni S. Pierce point minimization and optimal torch path determination in flame cutting // *J. Manuf. Syst.* 1984. Vol. 3(1). P. 81–89. [U. Manber, S. Israni, "Pierce point minimization and optimal torch path determination in flame cutting", in *J. Manuf. Syst.*, vol. 3(1), pp. 81-89, 1984.]
4. Makarovskikh T., Savitskiy E. Algorithms for constructing resource-saving cutting machines // *Procedia Engineering.* 2015. Vol. 129. P. 781–786. [T. Makarovskikh, E. Savitskiy, "Algorithms for constructing resource-saving cutting machines", in *Procedia Engineering*, vol. 129, p. 781-786, 2015.]
5. Makarovskikh T. A., Panyukov A. V., Savitskiy E. A. Mathematical Models and Routing Algorithms for CAM of Technological Support of Cutting Processes // *IFAC-PapersOnLine* 49–12. 2016. P. 821–826. [T. A. Makarovskikh, A. V. Panyukov, E. A. Savitskiy, "Mathematical Models and

Routing Algorithms for CAM of Technological Support of Cutting Processes”, in *IFAC-PapersOnLine 49-12*, p. 821-826, 2016.]

6. Макаровских Т. А., Савицкий Е. А. Абстрагирование раскройного плана до плоского графа для эффективного решения задачи вырезания деталей // Вестник УГАТУ. 2015. Т. 19. № 3 (69). С. 190–196. [Т. А. Makarovskikh, E. A. Savitskiy, “Abstracting of cutting plan to a plane graph for effective solution of cutting problem” (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 19, № 3(69), pp. 190-196, 2015.]

7. Panioukova T. A., Panyukov A. V. Algorithms for Construction of Ordered Enclosing Traces in Planar Eulerian Graphs // Proc. 6th Workshop on Computer Science and Information Technologies CSIT'2003, (Ufa, Sep. 16–18 2003). Ufa: UGATU, 2003. Vol. 1. P. 134–138. [Т. А. Panioukova and A. V. Panyukov, “Algorithms for Construction of Ordered Enclosing Traces in Planar Eulerian Graphs”, in *Proc. 6th Workshop on Computer Science and Information Technologies (CSIT' 2003)*, vol. 1, pp. 134-138, 2003.]

8. Panyukova T. Chain sequences with ordered enclosing // Journal of Computer and System Sciences International. 2007. Vol. 46. No1(10). P. 83–92. [Т. Panyukova, “Chain sequences with ordered enclosing”, in *Journal of Computer and System Sciences International*, vol. 46, no. 1 (10), p. 83-92, 2007.]

9. Панюкова Т. А. Цепи с упорядоченным охватыванием в плоских графах // Дискретный анализ и исследование операций. 2006. Т. 13, №2, С. 31–43. [Т. А. Panyukova, “Chains with ordered enclosing in plane graphs” (in Russian), in *Discrete Analysis and Operation Research*, vol. 13, no.2, pp. 31-43, 2006.]

ОБ АВТОРЕ

МАКАРОВСКИХ Татьяна Анатольевна, доц. каф. математического и компьютерного моделирования ЮУрГУ. Дипл. мат.-инж. (Южно-Уральский гос. ун-т, 2003). к-т физ.-мат. наук по теор. осн. инф. (ВЦ РАН, 2006). Иссл. в обл. теории графов и алгоритмизации.

METADATA

Title: The estimation of Eulerian OE-cover cardinality for a plane graph.

Authors: T. A. Makarovskikh

Affiliation:

South Ural State University (SUSU), Russia.

Email: Makarovskikh.T.A@susu.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 2 (76), pp. 112-118, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The article considers the estimates for the number of chains of Eulerian OE-cover for a plane graph by chains. The Eulerian OE-cover is such a minimal cardinality ordered set of edge-disjoint chains for which the condition that there is no intersection of the interior of the cycle from the edges of the traversed part of the route with the edges of the unpassed part is satisfied. In accordance with the Listing-Luke theorem, the minimal cardinality of a cover by edge-disjoint chains is equal to k , where $2k$ is the number of odd degree vertices. Earlier, the author showed that the cardinality of Eulerian OE-cover of a plane graph without bridges is equal to k if at least one vertex of odd degree is incident on the outer face and $k + 1$, otherwise. In this paper I show that the exact upper bound for the cardinality of the Eulerian OE-cover is equal to $2k$.

Key words: Plane graph; routing; parallel algorithm.

About author:

МАКАРОВСКИХ, Tatiana Anatolievna, Ass. Prof., Dept. of Mathematical and computer modeling of SUSU. Dipl. Mathematician-engineer (South Ural State Univ., 2003). Cand. of Phys. and Math. Sci. (CS RAS, 2006).