

УДК 534.113

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И УСИЛИЯ НАТЯЖЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ СТЕРЖНЯ ПО СОБСТВЕННЫМ ЧАСТОТАМ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

А.Г. ХАКИМОВ

hakimov@anrb.ru

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт механики им. Р. Р. Мавлютова

Уфимского научного центра Российской академии наук (Имех УНЦ РАН)

Поступила в редакцию 30.06.2015

Аннотация. Исследованы собственные поперечные колебания участка постоянной длины прямолинейного тонкого стержня, движущегося вдоль нейтральной линии недеформированного состояния. Перемещение происходит между двумя фиксированными соосными направляющими (зажимами), расстояние между которыми равно длине колеблющейся части стержня. Предполагается, что вдоль нейтральной линии действует постоянная продольная сила. Получено, что с увеличением скоростного параметра происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стержня. Показано, что с увеличением силового параметра происходит увеличение собственных частот изгибных колебаний стержня. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скоростной и силовой параметры движущегося стержня. Результаты работы могут находить технические применения в задачах динамики и прочности приборов; машин и механизмов в текстильной промышленности при производстве нитей и канатов; в металлургии, в частности при прокатке металлических стержней и полос, протяжке проволоки, производстве изделий из пластмасс и рулонов бумаги, и могут быть применены для определения скоростного и силового параметров движущегося стержня, полосы, проволоки, нити, полосы бумаги по двум собственным частотам изгибных колебаний.

Ключевые слова: движение стержня, продольная сила, изгибные колебания, собственные частоты, прямая и обратная задачи.

ВВЕДЕНИЕ

В [1] исследованы собственные поперечные колебания участка постоянной длины прямолинейного тонкого стержня, движущегося вдоль нейтральной линии недеформированного состояния, где перемещение происходит между двумя фиксированными соосными направляющими, расстояние между которыми равно длине колеблющейся части стержня. Вдоль нейтральной линии стержня действует постоянная продольная сила. Для произвольных величин скорости перемещения стержня и продольных сил посредством численно-аналитической процедуры с заданной точностью определены и проанализированы собственные частоты возможных мод колебаний. Установлены глобальные свой-

ства спектра в зависимости от скорости, продольной силы и номера моды [1]. Для высших мод обнаружены области неоднозначной зависимости частот и отсутствия более низких частот колебаний при увеличении скорости движения стержня, а также от величины и направления продольной силы. Установлено, что картина парциальных колебаний с позиции неподвижного наблюдателя кардинально отличается от общеизвестной для неподвижного стержня [1]. Полученные результаты интересны применительно к колебаниям различных элементов движущихся упругих сред, в том числе для систем с подвижными границами. Они могут находить технические применения в задачах динамики и прочности приборов, машин и механизмов в текстильной промышленности при производстве нитей и канатов, в металлургии, в частности при прокатке металлических стержней и полос, протяжке проволоки, производстве изделий из пластмасс и рулонов бумаги. Разработанная ме-

тодика вычисления собственных частот и форм применима для анализа поперечных колебаний участков транспортных трубопроводов с быстро протекающей жидкостью [1]. Также эти результаты могут быть полезными при изучении вопросов устойчивости движения указанных выше механических систем.

Здесь решена обратная задача определения скорости и усилия натяжения стержня по двум собственным частотам изгибных колебаний.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуются собственные частоты изгибных колебаний стержня, движущегося между двумя опорами, представляющим скользящую заделку, и находящейся под действием растягивающей силы. Требуется определить скорость и усилие натяжения стержня по собственным частотам изгибных колебаний. Решение прямой задачи дается в [1]. Уравнение изгибных колебаний стержня по модели Кирхгоффа имеет вид [1–3]

$$EJ \frac{\partial^4 w_*}{\partial x^4} + (\rho F V^2 - T) \frac{\partial^2 w_*}{\partial x^2} + 2\rho F V \frac{\partial^2 w_*}{\partial x \partial t} + \rho F \frac{\partial^2 w_*}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где E , ρ , J , F – модуль упругости, плотность, осевой момент инерции и площадь поперечного сечения стержня, T – усилие растяжения в стержне, V – скорость стержня, w_* – прогиб стержня, x – координата, направленная по оси стержня, t – время. Перейдя к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad w = \frac{w_*}{L}, \quad v^2 = \frac{EJ}{\rho FL^4}, \quad R = \frac{TL^2}{EJ}, \quad \alpha = \frac{V}{vL},$$

$$p = \alpha^2 - R, \quad q = 2\alpha\Omega, \quad r = -\Omega^2, \quad \Omega^2 = \frac{\rho FL^4 \omega^2}{EJ},$$

сделаем подстановку $w = W(\xi) \exp(i\Omega t)$ и получим уравнение, определяющее форму изгибных колебаний стержня

$$\frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + p \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + iq \frac{\partial W}{\partial \xi} + rW = 0, \quad (2)$$

где ω – круговая частота, L – длина стержня между опорами.

Граничные условия для защемленного по краям стержня

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0 \quad (\xi = 0, 1). \quad (3)$$

Общее решение уравнения (2) будем определять в виде $W(\xi) = \exp(k\xi)$, тогда получим характеристическое уравнение для нахождения

неизвестных значений комплексного волнового параметра $k = k_j (\alpha, R, \Omega), j = 1, 2, 3, 4$:

$$k^4 + pk^2 + iqk + r = 0. \quad (4)$$

Согласно формулам Феррари, запишем резольвенту уравнения (4)

$$z^3 - \frac{p}{2}z^2 - rz + \frac{rp}{2} + \frac{q^2}{8} = 0,$$

которая подстановкой $z = y + \frac{p}{6}$ приводится к виду

$$y^3 + p_1y + q_1 = 0, \quad p_1 = -\left(r + \frac{p^2}{12}\right),$$

$$q_1 = -\frac{p^3}{108} + \frac{pr}{3} + \frac{q^2}{8}.$$

Если какое-либо решение кубического уравнения z_1 найдено, то решения уравнения (4) находятся как решения двух квадратных уравнений

$$k^2 - \sqrt{2z_1 - p}k + \frac{q}{2\sqrt{2z_1 - p}} + z_1 = 0,$$

$$k^2 + \sqrt{2z_1 - p}k - \frac{q}{2\sqrt{2z_1 - p}} + z_1 = 0,$$

$$k_{1,2} = \frac{\sqrt{2z_1 - p}}{2} \pm \sqrt{-2z_1 - p - \frac{2q}{\sqrt{2z_1 - p}}},$$

$$k_{3,4} = -\frac{\sqrt{2z_1 - p}}{2} \pm \sqrt{-2z_1 - p + \frac{2q}{\sqrt{2z_1 - p}}},$$

и общее решение уравнения (2) имеет вид

$$W(\xi) = \sum_{j=1}^4 C_j \exp(k_j \xi), \quad (5)$$

где $k_j = k_j(\omega, \alpha, R)$ – волновые числа.

Подставляя (5) в граничные условия (3), получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных постоянных C_j . Для того чтобы постоянные C_j не были равны нулю одновременно, необходимо, чтобы определитель основной матрицы был равен нулю. Это условие дает частотное уравнение [1]

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ e^{k_1} & e^{k_2} & e^{k_3} & e^{k_4} \\ k_1 e^{k_1} & k_2 e^{k_2} & k_3 e^{k_3} & k_4 e^{k_4} \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, в приведенной простейшей модели движущегося стержня фигурируют параметры R и α , которые зависят от усилия растяжения в стержне T и скорости стержня V .

Подробнее остановимся на влиянии этих факторов на собственные частоты изгибных колебаний. Зависимости первой и второй собственной частот изгибных колебаний стержня от параметра α для различных значений параметра R и анализ полученных результатов приводятся в [1]. В отличие от работы [1] здесь дается постановка и решение обратной задачи определения скорости и усилия натяжения стержня по двум собственным частотам изгибных колебаний.

При $\alpha = 0$ и $R = 0$ собственные функции $W(\xi)$ действительны и совпадают с собственными функциями стержня с жестко защемленными концами [1].

Если $R = 0$, то характеристическое уравнение (4) допускает факторизацию и его корни k_j находятся в явном виде как функции частоты Ω . Для вещественных собственных частот $\Omega_n(\alpha)$ получается довольно простое вековое уравнение, которое решается одним из численных методов [4, 5].

Если $R \neq 0$, то корни характеристического уравнения находятся с помощью формул Феррари. Последние, по мнению авторов [1], почти не применялись в задачах математической физики и механики (редким исключением является работа [1, 2]).

ПРЯМАЯ ЗАДАЧА

Расчеты проведены для следующих параметров стержня круглого поперечного сечения: $E = 2.0 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\rho = 7800$ кг/м³, $F = 3.1415$ см², $T = -3.141$ кН, $V = 25.318$ м/с, $L = 2$ м ($\alpha = 2$, $R = -8$). Решение прямой задачи для стержня с вышеприведенными параметрами дает, что первая и вторая собственные частоты стержня $f_1 = 18.3113$ Гц, $f_2 = 57.7980$ Гц ($\Omega_1 = 18.1769$, $\Omega_2 = 57.3740$). На рис. 1 даются зависимости первой (фрагмент *a*), второй (фрагмент *б*) собственных частот изгибных колебаний стержня от скоростного параметра α для различных значений силового параметра R . На рис. 2 даются зависимости первой (фрагмент *a*), второй (фрагмент *б*) собственных частот изгибных колебаний стержня от силового параметра R для различных значений скоростного параметра α . Из рис. 1 видно, что с увеличением скоростного параметра α происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стержня. Из рис. 2 видно, что с увеличением силового параметра α происходит увеличение собственных частот изгибных колебаний стержня.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Для определения скоростного и силового параметров запишем систему двух уравнений

$$\begin{cases} D_1 = D_1(\alpha, R, \Omega_1) = 0, \\ D_2 = D_2(\alpha, R, \Omega_2) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы уравнений определяется методом последовательных приближений в области однозначной зависимости скоростного и силового параметров от частоты колебаний движущегося стержня.

В точке $M_0(\alpha_0, R_0)$ $D_1(\alpha_0, R_0, \Omega_1) = u_1$, $D_2(\alpha_0, R_0, \Omega_2) = u_2$, поэтому можем записать

$$\begin{cases} \frac{\partial D_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial D_1}{\partial R} dR = -u_1, \\ \frac{\partial D_2}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial D_2}{\partial R} dR = -u_2. \end{cases}$$

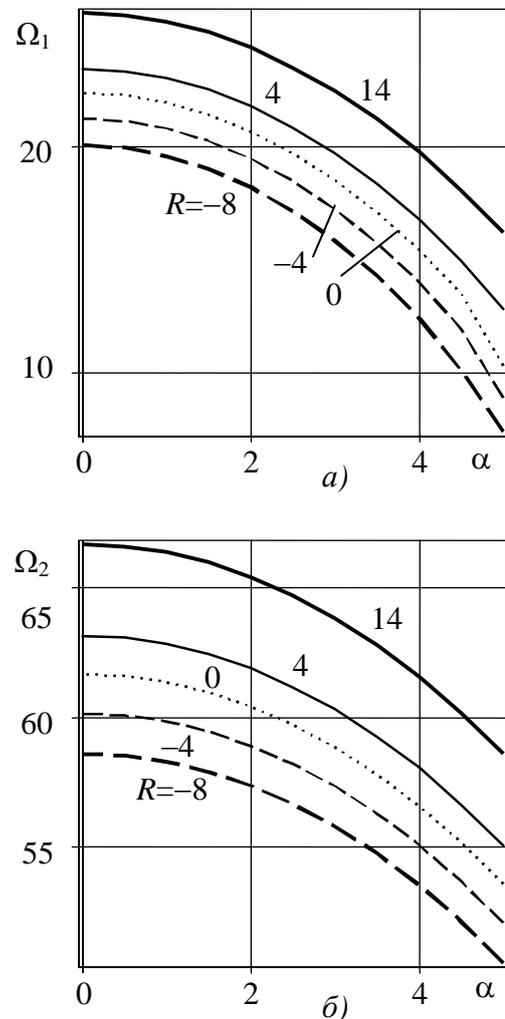


Рис. 1. Зависимости первой (фрагмент *a*), второй (фрагмент *б*) собственных частот изгибных колебаний стержня от скоростного параметра α для различных значений силового параметра R .

По этим формулам определяются $d\alpha$ и dR , далее $\alpha_0 = \alpha_0 + d\alpha$, $R_0 = R_0 + dR$. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не выполнится условие точности.

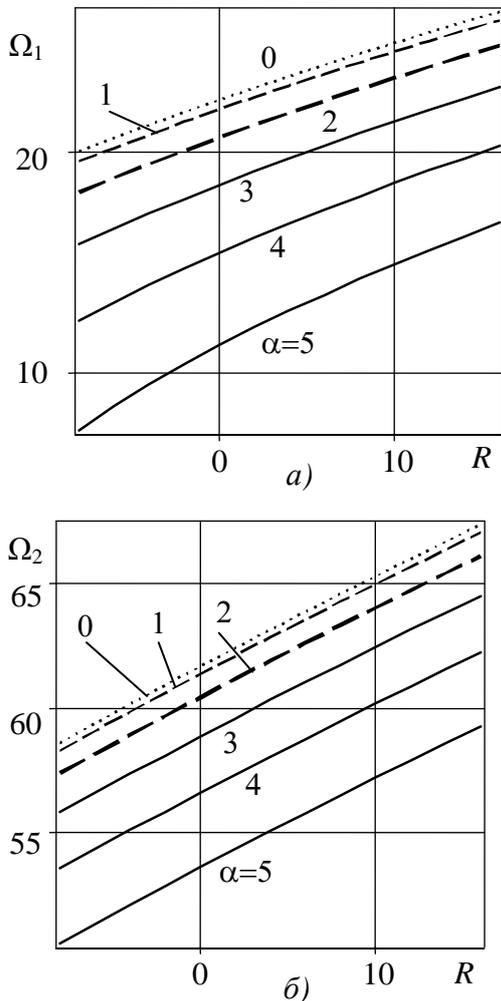


Рис. 2. Зависимости первой (фрагмент *a*), второй (фрагмент *б*) собственных частот изгибных колебаний стержня от силового параметра R для различных значений скоростного параметра α .

Решение обратной задачи для стержня с вышеприведенными параметрами при $f_1 = 18.133$ Гц, $f_2 = 57.798$ Гц ($\Omega_1 = 18.0$, $\Omega_2 = 57.3740$) дает, что $T = -3.134$ кН, $V = 26.598$ м/с, $L = 2$ м ($\alpha = 2.101$, $R = -7.981$). На рис. 3 приводятся зависимости от первой частоты изгибных колебаний Ω_1 скоростного параметра α (фрагмент *a*) и силового параметра R (фрагмент *б*) для различных частот изгибных колебаний Ω_2 : 57.374 – кривая 1; 58 – 2; 59 – 3. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скоростной параметр α и силовой параметр R .

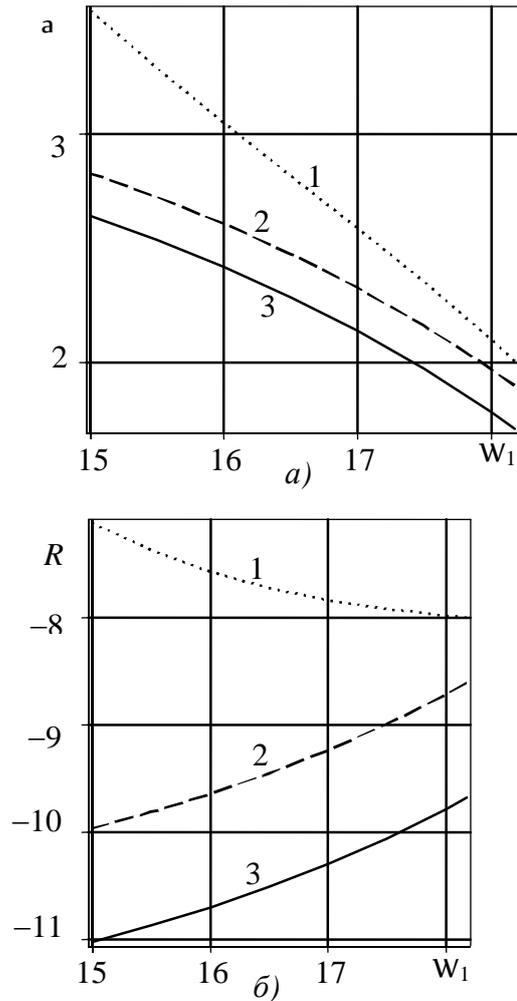


Рис. 3. Зависимости от первой частоты изгибных колебаний Ω_1 скоростного параметра α (фрагмент *a*) и силового параметра R (фрагмент *б*) для различных частот изгибных колебаний Ω_2 : 57.374 – кривая 1; 58 – 2; 59 – 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получено, что с увеличением скоростного параметра происходит уменьшение собственных частот изгибных колебаний стержня. Показано, что с увеличением силового параметра происходит увеличение собственных частот изгибных колебаний стержня. По двум частотам изгибных колебаний можно определить скоростной и силовой параметры движущегося стержня в области однозначной зависимости скоростного и силового параметров от частоты колебаний движущегося стержня. Результаты работы могут находить технические применения в задачах динамики и прочности приборов, машин и механизмов в текстильной промышленности при производстве нитей и канатов, в металлургии, в частности, при прокатке металли-

ческих стержней и полос, протяжке проволоки, производстве изделий из пластмасс и рулонов бумаги и могут быть применены для определения скоростного и силового параметров движущегося стержня, полосы, проволоки, нити, полосы бумаги по двум собственным частотам изгибных колебаний. Также эти результаты могут быть полезными при изучении вопросов устойчивости движения указанных выше механических систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акуленко Л. Д., Георгиевский Д. В., Нестеров С.В.** Спектр поперечных колебаний участка движущегося стержня при воздействии продольной нагрузки // Известия РАН. МТТ. 2015. № 2. С. 139–144. [L. D. Akulenko, D. V. Georgievskiy, and S. V. Nesterov, "Transverse vibration spectrum of a part of a moving rod under a longitudinal load", (in Russian), in *Izvestiya RAN. MTT*, no. 2, pp. 149-144, 2015.]
2. **Акуленко Л. Д., Нестеров С. В.** Изгибные колебания движущегося стержня // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 5. С.766–781. [L. D. Akulenko and S. V. Nesterov, "Flexural vibrations of a moving rod", (in Russian), in *Prikl. Mat. Mekh.*, vol. 72, no. 5, pp. 766-781, 2008.]
3. **Светлицкий В. А.** Механика стержней: в 2 т., т. 2. М.: Высшая школа, 1987. 304 с. [V. A. Svetlitskiy, *Mechanics of rods*, (in Russian). Vol. 2. Moscow: Vysshaya shkola, 1987.]
4. **Нестеров С. В., Акуленко Л. Д.** Спектр поперечных колебаний движущегося стержня // Докл. РАН. 2008. Т. 420. № 1. С. 50–54. [S. V. Nesterov and L. D. Akulenko, "Transverse vibration spectrum of a moving rod", in *Dokl. RAN*, vol. 420, no. 1, pp. 50-54, 2008.]
5. **Kong L., Parker R.G.** Approximate eigensolutions of axially moving beams with small flexural stiffness // *J. Sound and Vibr.* 2004. V. 276. P. 459–469. [L. Kong, R. G. Parker, "Approximate eigensolutions of axially moving beams with small flexural stiffness," in *J. Sound and Vibr.* Vol. 276. pp. 459-469, 2004..]

ОБ АВТОРЕ

Хахимов Аким Гайфуллинович, вед. науч. сотр. лаборатории мех. твердого тела. Дипл. инж.-мех. (УГАТУ; 1970). Канд. физ.-мат. наук (Казанский гос. ун-т; 1977). Иссл. в обл. мех. твердого деформируемого тела.

METADATA

Title: Determining velocity and tensile strength in a moving rod using natural frequencies of flexural vibrations.

Authors: A.G. Khakimov.

Affiliation:

Federal State Budget Scientific Institution
R.R. Mavlyutov Institute of Mechanics, Ufa Research Centre,
Russian Academy of Sciences (IMech URC RAS), Russia.

Email: hakimov@anrb.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 19, no. 4 (70), pp. 40-44, 2015. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The paper investigates natural transverse vibrations in a thin rectilinear rod portion of uniform length moving along the neutral line of the undeformed state. The movement occurs between two rigidly fixed coaxial guides (clamps), with the distance between them being equal to the length of the vibrating rod portion. The longitudinal force is assumed to constantly act along the neutral line. It has been found that as the velocity parameter increases, natural frequencies of flexural vibrations in the rod tend to decrease. It has been also shown that as the force parameter increases, natural frequencies of flexural vibrations in the rod show an increase. Using two frequencies of flexural vibrations, we can determine the velocity and force parameters of the moving rod. The results of the work can find technological applications in the dynamics and reliability problems of equipment, machines and mechanisms in the textile industry, thread and cable manufacturing, metallurgy (especially for rolled metal bars and strips), wire drawing, plastic products and paper rolls manufacturing and can be used to determine the velocity and force parameters of a moving rod, metal and paper strip, wire and thread, using two frequencies of flexural vibrations.

Key words: rod movement, longitudinal force, flexural vibrations, natural frequencies, primal and inverse problems.

About authors:

KHAKIMOV, Akim Gayfullinovich, Dipl. mechanical engineer (UGATU, 1970). Cand. Sci. (Phys.-Math) (Kazan State Univ., 1977).