

УДК 536.24

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН В КАНАЛАХ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

И. С. ЕЛИСЕЕВ¹, Н. М. ЦИРЕЛЬМАН²

^{1,2} at-t@ugatu.ac.ru

^{1,2} ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 22 января 2015 г.

Аннотация. Для линейных задач конвективного теплообмена с переменными теплофизическими свойствами движущейся среды, скоростью потока, параметрами граничных условий, мощностью объемного тепловыделения и переменными в направлении течения формой и площадью поперечного сечения канала здесь получен функционал свертки. С его использованием построены формулы для приближенного аналитического определения температурных полей. В качестве примера описано нахождение температурных полей в плоском и кольцевом каналах.

Ключевые слова: конвекция; теплоотдача; канал; математическая модель; выпрямление границы; функционал типа свертки; уравнения Эйлера; приближенные решения.

ВВЕДЕНИЕ

Получение решений краевых задач конвективного теплообмена в каналах с изменяющимися в направлении течения Ox формой и площадью поперечного сечения (в нецилиндрических областях) встречает значительные трудности, и оно принципиально отличается от хорошо изученного определения температурных полей в каналах с постоянными формой и площадью поперечного сечения (в цилиндрических областях) [1–8]. Вследствие зависимости характеристического размера области переноса теплоты от ее расстояния в направлении потока к этому типу задач могли бы быть применены лишь специальные методы исследования, показанные для процесса нестационарной теплопроводности в твердых телах с подвижной внешней границей в работах, например, [9–13]. Работа основывается на полученном авторами в [12, 13] вариационном описании краевой задачи нестационарной теплопроводности в твердых телах с заданным законом движения во времени внешней границы с привлечением метода ее выпрямления и показаны его практические приложения.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В КАНАЛАХ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДЬЮ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

При наличии в канале переменного поперечного сечения $\Omega(x)$ с ограничивающей поверхностью $S(x)$ (на рис. 1, a область $\bar{\Omega}(x) = \Omega(x) \cup S(x)$ показана для двухмерного случая) в приводимом ниже функционале типа свертки становится невозможным выполнение интегрирования по области $\Omega(x)$, т.к. находящиеся в подынтегральном выражении функции $T(M, x)$ и $T(M, X - x)$ при всех значениях x имеют разные области определения по пространственным переменным y, z . Этот факт иллюстрирован графически и на фазовой плоскости $y - x$ (рис. 2) для задачи теплообмена в плоском канале с изменяющимися в направлении течения Ox границами $S_1(x)$ и $S_2(x)$: например, в сечении, отстоящем от входного на расстоянии x_1 , областью определения для $T(y, x)$ по пространственной переменной является интервал (a, b) , а для $T(y, X - x)$ – интервал (c, d) . Поэтому при вариационном решении задачи конвективного теплообмена для каналов с переменной формой и площадью поперечных сечений при использо-

вании функционала типа свертки приходится, как это ниже показано, специальной заменой переменной перейти к задаче теплообмена в канале постоянного поперечного сечения, т.е. осуществить «выпрямление» границ каналов (рис. 1, б).

Исходная математическая модель исследуемого процесса представляет собой краевую задачу для определения стационарных температурных полей в прямолинейном канале с изменяющейся площадью поперечного сечения в направлении Ox (с изменяющейся в направлении течения поперечной координатой $y = b(x)$) при зависящих от y и x искомой температуры $T(y, x)$, объемной теплоемкости $C(y, x)$, теплопроводности $\lambda(y, x)$ и мощности источника объемного тепловыделения $q_v(y, x)$, включающую в себя уравнение энергии (уравнение Фурье–Кирхгофа)

$$y^{m-1}(\vec{w} \cdot \text{grad})(C(y, x)T) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(y, x)y^{m-1} \frac{\partial T}{\partial y} \right] + q_v(y, x)y^{m-1},$$

$$a < y < b(x), \quad x > 0, \quad \vec{w}(w_1, w_2) \quad (1)$$

с условием на входе в канал

$$T(y, 0) = T_{en}(y), \quad y \in (a, b(0)) \quad (2)$$

и с граничными условиями третьего рода на ограничивающих поверхностях ($y = b(x)$) плоского ($m=1$, $a=0$) и цилиндрического ($m=2$) каналов (рис. 3), когда известны температуры омывающих сред $T_{f1}(x)$, $T_{f2}(x)$ и коэффициенты теплоотдачи $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$:

$$\lambda(a, x) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=a} = \alpha_1(x) [T(a, x) - T_{f1}(x)], \quad x > 0, \quad (3)$$

$$-\lambda(b(x), x) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=b(x)} = \alpha_2(x) [T(b(x), x) - T_{f2}(x)], \quad x > 0. \quad (4)$$

Плоский канал ($m=1$) становится симметричным, если ось Ox лежит в плоскости симметрии, а температурное поле в нем является симметричным при $\alpha_1(x) = 0$ в (3). При $m=2$ координате y соответствует радиус в кольцевом канале, который при $a \rightarrow 0$ становится трубой с круговым поперечным сечением, изменяющимся в направлении Ox , с заданием на ее оси условия симметрии температурного поля, получающегося также из (3) для $\alpha_1(x) = 0$.

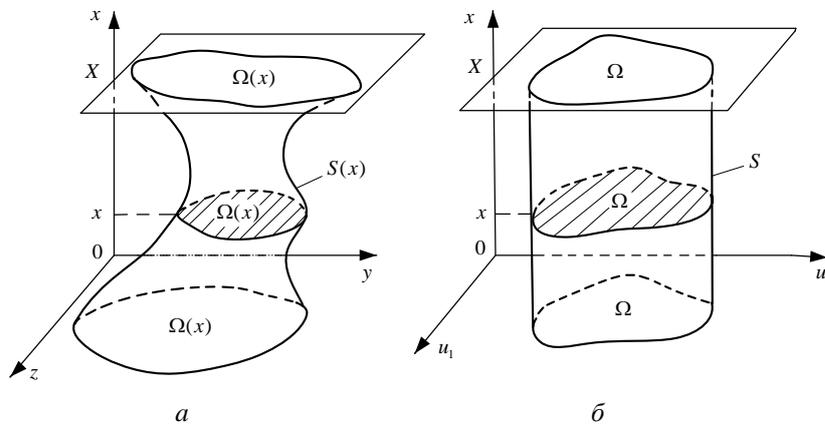


Рис. 1. Ограничивающая поверхность канала с переменным сечением (а) и после ее «выпрямления» (б)

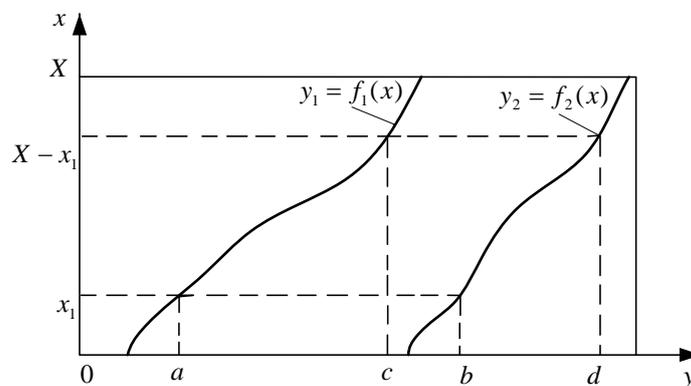


Рис. 2. Изменения ограничивающих поверхностей плоского щелевого канала в фазовой плоскости $x-y$

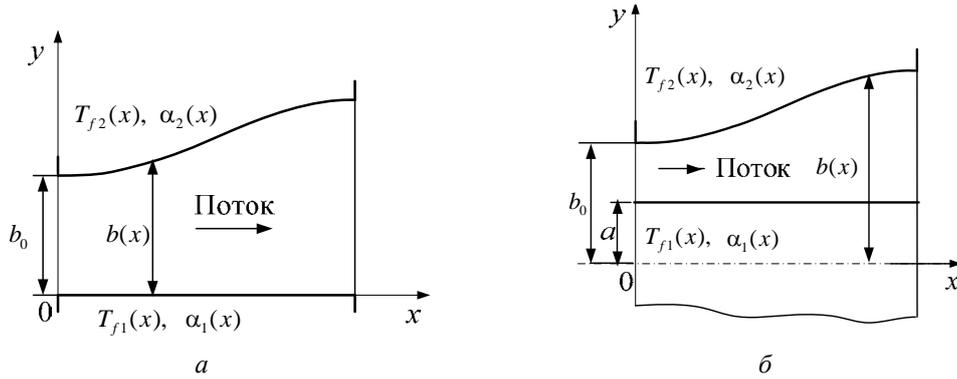


Рис. 3. Продольные сечения плоского (а) и кольцевого (б) каналов с изменяющейся в направлении Ox площадью поперечного сечения

Подстановка, выпрямляющая переменную по длине канала границу

$$y = z[b(x) - a] + a = zb_1(x) + a, \quad (5)$$

приводит к модифицированному уравнению Фурье–Кирхгофа

$$\begin{aligned} [f_1(z, x)\tilde{T}]'_x &= \frac{\partial}{\partial z} [f_2(z, x)\tilde{T}'_z] + \\ &+ f_3(z, x)\tilde{T}'_z + f_4(z, x)\tilde{T} + f_5(z, x), \end{aligned} \quad (6)$$

в котором обозначены:

$$\begin{aligned} f_1(z, x) &= (zb_1(x) + a)^{m-1} \tilde{w}_1 \tilde{C} = \tilde{w}_1 \tilde{C}_1, \\ f_2(z, x) &= (zb_1(x) + a)^{m-1} \tilde{\lambda} / b_1^2(x) = \tilde{\lambda}_1 / b_1^2(x), \\ f_3(z, x) &= (zb'_1(x) \tilde{w}_1 - \tilde{w}_2) \tilde{C}_1 / b_1(x), \\ f_4(z, x) &= \tilde{w}'_{1,x} \tilde{C}_1 - (zb_1(x) + a)^{m-1} \tilde{w}_2 \tilde{C}'_y + \\ &+ zb'_1(x) \frac{\partial}{\partial z} (f_1(z, x)) / b_1(x), \\ f_5(z, x) &= \tilde{q}_v (zb_1(x) + a)^{m-1} = \tilde{q}_{v1}. \end{aligned}$$

Все функции, входящие в (6), зависят от координат точек $\tilde{M}(z, x) = M(zb_1(x) + a, x)$.

Кроме того, в формулах (1)–(6) имеем проекции вектора скорости w_1 и w_2 на оси Ox и Oy соответственно, а также модифицированные объемную теплоемкость $C_1(y, x) = y^{m-1}C(y, x)$, коэффициент теплопроводности

$$\lambda_1(y, x) = y^{m-1}\lambda(y, x)$$

и мощность источника объемного тепловыделения

$$q_{v1}(y, x) = y^{m-1}q_v(y, x).$$

Умножая обе части уравнения (6) на нормирующий множитель

$$\begin{aligned} \mu(z, x) &= \exp\left\{\int [f_3(z, x) / f_2(z, x)] dz\right\} = \\ &= \exp\left\{\int \left[\frac{\tilde{C}(z, x)b_1(x)}{\tilde{\lambda}(z, x)} (zb'_1(x)\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)\right] dz\right\}, \end{aligned}$$

приводим его правую часть к дивергентной форме относительно искомой температуры $\tilde{T}(z, x)$:

$$\lambda(0, x) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad x > 0, \quad (3')$$

$$\begin{aligned} [f_6(z, x)\tilde{T}]'_x &= \\ &= \frac{\partial}{\partial z} [f_7(z, x)\tilde{T}'_z] + f_8(z, x)\tilde{T} + f_9(z, x). \end{aligned} \quad (7)$$

В формуле (7) обозначены:

$$\begin{aligned} f_6(z, x) &= \mu(z, x)f_1(z, x) = \mu(z, x)\tilde{w}_1\tilde{C}_1(z, x), \\ f_7(z, x) &= \mu(z, x)f_2(z, x) = \tilde{\lambda}_1\mu(z, x) / b_1^2(x), \\ f_8(z, x) &= \mu'_x(z, x)f_1(z, x) + \mu(z, x)f_4(z, x) = \\ &= (zb_1(x) + a)^{m-1} \left\{ \mu'_x \tilde{w}_1 \tilde{C} + \mu [\tilde{w}'_{1,x} \tilde{C} - \tilde{w}_2 \tilde{C}'_y] \right\} + \\ &+ \mu zb'_1 \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{w}_1 \tilde{C}_1) / b_1, \\ f_9(z, x) &= \mu(z, x)f_5(z, x). \end{aligned}$$

При этом условия (2)–(4) для $T(y, x)$ относительно $\tilde{T}(z, x)$ принимают вид

$$\tilde{T}(z, 0) = T_{en}(zb_1(0) + a), \quad 0 < z < 1, \quad (2')$$

$$f_7(0, x) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta_1(x) [\tilde{T}(0, x) - T_{f1}(x)], \quad x > 0, \quad (3')$$

$$-f_7(1, x) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \Big|_{z=1} = \beta_2(x) [\tilde{T}(1, x) - T_{f2}(x)], \quad x > 0, \quad (4')$$

где

$$\beta_1(x) = \alpha_1(x)b_1(x)f_7(0,x)/\lambda(a,x),$$

$$\beta_2(x) = \alpha_2(x)b_1(x)f_7(1,x)/\lambda(b(x),x).$$

Тогда для функции $u(z,x)$, связанной с $\tilde{T}(z,x)$ соотношением

$$\tilde{T}(z,x) = u(z,x) + u_s(z,x), \quad (8)$$

в котором

$$u_s(z,x) = T_{f_1}(x)(1-z)^2(2z+1) + T_{f_2}(x)(3-2z)z^2,$$

имеем следующую краевую задачу с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f_6(z,x)u] = \frac{\partial}{\partial z}[f_7(z,x)u'_z] + f_8(z,x)u + f_{10}(z,x), \quad (9)$$

$$u(z,0) = T_{en}(zb_1(0)+a) - u_s(z,0), \quad 0 < z < 1, \quad (10)$$

$$f_7(0,x) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta_1(x)u(0,x), \quad x > 0, \quad (11)$$

$$-f_7(1,x) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=1} = \beta_2(x)u(1,x), \quad x > 0, \quad (12)$$

$$(f_{10}(z,x) = [f_7(z,x)u'_{s,z}]'_z -$$

$$- [f_6(z,x)u_s]'_x + f_8(z,x)u_s + f_9(z,x)).$$

2. ПОСТРОЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССА

При поиске n -го приближения $u_n(z,x)$ к решению задачи (9)–(12) по методу приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям в виде

$$u(z,x) = \sum_{i=1}^n \psi_i(x)\chi_i(z,x) \quad (13)$$

известные функции координат $\chi_i(z,x)$, удовлетворяющие граничным условиям (11), (12), были выбраны следующим образом:

$$\chi_i(z,x) = a_i + d_i(x)z + g_i(x)z^{i+1}. \quad (14)$$

В формуле (13) координатные функции $\chi_i(z,x)$ на интервале $z \in (0; 1)$ непрерывны и дифференцируемы [14]. В формуле (14) при $\alpha_1(x) \neq 0$ имеем

$$a_i = f_7(0,x)/\beta_1(x), \quad d_i = 1,$$

$$g_i = -[\beta_1(x)(a_i + 1) + f_7(1,x)]:$$

$$: [(i+1)f_7(1,x) + \beta_2(x)],$$

а при $a=0$ и условии (3') вместо (3) получаем

$$a_i(x) = -b(x)\alpha_2(x) - (i+1)\lambda(b(x),x), \quad d_i = 0,$$

$$g_i(x) = b(x)\alpha_2(x).$$

Функции $\psi_i(x)$ находятся из условия обращения в нуль первой вариации функционала типа свертки, установленного в [12, 13] для цилиндрической области и принимающего для краевой задачи (9)–(12) вид

$$J(u) = \int_0^1 \overline{f_7} \frac{\partial u}{\partial z} * \frac{\partial u}{\partial z} dz +$$

$$+ \tilde{\beta}_1(x)u(0,x) * u(0,x) + \tilde{\beta}_2(x)u(1,x) * u(1,x) +$$

$$+ \int_0^1 \left\{ \overline{f_6} u'_x * u + f_6(z,0)[u(z,0) - 2u_{en}(z)]u(z,X) + \right.$$

$$+ 2f_{10}(z,x) * u(z,x) + \left. \frac{1}{2} \left(\overline{f'_{6,x}} \right) u * u \right\} dz -$$

$$- \int_0^1 \left\{ \overline{f_8}(z,x)u(z,x) * u(z,x) + \right\} dz, \quad (15)$$

где $u_{en}(z) = T_{en}(zb(0)+a) - u_s(z,0)$, $z \in (0;1)$.

Здесь, как известно, свертка функций $F(z,x)$ и $G(z,x)$ определяется как

$$F(z,x) * G(z,x) = \int_0^x F(z,x)G(z,X-x)dx$$

и нетрудно показать, что она симметрична:

$$F(z,x) * G(z,x) = G(z,x) * F(z,x).$$

В функционале (15) под $\overline{f_i}(z,x)$ и $\overline{\beta_i}(x)$ понимаются симметризованные относительно уровня $X/2$ функции $f_i(z,x)$ и $\beta_i(x)$ путем изменения их значений при $x \in (0; X)$ таким образом, что

$$\overline{f_i}(z,x) = \begin{cases} f_i(z,x) & \text{при } x \in (0; X/2), \\ f_i(z, X-x) & \text{при } x \in (X/2; X). \end{cases}$$

График функций $\overline{f_i}(z,x)$ и $\overline{\beta_i}(x)$ показан на рис. 4.

Можно показать, что обращение в нуль первой вариации δJ функционала J вида (15)

$$\delta J = 0$$

означает выполнение системы равенств, составляющих приводимую ниже краевую задачу

$$\begin{aligned} (\overline{f_6 u})'_x - \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{f_7} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \overline{f_8} u(z, x) - f_{10}(z, x) + \\ + \left(-(\overline{f_6})'_x + \overline{f'_6} \right) u(z, x) / 2 = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

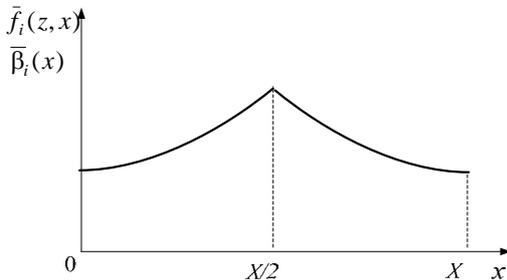


Рис. 4. График функций $\overline{f_i}(z, x)$ и $\overline{\beta_i}(x)$, симметризованных в точке $x = X/2$

$$f_6(z, 0)[u(z, 0) - u_{en}(z)] = 0, \quad z \in (0, 1), \quad (17)$$

$$\beta_1(x)u(0, x) - \overline{f_7}(0, x) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad x \in (0, X), \quad (18)$$

$$\beta_2(x)u(1, x) + \overline{f_7}(1, x) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=1} = 0, \quad x \in (0, X). \quad (19)$$

При этом выполнение (16) требуется в каждом из открытых прямоугольников на множестве $P_1 = (0; 1) \times (0; X/2)$ и $P_2 = (0; 1) \times (X/2; X)$ (рис. 5).

Равенства (16)–(19) соответствуют математической модели (9)–(12) при $x < X/2$, так как $\overline{f_6} = f_6$, $\overline{f_7} = f_7$, $\overline{f_8} = f_8$ при $0 < x < X/2$ и $\overline{f'_6} = f'_6$, $(\overline{f_6})'_x = f'_6$ и поэтому $-(\overline{f_6})'_x + \overline{f'_6} = f'_6 - f'_6 = 0$ при $x \in (0; X/2)$.

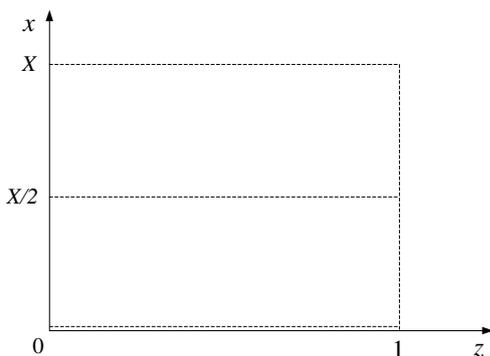


Рис. 5. Геометрическая область выполнения условия (16)

В итоге задача (16)–(19) при $0 < x < X/2$ принимает вид

$$\begin{aligned} (f_6 u)'_x = \frac{\partial}{\partial z} \left(f_7 \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f_8 u(z, x) + f_{10}(z, x), \\ (z, x) \in P_1 = (0; 1) \times (0, X/2), \end{aligned} \quad (16')$$

$$f_6(z, 0)[u(z, 0) - u_{en}(z)] = 0, \quad z \in (0, 1), \quad (17')$$

$$f_7(0, x) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \beta_1(x)u(0, x), \quad x \in (0, X/2), \quad (18')$$

$$-f_7(1, x) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=1} = \beta_2(x)u(1, x), \quad x \in (0, X/2). \quad (19')$$

Заметим, что условие (17') эквивалентно условию (10), если имеет место неравенство

$$w_1(y, 0) \cdot C(y, 0) \neq 0, \quad a < y < b(0).$$

Рассмотрим теперь в качестве примера нахождение первого приближения к решению задачи (16')–(19') вида

$$u_1(z, x) = \psi_1(x) \overline{\chi_1}(z, x) \quad (13')$$

из условия обращения первой вариации δJ функционала J в нуль

$$\delta J(u_1) = 0. \quad (20)$$

Преобразуя уравнение (20) для $u_1(z, x)$ вида (13'), получаем задачу Коши относительно функции $\psi_1(x)$ в виде дифференциального уравнения

$$A_{11}(x)\psi'_1(x) = a_{11}(x)\psi_1(x) + A_1(x) \quad (21)$$

с начальным условием

$$\psi_1(0) = \int_0^1 f_6(z, 0)u_{en}(z)\overline{\chi_1}(z, 0)dz / A_{11}(0). \quad (22)$$

Решение уравнения (21) таково:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) = \left\{ \psi_1(0) + \int_0^x A_1(\tilde{x}) \exp \left[- \int_0^{\tilde{x}} a_{11}(\eta) / A_{11}(\eta) d\eta \right] d\tilde{x} : \right. \\ \left. : A_{11}(\tilde{x}) \right\} \exp \left[\int_0^x a_{11}(\tilde{x}) / A_{11}(\tilde{x}) d\tilde{x} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где $A_{11}(x) = \int_0^1 \overline{f_6}(z, x) \overline{\chi_1}^2(z, x) dz$,

$$\begin{aligned} a_{11}(x) = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{f_7} \frac{\partial \overline{\chi_1}}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \left[\overline{f_8} - \frac{1}{2} \left(\overline{f'_{6,x}} + (\overline{f'_6})'_x \right) \right] \overline{\chi_1} - \overline{f_6} (\overline{\chi_1})'_x \right\} \overline{\chi_1} dz, \end{aligned}$$

$$A_1(x) = \int_0^1 f_{10}(z, x) \overline{\chi_1}(z, x) dz.$$

При этом в (23) на интервале $x \in (0; X/2)$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} \overline{f_6} &= f_6, \quad \overline{f_7} = f_7, \quad \overline{f_8} = f_8, \\ \overline{f'_{6,x}} + (\overline{f_6})'_x &= 2f'_{6,x}, \quad \overline{\chi_1}(z, x) = \chi_1(z, x). \end{aligned} \quad (24)$$

Решение задачи Коши для уравнения (21) с начальным условием (22) имеет вид

$$u(z, x) = \psi_1(x) \chi_1(z, x). \quad (25)$$

Заметим, что в силу (24) при $x \in (0; X/2)$ в формулах для $A_{11}(x)$, $a_{11}(x)$ и $A_1(x)$ следует опустить знак симметризации входящих в них функций. В соответствии с формулой (8) первое приближение T_1 к решению исходной задачи (9)–(12) для рассмотренных условий можно представить в виде

$$\begin{aligned} T_1(y, x) &= u_1((y-a)/b_1(x), x) + \\ &+ u_s((y-a)/b_1(x), x). \end{aligned} \quad (26)$$

3. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ

В качестве примера приложения развитого здесь метода рассмотрим определение симметричного температурного поля в потоке жидкости (газа) в плоском канале (рис. 3, а) при ширине $2b_0$ входного сечения (при $x=0$), средне-расходной скорости потока в нем w_0 и проекциях вектора скорости \vec{w} на направление течения Ox и по нормали к нему Oy , равных

$$w_1(y, x) = w_0 b_0 / b_1(x)$$

и

$$w_2(y, x) = w_0 b_0 b'_1(x) y / b_1^2(x).$$

Нетрудно показать, что именно такое распределение скорости при постоянной плотности движущейся среды ρ удовлетворяет уравнению неразрывности потока

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0$$

и уравнению движения идеальной (без трения) среды

$$\rho(\vec{w} \cdot \operatorname{grad}) \vec{w} = -\operatorname{grad} p.$$

В последнем случае проекция градиента статического давления на направление Ox определяется по формуле

$$p'_x = \rho w_0^2 b_0^2 / b_1^3(x). \quad (27)$$

Отметим также, что таким образом подобранные значения продольной составляющей скорости w_1 соответствуют ее равномерному профилю в каждом поперечном сечении канала.

Кроме того, пусть имеет место равномерное распределение во входном сечении канала температуры T_{en} движущейся в нем среды с постоянной объемной теплоемкостью C при отсутствии источников объемного тепловыделения ($q_v = 0$) и произвольной зависимости от координаты x коэффициента теплопроводности $\lambda = \lambda(x)$, постоянстве температуры T_f со стороны среды, омывающей стенки канала снаружи, и при переменном коэффициенте теплоотдачи $\alpha(x)$. Тогда в указанных предпосылках решение задачи (8)–(12) в форме (25) для первого приближения для рассматриваемого примера при симметричном развитии температурного поля в плоском канале с учетом коэффициентов в распределении (14) получаем

$$\begin{aligned} u_1(z, x) &= \psi_1(0) \exp \left[\int_0^x a_{11}(\tilde{x}) / A_{11}(\tilde{x}) d\tilde{x} \right] \times \\ &\times (a_1(x) + g_1(x) z^2), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(0) &= \frac{(T_{en} - T_f)(a_1(0) + g_1(0)/3)}{a_1^2(0) + \frac{1}{5} g_1^2(0) + \frac{2}{3} a_1(0) g_1(0)}, \\ a_{11}(x) &= \frac{2\lambda(x)}{b^2(x)} g_1(x) \left(a_1(x) + \frac{1}{3} g_1(x) \right) - \frac{w_0 b_0 C}{b(x)} \times \\ &\times \left[a_1(x) a'_1(x) + \frac{1}{3} (a'_1(x) g_1(x) + a_1(x) g'_1(x)) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{5} g_1(x) g'_1(x) \right], \quad A_1(x) = 0, \\ A_{11}(x) &= \frac{C b_0 w_0}{b(x)} \left[a_1^2(x) + \frac{g_1^2(x)}{5} + \frac{2a_1(x) g_1(x)}{3} \right]. \end{aligned}$$

ВЫВОДЫ

В работе получено и применено вариационное описание с функционалом типа свертки к определению температурных полей в потоке для каналов с изменяющимися по направлению течения размерами и формой продольного и поперечного сечений при переменных теплофизических свойствах среды и параметрах граничных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев Н. М., Кочубей А. А., Рядно А. А.** и др. Нестационарный теплообмен в трубах. Киев, Донецк: Вища школа, 1980. 160 с. [N. M. Belayev, A. A. Kochubey, A. A. Raydno, et al., Unsteady heat transfer in pipes, (in Russian), Kiev, Donetsk, Vishcha Shkola, 1980. 160 p.]
2. **Кузнецов Ю. Н., Белоусов В. П.** Построение расчетных формул для нестационарного теплообмена при турбулентном течении в трубе // Теплофизика высоких температур. 1972. Т. 10, № 1. С. 207–211. [Yu. N. Kuznetsov, V. P. Belousov, Building design formulas for unsteady heat transfer in turbulent pipe flow, (in Russian), in Teplofizika vysokih temperatur, vol.10. no.1, pp.207-211, 1972]
3. **Кутателадзе С. С.** Основы теории теплообмена. М.: Атомиздат. 1979. 415 с. [S. S. Kutateladze, Fundamentals of the theory of heat transfer (in Russian), Moscow: Atomizdat, 415 p., 1979.]
4. **Петухов Б. С.** Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия. 1967. 411 с. [B. S. Petuhov, Heat transfer and resistance in laminar flow in pipes, (in Russian), Moscow: Energia, 411 p., 1967.]
5. **Петухов Б. С., Генин Л. Г., Ковалев С. А.** Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Атомиздат. 1974. 404 с. [B. S. Petuhov, L. G. Genin, S. A. Kovalev, Heat transfer in nuclear power plants, (in Russian), Moscow: Atomizdat, 404 p., 1974.]
6. **Тао Л. Н.** Вариационный метод расчета теплоотдачи при вынужденном течении жидкости в трубах произвольного поперечного сечения // Достижения в области теплообмена. М.: Мир, 1970. С. 325–338. [L. N. Tao, Variational method for calculating heat transfer in forced flow of liquid in tubes of arbitrary cross section, (in Russian), Dostigenia v oblasti teploobmena, Moscow: Mir, pp.325-338, 1970.]
7. **Ибрагимов М. Х., Субботин В. П., Бобков В. П.** и др. Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах. М.: Атомиздат. 1978. 296 с. [M. H. Ibragimov, V. P. Subbotin, V. P. Bobkov, (in Russian), Structure and mechanism of turbulent flow in the heat exchange channels, Moscow: Atomizdat, 296 p., 1978.]
8. **Мигай В. К.** Теплообмен в треугольном канале при ламинарном течении // Инж.-физ. ж. 1958. № 7. С. 18–25. [V. K. Migay, Heat transfer in a triangular channel in laminar flow, (in Russian), in Ing.-fiz. zhurnal, no.7, pp.18-25, 1958.]
9. **Карташов Э. М., Любов Б. Я.** Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности с движущимися границами // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1974. № 6. С. 83–111. [E. M. Kartashov, B. Ya. Luybov, Analytical methods for solving boundary value problems of the heat equation with moving boundaries, (in Russian), in Izv. AN SSSR, Energetika i transport, no. 6, pp. 83-111, 1974.]
10. **Карташов Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа. 2001. 550 с. [E. M. Kartashov, Analytical methods in the theory of heat conductivity of solid bodies, (in Russian), Moscow: Vysshaya shkola, 550 p., 2001.]
11. **Карташов Э. М.** Метод обобщенного интегрально-преобразования при решении уравнения теплопроводности в области с подвижными границами // Инж. - физ. ж. 1987. Т. 52. № 3. С. 495-505. [E. M. Kartashov, Generalized integral transform method for solving the heat equation in domains with moving boundaries, (in Russian), in Ing.-fiz. zhurnal, vol. 52, no. 3, pp. 495-505, 1987.]
12. **Янбулатов Д. М., Цирельман Н. М.** Вариационное решение задачи теплопроводности для областей с подвижными границами // Инж.- физ. ж. 1974. Т. 26. № 4. С. 714–719. [D. M. Yanbulatov, N. M. Tsirelman, Variational solution of heat conduction problem for domains with moving boundaries, (in Russian), in Ing.-fiz. zhurnal, vol. 26, no. 4, pp. 714-719, 1974.]
13. **Tsirelman N. M., Zhiber A. V.** "Solution of the unsteady-state heat conduction problem for a two-dimensional region with a moving boundary," in *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 30, no. 7, pp. 1259–1267, 1987.
14. **Канторович В. Л., Крылов В. И.** Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с. [V. L. Kantorovich, V. I. Krylov, Approximate methods of higher analysis, (in Russian), M.-L.: Fizmatgiz, 708 p., 1962.]

ОБ АВТОРАХ

ЕЛИСЕЕВ Игорь Спартакovich, доц. каф. математики. Дипл. мат. (БГУ, 1975). Канд. физ.-мат.наук (МГПИ им. Крупской, М., 1981). Иссл. в обл. функционального анализа и теории функций комплексного переменного.

ЦИРЕЛЬМАН Наум Моисеевич, проф. каф. авиац. теплотехники и теплоэнергетики. Дипл. инж.-мех. (Одесская акад. холода, 1963). Канд. техн. наук (МИХМ, М., 1969). Д-р техн.наук (КАИ, Казань, 1995). Иссл. в обл. аналитических и численных методов теории тепломассопереноса.

METADATA

Title: Convective heat transfer in channels with variable cross-section

Authors: I. S. Eliseev¹, N. M. Tsirelman².

Affiliation:

^{1,2}Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

E-mail: ^{1,2}at-t@ugatu.ac.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU, vol. 19, no. 3 (69), pp. 132-138, 2015.

ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: For linear problems of convective heat transfer processes with variable thermophysical characteristics of the medium, velocity of stream, volumetric heat generation sources, parameters of boundary conditions and cross-section of the channels the convolution type functional is obtained. Through its employment the approximate analytical solutions for determination of temperature fields in the stream is developed. An example is provided for its description in the flat and ring-shaped channels.

Key words: convection; heat transfer; channel; mathematical model; straightening of border; convolution type functional; Euler equations; approximate solutions.

About authors:

ELISEEV, Igor Spartakovich, Prof. as. Dept. of higher mathematics. Dipl. Mathematics (BSU, 1975). Cand. of Phys.-math. Sci. (MSPI, 1981).

TSIRELMAN, Naum Moiseevich, Prof., Dept. of Aviation Thermotechnics and Thermal Power. Dipl. engineer-mechanic (Odessa State academy of cold, 1963). Cand. of Tech. Sci. (MICE, 1969), Dr. of Tech. Sci. (KAI, 1995).