ISSN 1992-6502 (Print)
2015. Т. 19, № 2 (68). С. 46–55
Вестник УГАТУ
ISSN 2225-2789 (Online)
http://journal.ugatu.ac.ru

УДК 62:.519.2

Методика комплексной оптимизации планов эксперимента при исследовании технических систем

А. С. Гишваров[1], Г. К. Агеев[2]

[1,2]ad@mail.rb.ru

ФГБОУ ВПО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 11 февраля 2015 г.

Аннотация. Рассматривается методика комплексной оптимизации планов эксперимента при исследовании технических систем, которая в отличие от известных позволяет получить дополнительный эффект за счет минимизации временных и материальных затрат на подготовку и проведение опытов в эксперименте.

Ключевые слова: техническая система; планирование эксперимента; оптимизация; эффективность.

Современный период развития техники, в особенности высоконадежных технических систем (летательные аппараты, газотурбинные двигатели, энергетические установки и др.), характеризуется высокими требованиями к ее надежности, сжатыми сроками создания и внедрения в эксплуатацию. В комплексе разнообразных задач, которые приходится решать при создании, производстве и эксплуатации технических систем, велика роль экспериментальных исследований как систем в целом, так и их отдельных систем модулей, узлов, агрегатов и элементов [1, 2].

Несмотря на постоянное развитие теории и методов различных видов расчета изделий и их узлов (газодинамического, прочностного), а также применение все более сложных математических моделей, использование возможностей современных ЭВМ и программных продуктов, объем испытаний, требующихся при создании высоконадежных изделий, не только не уменьшается, но в некоторых случаях возрастает. Это, в первую очередь, связано с повышением требований к удельным и весовым параметрам изделия, диапазону эксплуатационных условий, надежности и ресурсу. Даже самые совершенные математические модели не позволяют в полном объеме учитывать взаимодействие элементов, влияние вторичных факторов, неравномерность и нестационарность потоков, тепловое состояние элементов конструкции и т. д. В расчетные формулы входит множество эмпирических коэффициентов и поправок, требующих экспериментальной проверки, поскольку реально получаемые параметры всегда отличаются от расчетных [1, 3].

Экспериментальные исследования таких систем, как авиационные ГТД, часто проводятся на стендах и установках, представляющих собой сложные сооружения, оснащенные комплексом энергетического оборудования, топливопитания, газовоздушными коммуникациями, системами управления, контроля и измерений. Особо сложными и дорогими являются испытания систем с имитацией реальных эксплуатационных нагружений [1–3].

Поэтому актуальным является решение задачи по уменьшению затрат на эксплуатацию дорогостоящего испытательного оборудования, в частности, за счет внедрения в практику исследования методов математического планирования эксперимента [1–3].

Планирование является важнейшим этапом проведения экспериментального исследования. В результате планирования необходимо получить ответ на вопрос: что, когда и как делать? Планирование заключается в составлении программы действий в пространстве и во времени, характерно для всех целенаправленных действий и связано по существу с предварительным принятием решений. При этом теоретической основой выбора условий проведения самого экспериментального исследования является теория планирования эксперимента [1–7].

Одним из основных положений теории планированного эксперимента является концепция многофакторного эксперимента, а одной из центральных задач экспериментального исследования является построение с помощью полученных экспериментальных данных математических моделей, т.е. задача идентификации.

Применение методов теории планирования эксперимента позволяет получать значительные преимущества в плане сокращения длительности испытаний и затрачиваемых средств, позволяя представлять экспериментальный материал в виде аналитических зависимостей, выбирать оптимальные решения, осуществлять более глубокий анализ полученного материала, давать более определенные и точные рекомендации и выводы.

Как и любая наука, теория планирования эксперимента развивается [1].

В процессе экспериментального исследования статистические данные, необходимые для оценки неизвестных констант модели исследуемого объекта, набираются по определенной программе, задаваемой планом эксперимента.

Для величины «y» (именуемой как выходной параметр исследуемого объекта, зависимая переменная или отклик), зависящей от вектора независимых факторов $x = (x_1, x_{2, \ldots,} x_n)$, регрессионная модель записывается в виде:

$$y(\theta, x) = \theta' f(x)\,, \tag{1}$$

а планом эксперимента $\varepsilon(x)$ называется множество всех точек проведения эксперимента:

$$x^i = (x_1^i,\ x_2^i,\ \ldots,\ x_n^i), \qquad i = \overline{1, N}, \tag{2}$$

представленное с помощью матрицы плана:

$$\varepsilon(X) = (x_j^i) = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^N & x_2^N & \cdots & x_n^N \end{bmatrix}, \tag{3}$$

которая, например, для регрессионной модели вида $y(\theta, x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2$ и области планирования G_X, определяемой неравенствами $(-1 \le x_1 \le 1)$ $и$ $(-1 \le x_2 \le 1)$, имеет вид:

$$\varepsilon(X) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix}.$$

Свойства плана эксперимента определяются его информационной матрицей:

$$M = F^T F\,, \text{ где } F = \begin{bmatrix} f_0(x_1) \ldots f_k(x_1) \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ f_0(x_N) \ldots f_k(x_N) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Показатели эффективности планирования эксперимента делятся на два класса: функциональные и экономические [2, 6, 8].

Функциональными показателями являются дисперсия оценки, характеризующая точность оценки выходного параметра «y» исследуемого объекта (процесса) и точность оценок констант регрессионной модели (1).

Экономические показатели характеризуют, с одной стороны, затраты, необходимые для придания исследуемому объекту требуемых качеств, а с другой – экономический эффект от ее применения.

В свою очередь, функциональные показатели эффективности планирования эксперимента делятся на 2 группы (рис. 1):

- показатели и критерии, связанные с точностью оценки констант регрессионной модели;
- показатели и критерии, связанные с точностью оценки выходного параметра модели (ошибкой оценки поверхности отклика).

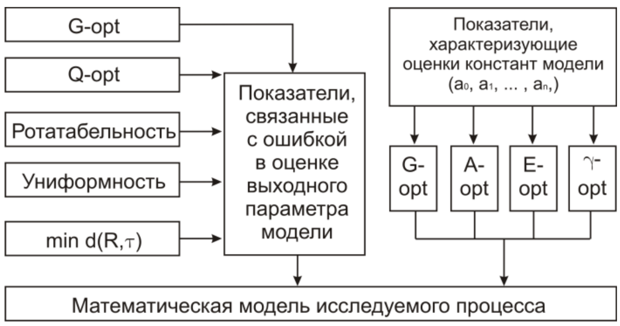

Рис. 1. Функциональные показатели эффективности плана эксперимента

Первую группу образуют показатели *D-, A-, E*-оптимальности ($П_A$, $П_D$, $П_E$) и ортогональность плана ($П_\gamma$).

Структурная схема связи показателей эффективности плана эксперимента приведена на рис. 2, а алгебраическая и статистическая интерпретация критериев оптимальности, показывающих, к какому экстремуму (минимуму или максимуму) должно стремиться значение показателя эффективности – в табл. 1.

Вторую группу образуют показатели *G*- и *Q*-оптимальности ($П_G$, $П_Q$), ротатабельности ($П_{рот}$), униформности ($П_{ун}$) и максимума точности оценки координат экстремума ($П_d$) выходного параметра модели.

Все критерии требуют минимизации отклонения оценки регрессионной функции от истинной и предъявляют определенные требования к виду информационной матрицы M, не зависящей от вектора наблюдений, поэтому свойства матрицы могут быть исследованы до проведения эксперимента (т. е. возможен выбор плана, удовлетворяющего определенным требованиям, до начала проведения эксперимента).

Комплексная оптимизация плана эксперимента (ПЭ) проводится с учетом показателей, характеризующих его функциональное и экономическое качество (рис. 3):

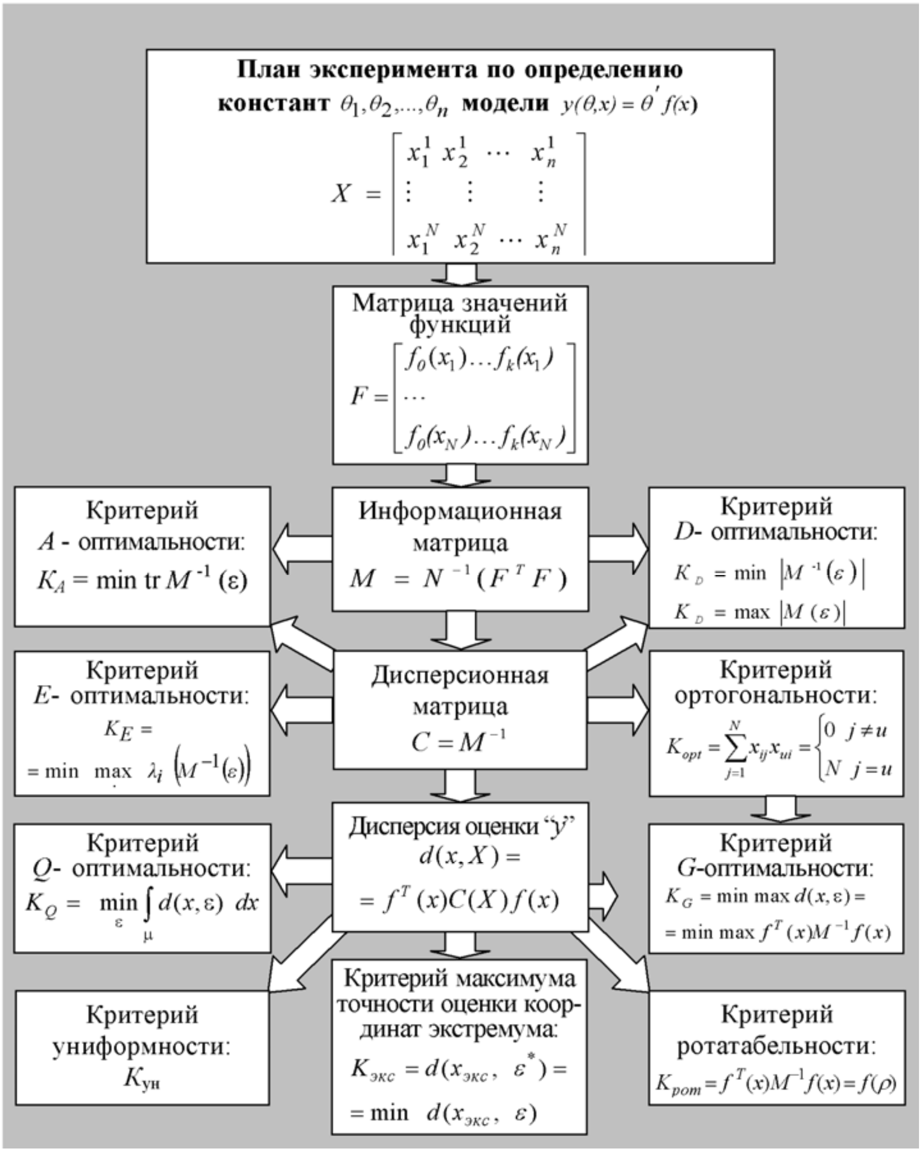

Рис. 2. Структурная схема связи критериев оптимальности плана:
tr M – *след матрицы* M; $\lambda(M)$ – *собственное число* M; $d(x, \varepsilon)$ – *дисперсия выходного параметра модели в точке* x – *для плана эксперимента* ε; $f(x)$ – *функция входных независимых параметров* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- показатель $П_T$ характеризует точность регрессионной модели, описывающей исследуемый объект (процесс);
- показатель $П_N$ характеризует объем эксперимента (количество опытов в ПЭ);
- показатель $П_C$ характеризует стоимость затрат на проведение эксперимента;
- показатель $П_\tau$ характеризует длительность проведения эксперимента.

Это означает, что целью является выбор плана, обеспечивающего достижимое значение эффективности проводимого исследования одновременно по всем основным критериям эффективности: точности моделирования исследуемого объекта K_T, объема эксперимента K_N, а также материальных K_C и временных K_τ затрат на исследование.

Комплексная оптимизация плана эксперимента включает последовательное выполнение следующих этапов (рис. 4):

- этап 1, на котором проводится формирование исходных данных;
- этап 2, на котором формируется множество Парето-оптимальных планов эксперимента;
- этап 3, на котором проводится выбор окончательного плана эксперимента и его практическая реализация.

Таблица 1

Критерий оптимальности	Интерпретация	
	алгебраическая	статистическая
1. Критерии, характеризующие точность оценки констант модели $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_к$		
D-оптимальность	Минимум определителя ковариационной матрицы $\left\|M^{-1}(\varepsilon)\right\|$ или максимум определителя информационной матрицы $\left\|M(\varepsilon)\right\|$	Минимум обобщенной дисперсии всех оценок константмодели
A-оптимальность	Минимум следа ковариационной матрицы: $K_A = \min \operatorname{tr} M^{-1}(\varepsilon)$	Минимальная средняя дисперсия оценок констант модели
E-оптимальность	Минимакс собственного значения ковариационной матрицы: $K_E = \min\limits_{\varepsilon} \max\limits_{i} \lambda_i \left(M^{-1}(\varepsilon)\right)$	Оценки не могут иметь слишком большие дисперсию и ковариацию
Ортогональность	Диагональность ковариационной матрицы: $K_{opt} = \sum_{j=1}^{N} x_{ij} x_{ui} = \begin{cases} 0 & j \neq u \\ N & j = u \end{cases}$	Оценки констант модели независимы друг от друга
2. Критерии, характеризующие ошибку оценки выходного параметра модели		
G-оптимальность	Минимум максимальной дисперсии оценки выходного параметра модели: $K_G = \min \max d(x,\varepsilon)$	Минимум дисперсии оценки выходного параметра модели
Q-оптимальность	Минимум средней дисперсии выходного параметра: $K_Q = \min\limits_{\varepsilon} \int_{\mu} d(x,\varepsilon)\, dx$	Минимум средней дисперсии выходного параметра модели
Ротатабельность	Постоянство дисперсии оценки выходного параметра в точках, равноудаленных от центра плана: $K_{\text{рот}} = d(x,\varepsilon) = \text{const};\ \rho = f(x) = \text{const}$	Равенство дисперсий параметра модели на равных расстояниях от центра плана
Униформность	$K_{\text{УН}} = d(x,\varepsilon) = \text{const}$ при $x \in G_x$	Равенство дисперсий выходного параметра модели вокруг центра эксперимента
$K_{\text{ЭКС}}$ – точность оценки экстремума	$K_{\text{ЭКС}} = \min d(x_{\text{ЭКС}},\varepsilon)$, где $x_{\text{ЭКС}}$ – координаты экстремума	Минимальная дисперсия оценки выходного параметра в точке экстремума

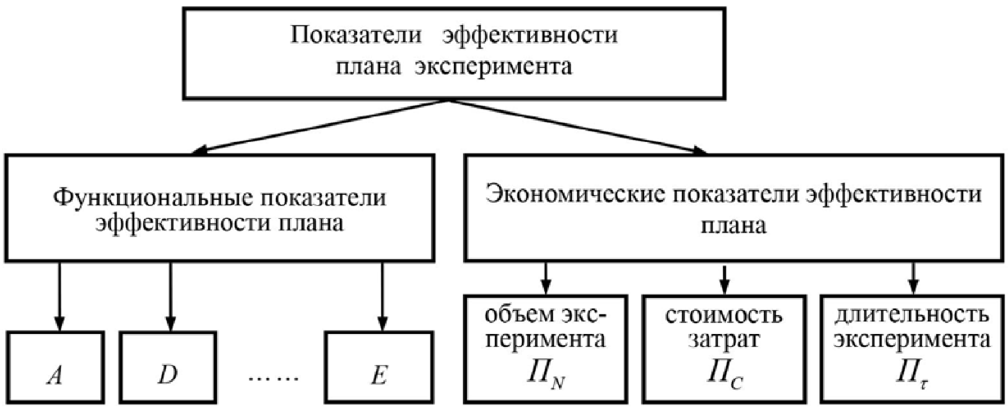

Рис. 3. Структура основных показателей эффективности плана эксперимента

Рис. 4. Последовательность комплексной оптимизации плана эксперимента:
$C_{пр}$, $\tau_{пр}$ – ограничения на материальные и временные затраты;
$N_{пр}$ – ограничение на количество опытов или выделяемых на эксперимент образцов изделия

Этап 1 включает в себя:

- обоснование множества показателей и критериев эффективности плана, являющихся основными для проводимого исследования (5);
- выбор вида модели, описывающей исследуемую характеристику объекта;
- определение области реализации выбранных показателей эффективности ПЭ;
- формирование области реализации эксперимента.

Область реализации показателей эффективности формируется с учетом ограничений на материальные и временные затраты на эксперимент, включая ограничение на количество опытов в плане или ограничение на количество образцов изделия, выделяемых на исследование.

Этап 2 предназначен для формирования области оптимальных компромиссных решений, получаемых оптимизацией плана с учетом показателей, выбранных на первом этапе [2]. При многофакторном многокритериальном планировании отсутствие единственного оптимального решения обусловлено противоречивостью критериев эффективности ПЭ.

Применение изложенной последовательности многокритериального планирования эксперимента было апробировано при исследовании характеристик авиационных газотурбинных двигателей (решались задачи построения высотно-скоростной характеристики летательного аппарата, а также характеристик компрессора и камеры сгорания двигателя), задача построения ПЭ для формирования регрессионных моделей статической и циклической прочности лопаток турбин [1–3, 6].

Опыт проведения экспериментальных исследований показал, что эффективность экспериментального исследования зависит также от последовательности реализации опытов плана, т.е. в данном случае можно решать задачу оптимизации плана эксперимента ε (x, ξ, N) из условия минимизации временных K_τ и материальных $K_{зат}$ затрат на подготовку к проведению опытов ПЭ:

$$K_\tau = \min \sum_{i,j} \Delta\tau_{ij};\ K_{зат} = \min \sum_{i,j} \Delta c_{ij}. \qquad (5)$$

При этом число опытов и уровни независимых факторов x_1, x_2, …, x_m, определенные по методике многокритериального планирования, сохраняются неизменными (табл. 2).

$$\Delta\tau_{ij} = [\Delta\tau_{01}, \Delta\tau_{12}, \, ... \, , \Delta\tau_{(N-1)N}];$$
$$\Delta c_{ij} = [\Delta c_{01}, \Delta c_{12}, \, ... \, , \Delta c_{(N-1)N}], \qquad (6)$$

где $\Delta\tau_{ij}$ и Δc_{ij} – временные и материальные затраты на подготовку изделия к проведению опытов при переходе от i-го к j-му опыту плана (индекс «ij», соответствующий, например, «01» означает затраты на подготовку к первому опыту плана эксперимента, «12» – затраты на подготовку к проведению опыта 2 при переходе от опыта 1 и т. д.).

Таблица 2

№ опыта	Кодированные значения независимых факторов				Отклик Y
	x_1	x_2	…	x_m	
1	x_{11}	x_{21}	…	x_{1m}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	…	x_{2m}	y_2
…	…	…	…	…	…
N	x_{1N}	x_{2N}	…	x_{Nm}	y_N

В данном случае вместо матрицы ПЭ, приведенной в табл. 2, рассматривается матрица планирования, приведенная в табл. 3.

Критериями эффективности плана эксперимента в данном случае является минимизация показателей суммарных (общих) временных $T_{\text{под.}\Sigma}$ и материальных $C_{\text{под.}\Sigma}$ затрат на подготовку к проведению опытов ПЭ:

$$\begin{cases} \text{K}_{\tau} = \min T_{под.\Sigma} = \min \sum\limits_{i=0}^{N-1} \Delta\tau_{ij}; \quad (i \neq j); \\ \text{K}_{\text{зат}} = \min C_{под.\Sigma} = \min \sum\limits_{i=0}^{N-1} \Delta c_{ij}; \ (i \neq j); \\ \varepsilon(\text{x}) = \varepsilon_{opt}; \quad N = N_{opt}; \quad x \in G_x. \end{cases} \qquad (7)$$

Варьируемым параметром в данном случае является последовательность реализации опытов в плане эксперимента. При этом возможны несколько вариантов оценки временных затрат на подготовку к проведению опытов плана эксперимента.

1. В процессе проведения экспериментального исследования возможна одновременная (параллельная) подготовка к проведению опытов плана, обусловленных независимыми факторами x_1, x_2, …, x_n с длительностью $\Delta\tau_1$, $\Delta\tau_2$, ..., $\Delta\tau_n$. В данном случае общее время подготовки к проведению опытов плана определится по формуле:

$$T_{под.\Sigma} = \max_i (\Delta\tau_1, \, \Delta\tau_2, \, ..., \, \Delta\tau_n); \quad i = \overline{1,n}. \qquad (8)$$

2. Возможна одновременная (параллельная) подготовка к проведению опытов только отдельной группы независимых факторов $\overline{(1,n)}$, а для другой группы $\overline{(n+1, n+k)}$ – последовательный вариант подготовки, но при этом сами группы реализуются одновременно, отсюда:

$$T_{под.\Sigma} = \max \begin{Bmatrix} \left[\max\limits_i (\Delta\tau_1, \, \Delta\tau_2, \, ..., \, \Delta\tau_n) \right] \\ \left[\sum\limits_{j=n+1}^{n+k} \Delta\tau_j \right] \end{Bmatrix}. \qquad (9)$$

Таблица 3

№ опыта	Кодированные значения независимых факторов				Отклик Y	Затраты на подготовку к проведению опыта	
	x_1	x_2	…	x_m		длительность	стоимость
1	–	–	–	–	–	$\Delta\tau_{01}$	Δc_{01}
	x_{11}	x_{21}	…	x_{22}	y_1	–	–
2	–	–	–	–	–	$\Delta\tau_{12}$	Δc_{12}
	x_{12}	x_{22}	…	x_{N2}	y_2	–	–
…	…	…	…	…	…	…	…
N	–	–	–	–	–	$\Delta\tau_{(N-1)N}$	$\Delta c_{(N-1)N}$
	x_{1N}	x_{2N}	…	x_{Nm}	y_N	–	–
Всего						$T_{под.\Sigma}$	$C_{под.\Sigma}$

3. Возможен вариант, когда группы реализуются последовательно, тогда:

$$T_{под.\Sigma} = \left\{ \max\left(\Delta\tau_1,\ ...,\ \Delta\tau_n\right) + \left[\sum_{j=n+1}^{n+k} \Delta\tau_j \right] \right\}. \quad (10)$$

Если при этом в первой группе подготовка к проведению опытов плана реализуется последовательно, то:

$$T_{под.\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\tau_i + \sum_{i=n+1}^{n+k} \Delta\tau_i = \sum_{i=1}^{n+k} \Delta\tau_j. \quad (11)$$

4. Процедуры подготовки к проведению опытов плана совместимы, т.е. одновременно несколько групп факторов готовятся к проведению опыта, а подготовка самих μ-групп реализуются последовательно, то

$$T_{под.\Sigma} = \max \left\{ \begin{array}{l} \left[\max\limits_{i}(\Delta\tau_1,\ \Delta\tau_2,\ ...,\ \Delta\tau_n) \right]_1 + \\ ... + \left[\max\limits_{j}(\Delta\tau_{n+1},\ ...,\ \Delta\tau_{n+k}) \right]_\mu \end{array} \right\}, \quad (12)$$

где μ – число групп независимых факторов, реализуемых последовательно.

Поскольку в задаче (7) имеются два оптимизируемых показателя эффективности плана эксперимента, то возможны несколько вариантов постановки и решения задачи выбора последовательности реализации опытов плана.

Вариант 1. Показатель эффективности $T_{под\cdot\Sigma}$ выбирается в качестве основного (оптимизируемого), а показатель $C_{под.\Sigma}$ рассматривается в качестве ограничения:

$$\begin{cases} K_\tau = \min T_{под.\Sigma} = \min \sum\limits_{i=0}^{N-1} \Delta\tau_{ij}; \quad (i \neq j); \\ C_{под.\Sigma} = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \Delta c_{ij} \le C^*_{под.\Sigma}; \\ \varepsilon(x,\xi,N) = \varepsilon_{opt}; \quad N = N_{opt}; \quad x \in G_x, \end{cases} \quad (13)$$

где $C^*_{под.\Sigma}$ – предельное значение показателя $C_{под.\Sigma}$, т. е. ограничение по объему материальных ресурсов, выделяемых на подготовку к проведению опытов плана эксперимента.

Вариант 2. Показатель эффективности $C_{под.\Sigma}$ выбирается в качестве основного (оптимизируемого), а показатель $T_{под\cdot\Sigma}$ рассматривается в качестве ограничения:

$$\begin{cases} K_{зат} = \min C_{под.\Sigma} = \min \sum\limits_{i=0}^{N-1} \Delta c_{ij}; \ (i \neq j); \\ T_{под.\Sigma} = \sum\limits_{i=0}^{N-1} \Delta\tau_{ij} \le T^*_{под.\Sigma} \quad ; \\ \varepsilon(x,\xi,N) = \varepsilon_{opt};\ N = N_{opt}; x \in G_x, \end{cases} \quad (14)$$

где $T^*_{под.\Sigma}$ – предельное значение длительности подготовки к проведению опытов плана эксперимента.

Вариант 3. Задача (16) решается методом Парето с учетом двух оптимизируемых показателей эффективности: $T_{под.\Sigma}$ и $C_{под.\Sigma}$. Область Парето-оптимальных решений формируется многократной оптимизацией рассматриваемых показателей по целевой функции вида:

$$\Phi = \min\left(\alpha \cdot T^{норм.}_{под.\tau} + \beta \cdot C^{норм.}_{под.\Sigma}\right); \quad \alpha + \beta = 1, \quad (15)$$

где $T^{норм.}_{под.\tau}$ и $C^{норм.}_{под.\Sigma}$ – нормированные значения показателей $T_{под.\tau}$ и $C_{под.\Sigma}$, позволяющие оценивать значения показателей в единой шкале измерений, например, когда значения $T^{норм.}_{под.\tau}$ и $C^{норм.}_{под.\Sigma}$ варьируются в интервале 0…1 и т. д.

Задаваясь различными значениями α и β при условии $(\alpha+\beta=1)$, решается задача (16), тем самым формируется область Парето, из которой разработчик плана эксперимента выбирает окончательный вариант, исходя из каких-либо дополнительных требований, например, получения максимально возможной точности регрессионной модели, формируемой по результатам эксперимента и т. д.

Частным случаем решения задачи в постановке (7) является метод минимизации длительности подготовительных операций к проведению опытов плана эксперимента, рассмотренный авторами в [9] и апробированный на примере планирования эксперимента при исследовании процесса измерения площади металлизации печатных плат (в данном случае решалась задача в постановке (13)).

В процессе исследования авторами были получены адекватные математические модели, описывающие зависимости измеряемого выходного напряжения U элемента и погрешности измерения ΔU от температуры электролита $T(x_1)$, сопротивления нагрузки $R_H(x_2)$ и кислотности электролита $pH(x_3)$:

$$U = f(x_1, x_2, x_3) = f(T, R, pH). \quad (16)$$

Промежутки времени на подготовительные операции, связанные с переводом независимых факторов с уровня «–1» на «+1» и с уровня «+1» на «–1», а также промежутки времени, связанные с переводом значений факторов с уровня «0» в «+1» и с уровня «0» в «–1», приведены в табл. 4. Оптимальный по временным затратам на подготовительные операции ПЭ приведен в табл. 5.

Таблица 4

Фактор	Время, затрачиваемое на переход от i-го опыта плана эксперимента к $(i+1)$-му опыту, усл. ед. времени			
	с «–1» на «+1»	с «+1» на «–1»	с «0» на «+1»	с «0» на «–1»
X_1	4,9	3,3	4,0	3,0
X_2	0,6	0,6	0,3	0,8
X_3	9,5	9,7	1,8	6,2

Время реализации эксперимента по этому плану составляет 25,3 условных единиц времени, время реализации исходного плана равно 30,5 условных единиц времени (табл. 6), а максимальное – 48,5 условных единиц времени.

Таким образом, рассматриваемый подход к выбору ПЭ позволил уменьшить временные затраты в 1,2 раза по сравнению с исходным ПЭ и в 1,9 раз, по сравнению с ПЭ, реализация ко-

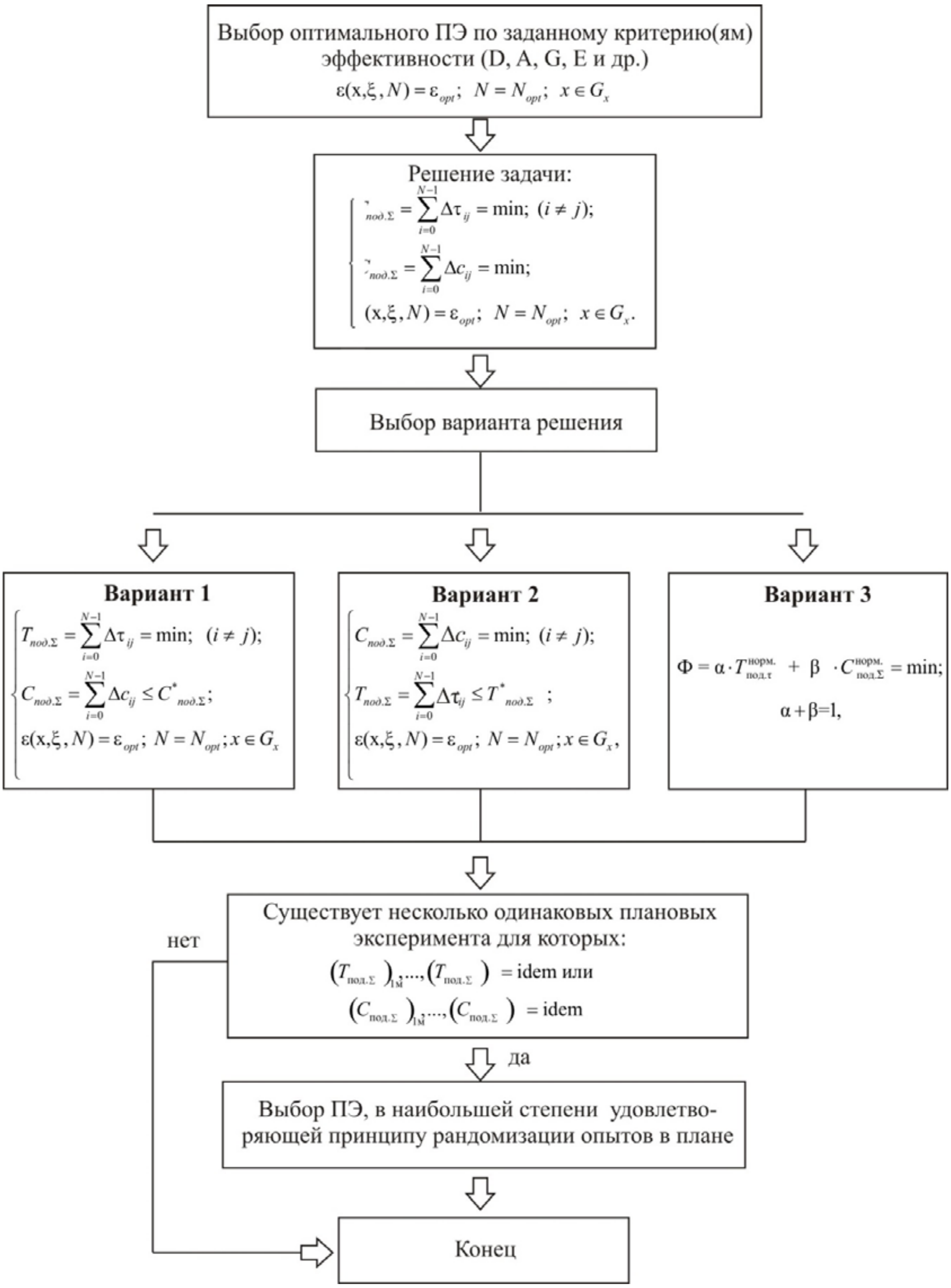

Рис. 5. Структурная схема выбора оптимального ПЭ с учетом временных и материальных затрат на подготовку к проведению опытов плана

торого требует максимального времени на подготовительные операции для реализации опытов плана (48,5 усл. ед. времени).

Необходимо отметить, что рассматриваемый способ выбора опытов ПЭ не предусматривает проведения их рандомизации, т.е. случайного порядка реализации опытов в эксперименте (используется для исключения влияния систематических ошибок, вызванных внешними условиями [2, 4, 5]). Поэтому в данном случае, в зависимости от особенностей проводимого исследования, можно предложить один из следующих способов оптимизации ПЭ:

- если при выборе оптимального ПЭ существует несколько планов, для которых временные или материальные затраты одинаковы:

$$(T_{под\Sigma})_1, \; \ldots \; ,(T_{под\Sigma})_м = \text{const};$$
$$(C_{под\Sigma})_1, \; \ldots \; ,(C_{под\Sigma})_м = \text{const}, \qquad (17)$$

то окончательный выбор последовательности реализации опытов в плане эксперимент можно проводить их рандомизацией, т. е. выбирать план, у которого последовательность проведения опытов в наибольшей степени соответствует принципу случайного выбора (реализуется, как правило, с применением датчика случайных чисел). Структурная схема выбора оптимального рандомизированного ПЭ с учетом временных и материальных затрат на подготовку к проведению опытов плана приведена на рис. 5;

- выбор оптимального ПЭ проводят при варьировании спектром плана, проводя рандомизацию опытов на каждом шаге итераций, предусмотренных численным методом, используемым для поиска оптимального плана.

Возможна оптимизация ПЭ и в более общей постановке, когда рассматриваются не только временные и материальные затраты на подготовку к проведению опытов плана, а также затраты на само проведение опытов. В этом случае определяются общие затраты на подготовку и проведение опытов ПЭ по формулам (табл. 7):

$$T_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \Delta\tau_{под.ij} + \sum_{i=1}^{N} \Delta\tau_{пр.ij};$$
$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \Delta c_{под.ij} + \sum_{i=1}^{N} \Delta c_{пр.ij}; \; i \neq j. \qquad (18)$$

Таблица 5

Исходный ПЭ				Оптимальный ПЭ			
Номер опыта	Обозначение факторов			Номер опыта	Обозначение факторов		
	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
1	+1	–1	–1	3	–1	–1	+1
2	–1	+1	–1	4	+1	+1	+1
3	–1	–1	+1	1	+1	–1	–1
4	+1	+1	+1	2	–1	+1	–1
$T_{под.\Sigma} = 30{,}5$ усл. ед. времени				$T_{под.\Sigma} = 25{,}3$ усл. ед. времени			

Таблица 6

Исходный план				Оптимальный план			
Номер опыта	Длительности подготовки к установке значений факторов			Номер опыта	Длительность подготовки к установке значений факторов		
	X_1	X_2	X_3		X_1	X_2	X_3
1	4,0	0,8	6,2	3	3,0	0,8	1,8
2	3,3	0,6	0	4	4,9	0,6	0
3	0	0,6	9,5	1	0	0,6	9,7
4	4,9	0,6	0	2	3,3	0,6	0
$\Delta\tau_\Sigma \; (x_i)$	12,2	2,6	15,7	$\Delta\tau_\Sigma \; (x_i)$	11,2	2,6	11,5
$T_{под\Sigma} = 30{,}5$ усл. ед. времени				$T_{под\Sigma} = 25{,}3$ усл. ед. времени			

Таблица 7

№ опыта	Кодированные значения факторов				Отклик Y	Затраты на подготовку к проведению опыта		Затраты на проведение опыта	
	x_1	x_2	…	x_N		длительность	стоимость	длительность	стоимость
1	– x_{11}	– x_{21}	– …	– x_{22}	– y_1	$\Delta\tau_{01}$ –	Δc_{01} –	– τ_1	– c_1
2	– x_{12}	– x_{22}	– …	– x_{N2}	– y_2	$\Delta\tau_{12}$ –	Δc_{12} –	– τ_2	– c_2
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
N	– x_{1N}	– x_{2N}	– …	– x_{Nm}	– y_N	$\Delta\tau_{(N-1)N}$ –	$\Delta c_{(N-1)N}$ –	– τ_N	– c_N
Всего						$T_{под.\Sigma}$	$C_{под.\Sigma}$	$T_{пр.\Sigma}$	$C_{пр.\Sigma}$

Или с учетом μ повторных опытов:

$$T_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \Delta\tau_{под.ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{P} \Delta\tau_{пр.ij};$$
$$C_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \Delta c_{под.ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{P} \Delta c_{пр.ij}; \quad i \neq j. \tag{19}$$

При этом, естественно, необходимо учитывать, что затраты на проведение эксперимента зависят от спектра самого плана, т. е.

$$\Delta\tau_{под.ij};\ \Delta c_{под.ij} = f\left[\varepsilon(x, \xi, N)\right]. \tag{20}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гишваров А. С.** Повышение эффективности многокритериального планирования многофакторного эксперимента. М.: Машиностроение, 2014. 215 с. [[A. S. Gishvarov, *Improving the efficiency of multi-criteria planning multifactor experiment*. Moscow: Mashinostroenie, 2014.]]

2. **Гишваров А. С.** Многофакторное планирование эксперимента при исследовании технических систем. Уфа: Гилем, 2006. 236 с. [[A. S. Gishvarov, *Multi-factorial design of experiments in the study of technical systems*. Ufa: Gilem, 2006.]]

3. **Гишваров А. С.** Исследование технических систем на основе интегрального планирования эксперимента. Уфа: Бизнес-партнер, 2008. 177 с. [[A. S. Gishvarov, *Study of the technical systems on the basis of the integral design of experiments*. Ufa: Biznes-partner, 2008.]]

4. **Федоров В. В.** Теория оптимального эксперимента. М.: Машиностроение, 1979. 184 с. [[V. V. Fedorov, *Theory of optimal experiment*. Moscow: Mashinostroenie, 1979.]]

5. **Хикс Ч.** Основные принципы планирования эксперимента. М.: Мир, 1977. 406 с. [[Ch. Hiks, *The basic principles of experimental design.* Moscow: Mir, 1977.]]

6. **Гишваров А. С.** Комплексная оптимизация планов экспериментального исследования характеристик авиационных ГТД // Изв. вузов. Авиационная техника. 2006. № 1. С. 22–25. [[A. S. Gishvarov, “Complex optimization plans experimental study characteristics GTE”, (in Russian), in *News of Higher Schools*, no. 1, 22-25, 2011.]]

7. **Ермаков С. М., Бродский В. З., Жиглявский А. А.** Математическая теория планирования эксперимента. М.: Наука, 1983. 318 с. [[S. M. Ermakov. V. Z. Brodskij, A. A. Zhigljavskij, *The mathematical theory of experiment planning*. Moscow: Nauka, 1983.]]

8. **Городецкий В. И., Дмитриев А. К., Марков В. М., Юсупов Р. М.** Элементы теории испытаний и контроля технических систем. Л.: Энергия, 1978. 192 с. [[V. I. Gorodeckij, A. K. Dmitriev, V. M. Markov, R. M. Jusupov, *Elements of the theory test and control of engineering systems*. Leningrad: Jenergija, 1978.]]

9. **Кошевой Н. Д., Костенко Е. М.** Оптимальное планирование эксперимента для исследования динамических объектов // Сб. тр. Киевского нац. ун-та им. Т. Шевченко. Киев, 2009. № 20. С. 52–57. [[N. D. Koshevoj, E. M. Kostenko, “Optimal design of experiments for the study of dynamic objects”, (in Russian), in *Taras Shevchenko national university of Kyiv*, no. 20, pp. 52-57, 2009.]]

ОБ АВТОРАХ

ГИШВАРОВ Анас Саидович, проф., зав. каф. авиац. двиг. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по тепл. двиг. ЛА (УГАТУ, 1993). Теор. и эксп. иссл. в обл. надежности, ресурса и испытаний технических систем.

АГЕЕВ Георгий Константинович, доц. каф. авиац. двиг. Дипл. инж.-мех. по авиац. двиг. (УГАТУ, 2006). Канд. техн. наук по тепл. и э/ракетн. двиг. ЛА (УГАТУ, 2012). Иссл. в обл. эксп. моделир. и оптимиз. техн. систем.

METADATA

Title: Methodology of comprehensive plan optimization experiment in technical systems.

Authors: A. S. Gishvarov[1], G. K. Ageev[2].

Affiliation:
Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: [1,2]ad@mail.rb.ru.

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU, vol. 19, no. 2 (68), pp. 46-55, 2015. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: The technique of complex optimization plans experiment in technical systems, which in contrast to the existing methods allows to obtain an additional effect by minimizing the time and cost of preparing and carrying out experiments in the experiment.

Key words: technical system; design of experiments; methods; optimization; efficiency.

About authors:

GISHVAROV, Anas Saidovich, Prof., Dept. of Aircraft Engines. Dipl. engineer (USATU, 1973). Dr. of Tech. Sci. (USATU, 1993).

AGEEV, Georgiy Konstantinovich, Dipl. engineer of aircraft engines (USATU, 2006), Cand. of Tech. Sci. (UGATU, 2012).