Уфа : УГАТУ, 2012 Вестник УГАТУ Т. 16, № 6 (51). С. 74–85

УДК 519.216

А. И. Заико

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И АЛГОРИТМЫ ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

Приведены известные и оригинальные определения характеристик случайных процессов, а также алгоритмы и вероятностные характеристики погрешностей их измерений. *Эргодические случайные процессы*; *определения*; *алгоритмы измерения*; *характеристики погрешностей*

ВВЕДЕНИЕ

Эргодическое свойство стационарных случайных процессов позволяет находить их вероятностные характеристики по одной реализации $x(t)$ осреднением по времени t, что существенно упрощает эксперимент [1, 2]. Однако практически это свойство используется только для нахождения математического ожидания m_x, дисперсии D_x и автокорреляционных $R_x(\tau)$ или взаимных корреляционных $R_{xy}(\tau)$ функций, где τ – сдвиг во времени между, соответственно, двумя сечениями $x(t)$ и $x(t+\tau)$ реализации процесса, а также реализациями $x(t)$ и $y(t+\tau)$ совместно эргодических процессов. Распределения вероятностей, плотностей вероятностей и их характеристические функции по реализациям процессов до настоящего времени не находили.

В статье обобщаются известные и введенные автором определения этих характеристик, приводятся алгоритмы для их измерения и даются математические ожидания и корреляционные функции погрешностей алгоритмов измерения с применением комплексного подхода к их определению [2, 3].

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

Одномерное распределение вероятности $W_1[X]$ выражается через одномерную плотность распределения вероятности $w_1[X]$, и определено выражением [2, 4]

$$W_1[X]=\int_{-\infty}^{X} w_1[Z]dZ=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1[X-x(t)]dt, \quad (1)$$

где $1[X-x(t)]=\begin{cases}0, & X<x(t);\\ 1, & X>x(t)\end{cases}$ – единичная функция [5]; $2T$ – длительность реализации $x(t)$.

Аналогично определяется двумерное распределение вероятности $W_2[X_1;\ X_2,\ \tau]$ через соответствующую плотность распределения вероятности $w_2[X_1;\ X_2,\ \tau]$ в виде [2, 4]

$$\begin{aligned}W_2[X_1;X_2,\tau]&=\int_{-\infty}^{X_1}\int_{-\infty}^{X_2} w_2[Z_1;Z_2,\tau]dZ_1dZ_2=\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1[X_1-x(t)]1[X_2-x(t+\tau)]dt.\end{aligned} \quad (2)$$

Наконец n-мерное распределение вероятности $W_n[X_1;\ X_2,\ \tau_{12};\ldots;\ X_n,\ \tau_{1n}]$ определяется следующим образом [2, 4]

$$\begin{aligned}&W_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]=\\&=\int_{-\infty}^{X_1}...\int_{-\infty}^{X_n} w_n[Z_1;Z_2,\tau_{12};...;Z_n,\tau_{1n}]dZ_1...dZ_n=\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1[X_1-x(t)]1[X_2-x(t+\tau_{12})]..1[X_n-x(t+\tau_{1n})]dt,\end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau_{1i}=t_i-t_1$ – временной сдвиг между первым и i-м сечениями процесса, $i=2, 3,\ldots,n$.

Двумерное взаимное распределение вероятности $W_2[X;\ Y,\ \tau]$ совместно эргодических процессов с реализациями $x(t)$ и $y(t+\tau)$ выражается через двумерную взаимную плотность распределения вероятности $w_2[X;Y,\tau]$ и введена следующим образом [2, 4]

$$\begin{aligned}W_2[X;Y,\tau]&=\int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y} w_2[Z;H,\tau]dZdH=\\&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}1[X-x(t)]1[Y-y(t+\tau)]dt.\end{aligned} \quad (4)$$

Аналогично определяются взаимные распределения вероятности и большей размерности.

Одномерная плотность вероятности $w_1[X]$ находится из определения (1) и равна [2, 4]

Контактная информация: 8(347)272-11-62

$$w_1[X]=\frac{dW_1[X]}{dX}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta[X-x(t)]dt, \quad (5)$$

где $\delta[X-x(t)]=\left.\begin{cases}\infty, & X=x(t);\\ 0, & X\neq x(t)\end{cases}\right\}$ – дельта-функция Дирака, которая связана с единичной функцией $1[X-x(t)]$ следующими соотношениями [5]

$$\delta[X-x(t)]=\frac{d1[X-x(t)]}{dX},$$

$$1[X-x(t)]=\int_{-\infty}^{X}\delta[Y-x(t)]dY.$$

Двумерная плотность распределения вероятности $w_2[X_1;\, X_2,\, \tau]$ находится из выражения (2) и равна [2, 4]

$$w_2[X_1;X_2,\tau]=\frac{d^2W_2[X_1;X_2,\tau]}{dX_1dX_2}=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta[X_1-x(t)]\,\delta[X_2-x(t+\tau)]dt,$$

а n-мерная плотность распределения вероятности $w_n[X_1;\, X_2,\, \tau_{12};\ldots;\, X_n,\, \tau_{1n}]$ из выражения (3) [2, 4]

$$w_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]=$$
$$=\frac{d^nW_1[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]}{dX_1...dX_n}=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta[X_1-x(t)]\delta[X_2-x(t+\tau_{12})]\cdot\,..\delta[X_n-x(t+\tau_{1n})]dt.$$

Двумерная взаимная плотность распределения вероятности $w_2[X;\, Y,\, \tau]$ совместно эргодических процессов согласно (4) равна [2, 4]

$$w_2[X;Y,\tau]=\frac{d^2W_2[X;Y,\tau]}{dXdY}=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\delta[X-x(t)]\,\delta[Y-y(t+\tau)]dt. \quad (6)$$

Одномерная характеристическая функция $\theta_1[j\nu]$ согласно (5) равна [2, 4]

$$\theta_1[j\nu]=\int_{-\infty}^{\infty}w_1[X]e^{j\nu X}dX=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{j\nu x(t)}dt.$$

Аналогично определяется n-мерная характеристическая функция $\theta_n[j\nu_1;\, j\nu_2,\, \tau_{12};\ldots;\, j\nu_n,\, \tau_{1n}]$ [2, 4]

$$\theta_n[j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};...;j\nu_n,\tau_{1n}]=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}...\int_{-\infty}^{\infty}w_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]\times$$
$$\times e^{j(\nu_1X_1+\nu_2X_2+\cdots+\nu_nX_n)}dX_1...dX_n=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{j[\nu_1x(t)+\nu_2x(t+\tau_{12})+\cdots+\nu_nx(t+\tau_{1n})]}dt.$$

Двумерная взаимная характеристическая функция $\theta_2[j\nu;\, j\eta,\, \tau]$ совместно эргодических процессов вводится аналогично и с учетом (6) равна

$$\theta_2[j\nu;j\eta,\tau]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}w_2[X;Y,\tau]e^{j(\nu X+\eta Y)}dXdY=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}e^{j[\nu x(t)+\eta y(t+\tau)]}dt.$$

Введенные определения распределений и характеристических функций позволяют получить с их помощью известные определения вероятностных характеристик случайных процессов [6, 7]. Так, математическое ожидание

$$m_x=\int_{-\infty}^{\infty}Xw_1[X]dX=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt,$$

дисперсия

$$D_x=\int_{-\infty}^{\infty}(X-m_x)^2w_1[X]dX=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)-m_x]^2dt,$$

корреляционная функция

$$R_x(\tau)=\int\int_{-\infty}^{\infty}(X_1-m_x)(X_2-m_x)w_2[X_1;X_2,\tau]dX_1dX_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)-m_x][x(t+\tau)-m_x]dt,$$

ковариационная функция

$$B_x(\tau)=\int\int_{-\infty}^{\infty}X_1X_2w_2[X_1;X_2,\tau]dX_1dX_2=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)dt,$$

взаимная корреляционная функция двух совместно эргодических процессов

$$R_{xy}(\tau)=\int\int_{-\infty}^{\infty}(X-m_x)(Y-m_y)w_2[X;Y,\tau]dXdY=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)-m_x][y(t+\tau)-m_y]dt,$$

где m_y – математическое ожидание второго процесса, реализация которого $y(t)$, взаимная ковариационная функция двух совместно эргодических процессов

$$B_{xy}(\tau)=\int\int_{-\infty}^{\infty} XYw_2[X;Y,\tau]dXdY=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)dt.$$

Вытекающие из них спектральные характеристики случайного процесса определяются следующим образом: спектральная плотность мощности

$$S_x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} B_x(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}d\tau+m_x^2 2\pi\delta(\omega),$$

взаимная спектральная плотность мощности двух процессов

$$S_{xy}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} B_{xy}(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}d\tau+m_x m_y 2\pi\delta(\omega).$$

АЛГОРИТМЫ ИЗМЕРЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК И ИХ ПОГРЕШНОСТИ

Реальные алгоритмы измерения отличаются от рассмотренных выше определений характеристик случайных процессов конечной длительностью $2T$ и погрешностью измерения реализации $x(t)$. Поэтому результатами измерений являются оценки характеристик <•>, неточность которых характеризуется математическими ожиданиями $m_{\delta\bullet}(\bullet)$ и ковариационными функциями $R_{\delta\bullet}(\bullet)$ их погрешностей. Они по-разному учитываются при аналоговых и цифровых измерениях. Так, при аналоговых измерениях погрешность $\delta(t)=\langle x(t)\rangle - x(t)$, где $\langle x(t)\rangle$ – получаемая в результате измерения оценка реализации $x(t)$. При цифровых измерениях длительность измерения дискретна $2nT_0$, где T_0 – шаг равномерной дискретизации, а $2n$ – количество таких шагов. Погрешность цифровых измерений $\delta(t_i)=x_{il}-x(t_i)$, где x_{il} – цифровой отсчет, i – номер измерения ($i=-n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n$); l – уровень квантования ($l=1,2,\ldots g,\ldots,k,\ldots q,\ldots,r,\ldots$) [2, 3].

Оценка одномерного распределения вероятности

$$\langle W_1[X]\rangle=\int_{-\infty}^{X}\langle w_1[Z]\rangle dZ=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} W_1\left[X\middle|\langle x(t)\rangle\right]dt=$$

$$=\frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0} W_1\left[X\middle|t;x_{-nk},\ldots,x_{nr}\right]dt,$$

а математическое ожидание $m_{\delta W}(X)$ и корреляционная функция $R_{\delta W}(X_1,X_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta W}(X)=\int_{-\infty}^{X} m_{\delta w}(Z)dZ=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{W_1\left[X\middle|\langle x(t)\rangle\right]-W_1[X]\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{W_1\left[X\middle|t;x_{-nk},\ldots,x_{nr}\right]-W_1[X]\right\}dt;$$

$$R_{\delta W}(X_1,X_2)=\int_{-\infty}^{X_1}\int_{-\infty}^{X_2} R_{\delta w}(Z_1,Z_2)dZ_1dZ_2=$$

$$=\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left\{\begin{array}{l}W_2\left[X_1,X_2\middle|\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_2)\rangle\right]-\\ -W_1\left[X_1\middle|\langle x(t_1)\rangle\right]W_1\left[X_2\middle|\langle x(t_2)\rangle\right]\end{array}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{4n^2T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-1}\sum_{u=-n}^{n-1}\int_{i=-n}^{n-1}\int_{u=-n}^{n-1}\left\{W_2\left[X_1,X_2\middle|t_1,t_2;x_{-nk},\ldots,x_{nr}\right]-\right.$$

$$\left.-W_1\left[X_1\middle|t_1;x_{-nk},\ldots,x_{nr}\right]W_1\left[X_2\middle|t_2;x_{-nk},\ldots,x_{nr}\right]\right\}dt,$$

где $W_1[X|\bullet]$ и $W_2[X_1,X_2|\bullet]$ – одномерное и двумерное распределения вероятностей при известной оценке реализации, которая при аналоговых измерениях получается непосредственно, а при цифровых измерениях находится после восстановления ее по дискретным отсчетам $x_{-nk},\ldots,x_{nr}$.

Оценка двумерного распределения вероятности

$$\langle W_2[X_1;X_2,\tau]\rangle=\int_{-\infty}^{X_1}\int_{-\infty}^{X_2}\langle w_2[Z_1;Z_2,\tau]\rangle dZ_1dZ_2=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|} W_2\left[X_1,X_2\middle|\langle x(t)\rangle,\langle x(t+|\tau|)\rangle\right]dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0} W_2\left[X_1,X_2\middle|t,t+|\tau|;x_{-nk},\ldots,x_{nr}\right]dt,$$

где μ – целая часть частного $|\tau|/T_0$; $\mu=1,2,\ldots,2n$.

Математическое ожидание $m_{\delta W}(X_1;\ X_2,\ \tau)$ и корреляционная функция $R_{\delta W}(X_{11};\ X_{21},\ \tau_1;\ X_{12};\ X_{22},\ \tau_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta W}(X_1;X_2,\tau)=\int_{-\infty}^{X_1}\int_{-\infty}^{X_2} m_{\delta w}(Z_1;Z_2,\tau)dZ_1dZ_2=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{W_2\left[X_1,X_2\middle|\langle x(t)\rangle,\langle x(t+|\tau|)\rangle\right]-W_2[X_1;X_2,\tau]\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{array}{r}W_2\left[X_1,X_2\middle|\begin{array}{l}t,t+|\tau|;\\ x_{-nk},.,x_{nr}\end{array}\right]-\\ -W_2[X_1;X_2,\tau]\end{array}\right\}dt;$$

$$R_{\delta W}(X_{11};X_{21},\tau_1;X_{12};X_{22},\tau_2)=$$

$$=\int_{-\infty}^{X_{11}}\int_{-\infty}^{X_{21}}\int_{-\infty}^{X_{12}}\int_{-\infty}^{X_{22}} R_{\delta w}(Z_{11};Z_{21},\tau_1;Z_{12};Z_{22},\tau_2)dZ_{11}dZ_{21}dZ_{12}dZ_{22}=$$

$$
=\frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_1|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_2|}\times
$$

$$
\times\left\{\begin{array}{l}
W_4\left[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\left|\begin{array}{l}\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle,\\ \langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_2|)\rangle\end{array}\right.\right]-\\
-W_2\left[X_{11},X_{21}\left|\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle\right.\right]\times\\
\times W_2\left[X_{12},X_{22}\left|\langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_2|)\rangle\right.\right]
\end{array}\right\}dt_1dt_2=
$$

$$
=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\int\limits_{t_u}^{t_u+T_0}\times
$$

$$
\times\left\{\begin{array}{l}
W_4\left[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\left|\begin{array}{l}t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},\ldots,x_{nr}\end{array}\right.\right]-\\
-W_2\left[X_{11},X_{21}\left|\begin{array}{l}t_1,t_1+|\tau_1|;\\ x_{-nk},\ldots,x_{nr}\end{array}\right.\right]\times\\
\times W_2\left[X_{12},X_{22}\left|\begin{array}{l}t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},\ldots,x_{nr}\end{array}\right.\right]
\end{array}\right\}dt_1dt_2,
$$

где $W_4\left[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\middle|\bullet\right]$ – четырехмерное распределение вероятностей при известной оценке реализации.

Оценка n-мерного распределения вероятности

$$
\langle W_n[X_1;X_2,\tau_{12};.;X_n,\tau_{1n}]\rangle=
$$

$$
=\int\limits_{-\infty}^{X_1}.\int\limits_{-\infty}^{X_n}\langle w_n[Z_1;Z_2,\tau_{12};.;Z_n,\tau_{1n}]\rangle dZ_1.dZ_n=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\times
$$

$$
\times\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}W_n\left[X_1,X_2,\ldots,X_n\left|\begin{array}{l}\langle x(t)\rangle,\\ \langle x(t+|\tau_{12}|)\rangle,\ldots,\\ \langle x(t+|\tau_{1n}|)\rangle\end{array}\right.\right]dt=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\times
$$

$$
\times\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}W_n\left[X_1,X_2,\ldots,X_n\left|\begin{array}{l}t,t+|\tau_{12}|,\ldots,t+|\tau_{1n}|;\\ x_{-nk},\ldots,x_{nr}\end{array}\right.\right]dt,
$$

где $W_n\left[X_1,X_2,\ldots,X_n\middle|\bullet\right]$ – n-мерное условное распределение вероятностей.

Математическое ожидание $m_{\delta W}(X_1;\ X_2,\ \tau_{12};\ldots;\ X_n;\ \tau_{1n})$ и корреляционная функция $R_{\delta W}(X_{11};\ X_{21},\ \tau_{12\cdot1};\ldots;\ X_{n1},\ \tau_{1n\cdot1};\ X_{12};\ X_{22},\ \tau_{12\cdot2};\ldots;\ X_{n2},\ \tau_{1n\cdot2})$ ее погрешности:

$$
m_{\delta W}(X_1;X_2,\tau_{12};\ldots;X_n,\tau_{1n})=
$$

$$
=\int\limits_{-\infty}^{X_1}\ldots\int\limits_{-\infty}^{X_n}m_{\delta w}(Z_1;Z_2,\tau_{12};..;Z_n,\tau_{1n})dZ_1\ldots dZ_n=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\times
$$

$$
\times\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}\left\{\begin{array}{l}W_n\left[X_1,X_2,\ldots,X_n\left|\begin{array}{l}\langle x(t)\rangle,\\ \langle x(t+|\tau_{12}|)\rangle,.\\ ..,\\ \langle x(t+|\tau_{1n}|)\rangle\end{array}\right.\right]-\\ -W_n[X_1;X_2,\tau_{12};\ldots;X_n,\tau_{1n}]\end{array}\right\}dt=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\times
$$

$$
\times\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{array}{l}W_n\left[X_1,X_2,\ldots,X_n\left|\begin{array}{l}t,t+|\tau_{12}|,\ldots,\\ t+|\tau_{1n}|;x_{-nk},\ldots,x_{nr}\end{array}\right.\right]-\\ -W_n[X_1;X_2,\tau_{12};\ldots;X_n,\tau_{1n}]\end{array}\right\}dt;
$$

$$
R_{\delta W}(X_{11};X_{21},\tau_{12\cdot1};.;X_{n1},\tau_{1n\cdot1};X_{12};X_{22},\tau_{12\cdot2};.;X_{n2},\tau_{1n\cdot2})=
$$

$$
=\int\limits_{-\infty}^{X_{11}}.\int\limits_{-\infty}^{X_{n1}}\int\limits_{-\infty}^{X_{12}}.\int\limits_{-\infty}^{X_{n2}}R_{\delta w}\begin{pmatrix}Z_{11};Z_{21},\tau_{12\cdot1};.;Z_{n1},\tau_{1n\cdot1};\\ Z_{12};Z_{22},\tau_{12\cdot2};.;Z_{n2},\tau_{1n\cdot2}\end{pmatrix}=
$$

$$
dZ_{11}.dZ_{n1}dZ_{12}.dZ_{n2}
$$

$$
=\frac{1}{(2T-|\tau_{1n\cdot1}|)(2T-|\tau_{1n\cdot2}|)}\times
$$

$$
\times\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot1}|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot2}|}\left\{W_{2n}\left[X_{11},X_{21},.,X_{n1},X_{12},X_{22},.,X_{n2}\right|\right.
$$

$$
\left|\begin{array}{l}\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_{12\cdot1}|)\rangle,.,\langle x(t_1+|\tau_{1n\cdot1}|)\rangle,\\ \langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_{12\cdot2}|)\rangle,.,\langle x(t_2+|\tau_{1n\cdot2}|)\rangle\end{array}\right]-
$$

$$
-W_n\left[\begin{array}{l}X_{11},X_{21},.,X_{n1}\times\\ \times\left|\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_{12\cdot1}|)\rangle,.,\langle x(t_1+|\tau_{1n\cdot1}|)\rangle\right.\end{array}\right]\times
$$

$$
\left.\times W_n\left[\begin{array}{l}X_{12},X_{22},.,X_{n2}\times\\ \times\left|\langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_{12\cdot2}|)\rangle,.,\langle x(t_2+|\tau_{1n\cdot2}|)\rangle\right.\end{array}\right]\right\}dt_1dt_2=
$$

$$
=\frac{1}{(2n-\mu_{1n\cdot1})(2n-\mu_{1n\cdot2})T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n\cdot1}-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_{1n\cdot2}-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\int\limits_{t_u}^{t_u+T_0}\times
$$

$$
\times\left\{W_{2n}\left[\begin{array}{l}X_{11},X_{21},.,X_{n1},X_{12},X_{22},.,X_{n2}|\\ \left|\begin{array}{l}t_2,t_2+|\tau_{12\cdot2}|,.,t_2+|\tau_{1n\cdot2}|;\\ x_{-nk},.,x_{nr}t_1,t_1+|\tau_{12\cdot1}|,.,t_1+|\tau_{1n\cdot1}|\end{array}\right.\end{array}\right]-\right.
$$

$$
-W_n\left[X_{11},X_{21},.,X_{n1}\middle|t_1,t_1+|\tau_{12\cdot1}|,t_1+|\tau_{1n\cdot1}|;x_{-nk},.,x_{nr}\right]\times
$$

$$
\left.\times W_n\left[X_{12},X_{22},.,X_{n2}\middle|t_2,t_2+|\tau_{12\cdot2}|,t_2+|\tau_{1n\cdot2}|;x_{-nk},.,x_{nr}\right]\right\}dt_1dt_2,
$$

где $W_{2n}\left[X_{11},X_{21},\ldots,X_{n1},X_{12},X_{22},\ldots,X_{n2}\middle|\bullet\right]$ – $2n$-мерное условное распределение вероятностей; $|\tau_{12}|\le|\tau_{13}|\le\ldots\le|\tau_{1n}|$; $\mu_{12}\le\ \mu_{13}\le\ldots\le\mu_{1n}$.

Оценка двумерного взаимного распределения вероятности совместно эргодических процессов

$$\langle W_2[X;Y,\tau]\rangle = \int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y}\langle w_2[Z;H,\tau]\rangle dZdH =$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|} W_2\big[X,Y\big|\langle x(t)\rangle,\langle y(t+|\tau|)\rangle\big]dt = \frac{1}{(2n-\mu)T_0}\times$$

$$\times\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0} W_2\big[X,Y\big|t,t+|\tau|;x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq}\big]dt,$$

где $\langle w_2(Z;H,\tau)\rangle$ – оценка двумерной плотности вероятности; $W_2[X, Y \mid \bullet]$ – двумерное условное взаимное распределение вероятностей.

Математическое ожидание $m_{\delta W}(X; Y, \tau)$ и корреляционная функция $R_{\delta W}(X_1; Y_2, \tau_1; X_2; Y_2, \tau_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta W}(X;Y,\tau)=\int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y} m_{\delta w}(Z;H,\tau)dZdH=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\begin{matrix} W_2\big[X,Y\big|\langle x(t)\rangle,\langle y(t+|\tau|)\rangle-\big] \\ -W_2[X;Y,\tau]\end{matrix}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\times$$

$$\times\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{matrix}W_2\big[X,Y\big|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\big]\\ -W_2[X;Y,\tau]\end{matrix}\right\}dt;$$

$$R_{\delta W}(X_1;Y_1,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2)=$$

$$=\int_{-\infty}^{X_1}\int_{-\infty}^{Y_1}\int_{-\infty}^{X_2}\int_{-\infty}^{Y_2} R_{\delta w}(Z_1;H_1,\tau_1;Z_2;H_2,\tau_2)dZ_1dH_1dZ_2dH_2=$$

$$=\frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\times$$

$$\times\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\int_{-T}^{T-|\tau_2|}\Bigg\{W_4\left[X_1,Y_1,X_2,Y_2\,\Bigg|\begin{matrix}\langle x(t_1)\rangle,\langle y(t_1+|\tau_1|)\rangle,\\ \langle x(t_2)\rangle,\langle y(t_2+|\tau_2|)\rangle\end{matrix}\right]-$$

$$-W_2\left[X_1,Y_1\,\Bigg|\begin{matrix}\langle x(t_1)\rangle,\\ \langle y(t_1+|\tau_1|)\rangle\end{matrix}\right]W_2\left[X_2,Y_2\,\Bigg|\begin{matrix}\langle x(t_2)\rangle,\\ \langle y(t_2+|\tau_{21}|)\rangle\end{matrix}\right]\Bigg\}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\times$$

$$\times\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\Bigg\{W_4\left[X_1,Y_1,X_2,Y_2\,\Bigg|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;\\x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq}\end{matrix}\right]-$$

$$-W_2\left[X_1,Y_1\,\Bigg|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|;\\x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq}\end{matrix}\right]\times$$

$$\times W_2\left[X_2,Y_2\,\Bigg|\begin{matrix}t_2,t_2+|\tau_2|;\\x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq}\end{matrix}\right]\Bigg\}dt_1dt_2,$$

где $W_2[X, Y \mid \bullet]$ и $W_4[X_1, Y_1, X_2, Y_2 \mid \bullet]$ – двумерное и четырехмерное условные распределения вероятностей.

Оценка одномерной плотности вероятности

$$\langle w_1[X]\rangle=\frac{d\langle W_1[X]\rangle}{dX}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} w_1\big[X\big|\langle x(t)\rangle\big]dt=$$

$$=\frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0} w_1\big[X\big|t;x_{-nk},...,x_{nr}\big]dt,$$

математическое ожидание $m_{\delta W}(X)$ и корреляционная функция $R_{\delta W}(X_1; X_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta w}(X)=\frac{dm_{\delta W}(X)}{dX}=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\big\{w_1\big[X\big|\langle x(t)\rangle\big]-w_1[X]\big\}dt=$$

$$=\frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\big\{w_1\big[X\big|t;x_{-nk},...,x_{nr}\big]-w_1[X]\big\}dt;$$

$$R_{\delta w}(X_1,X_2)=\frac{d^2R_{\delta W}(X_1,X_2)}{dX_1dX_2}=$$

$$=\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\big\{w_2\big[X_1,X_2\big|\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_2)\rangle\big]-$$

$$-w_1\big[X_1\big|\langle x(t_1)\rangle\big]w_1\big[X_2\big|\langle x(t_2)\rangle\big]\big\}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{4n^2T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-1}\sum_{u=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\big\{w_2\big[X_1,X_2\big|t_1,t_2;x_{-nk},..,x_{nr}\big]-$$

$$-w_1\big[X_1\big|t_1;x_{-nk},...,x_{nr}\big]w_1\big[X_2\big|t_2;x_{-nk},...,x_{nr}\big]\big\}dt_1dt_2.$$

где $w_1[X \mid \bullet]$ и $w_2[X_1, X_2 \mid \bullet]$ – одномерное и двумерное условные плотности распределения вероятностей.

Оценка двумерной плотности распределения вероятности

$$\langle w_2[X_1;X_2,\tau]\rangle=\frac{d^2\langle W_2[X_1;X_2,\tau]\rangle}{dX_1dX_2}=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|} w_2\big[X_1,X_2\big|\langle x(t)\rangle,\langle x(t+|\tau|)\rangle\big]dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0} w_2\big[X_1,X_2\big|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr}\big]dt.$$

Математическое ожидание $m_{\delta W}(X_1; X_2, \tau)$ и корреляционная функция $R_{\delta W}(X_{11}; X_{21}, \tau_1; X_{12}; X_{22}, \tau_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta w}(X_1;X_2,\tau)=\frac{d^2m_{\delta W}(X_1;X_2,\tau)}{dX_1dX_2}=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\begin{matrix}w_2\big[X_1,X_2\big|\langle x(t)\rangle,\langle x(t+|\tau|)\rangle\big]-\\ -w_2[X_1;X_2,\tau]\end{matrix}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{matrix}w_2\big[X_1,X_2\big|t,t+|\tau|;x_{-nk},..,x_{nr}\big]-\\ -w_2[X_1;X_2,\tau]\end{matrix}\right\}dt;$$

$$R_{\delta w}(X_{11};X_{21},\tau_1;X_{12};X_{22},\tau_2)=$$
$$=\frac{d^4R_{\delta W}(X_{11};X_{21},\tau_1;X_{12};X_{22},\tau_2)}{dX_{11}dX_{21}dX_{12}dX_{22}}=$$
$$=\frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\int_{-T}^{T-|\tau_2|}\times$$
$$\times\left\{w_4\left[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\left|\begin{matrix}\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle,\\ \langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_2|)\rangle\end{matrix}\right.\right]-\right.$$
$$\left.\begin{matrix}-w_2[X_{11},X_{21}|\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle]\times\\ \times w_2[X_{12},X_{22}|\langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_2|)\rangle]\end{matrix}\right\}dt_1dt_2=$$
$$=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\times$$
$$\times\left\{w_4\left[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\left|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},\dots,x_{nr}\end{matrix}\right.\right]-\right.$$
$$\left.-w_2\left[X_{11},X_{21}\left|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|;\\ x_{-nk},\dots,x_{nr}\end{matrix}\right.\right]w_2\left[X_{12},X_{22}\left|\begin{matrix}t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},\dots,x_{nr}\end{matrix}\right.\right]\right\}dt_1dt_2,$$

где $w_4[X_{11}, X_{21}, X_{12}, X_{22} | \bullet]$ – четырехмерная условная плотность распределения вероятностей.

Оценка n-мерной плотности распределения вероятности, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle w_n[X_1;X_2,\tau_{12};\dots;X_n,\tau_{1n}]\rangle=$$
$$=\frac{d^n\langle W_1[X_1;X_2,\tau_{12};\dots;X_n,\tau_{1n}]\rangle}{dX_1\dots dX_n}=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\times$$
$$\times\int_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}w_n\left[X_1,X_2,.,X_n\left|\begin{matrix}\langle x(t)\rangle,\\ \langle x(t+|\tau_{12}|)\rangle,.,\langle x(t+|\tau_{1n}|)\rangle\end{matrix}\right.\right]dt=$$
$$=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\times$$
$$\times\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}w_n\left[X_1,X_2,.,X_n\left|\begin{matrix}t,t+|\tau_{12}|,.,t+|\tau_{1n}|;\\ x_{-nk},.,x_{nr}\end{matrix}\right.\right]dt;$$

$$m_{\delta w}(X_1;X_2,\tau_{12};\dots;X_n,\tau_{1n})=$$
$$=\frac{d^nm_{\delta W}(X_1;X_2,\tau_{12};\dots;X_n,\tau_{1n})}{dX_1\dots dX_n}=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\times$$
$$\times\int_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}\left\{\begin{matrix}w_n\left[X_1,X_2,.,X_n\left|\begin{matrix}\langle x(t)\rangle,\\ \langle x(t+|\tau_{12}|)\rangle,.,\langle x(t+|\tau_{1n}|)\rangle\end{matrix}\right.\right]-\\ -w_n[X_1;X_2,\tau_{12};.;X_n,\tau_{1n}]\end{matrix}\right\}dt=$$
$$=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\times$$
$$\times\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{matrix}w_n\left[X_1,X_2,.,X_n\left|\begin{matrix}t,t+|\tau_{12}|,.,t+|\tau_{1n}|;\\ x_{-nk},.,x_{nr}\end{matrix}\right.\right]-\\ -w_n[X_1;X_2,\tau_{12};.;X_n,\tau_{1n}]\end{matrix}\right\}dt;$$

$$R_{\delta w}(X_{11};X_{21},\tau_{121};\dots;X_{n1},\tau_{1n1};X_{12};X_{22},\tau_{122};\dots;X_{n2},\tau_{1n2})=$$
$$=\frac{d^{2n}R_{\delta W}(X_{11};X_{21},\tau_{121};.;X_{n1},\tau_{1n1};X_{12};X_{22},\tau_{122};.;X_{n2},\tau_{1n2})}{dX_{11}.dX_{n1}dX_{12}.dX_{n2}}=$$
$$=\frac{1}{(2T-|\tau_{1n1}|)(2T-|\tau_{1n2}|)}\times$$
$$\times\int_{-T}^{T-|\tau_{1n1}|}\int_{-T}^{T-|\tau_{1n2}|}\{w_{2n}[X_{11},X_{21},.,X_{n1},X_{12},X_{22},.,X_{n2}|$$
$$\left|\begin{matrix}\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_{121}|)\rangle,.,\langle x(t_1+|\tau_{1n1}|)\rangle,\\ \langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_{122}|)\rangle,.,\langle x(t_2+|\tau_{1n2}|)\rangle\end{matrix}\right]-w_n\times$$
$$\times[X_{11},X_{21},.,X_{n1}|\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_{121}|)\rangle,.,\langle x(t_1+|\tau_{1n1}|)\rangle]w_n\times$$
$$\times_n[X_{12},X_{22},.,X_{n2}|\langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_{122}|)\rangle,.,\langle x(t_2+|\tau_{1n2}|)\rangle]\}dt_1dt_2=$$
$$=\frac{1}{(2n-\mu_{1n1})(2n-\mu_{1n2})T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n1}-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_{1n2}-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\times$$
$$\times\left\{w_{2n}\left[X_{11},X_{21},.,X_{n1},X_{12},X_{22},.,X_{n2}\left|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_{121}|,.,t_1+|\tau_{1n1}|,\\ t_2,t_2+|\tau_{122}|,.,t_2+|\tau_{1n2}|;\\ x_{-nk},.,x_{nr}\end{matrix}\right.\right]-\right.$$
$$-w_n[X_{11},X_{21},.,X_{n1}|t_1,t_1+|\tau_{121}|,t_1+|\tau_{1n1}|;x_{-nk},.,x_{nr}]\times$$
$$\left.\times w_n[X_{12},X_{22},.,X_{n2}|t_2,t_2+|\tau_{122}|,t_2+|\tau_{1n2}|;x_{-nk},.,x_{nr}]\right\}dt_1dt_2,$$

где $w_n[X_1,X_2,\dots,X_n|\bullet]$ и $w_{2n}[X_{11}, X_{21},\dots, X_{n1}, X_{12}, X_{22},\dots, X_{n2} | \bullet]$ – n-мерная и $2n$-мерная условные плотности распределения вероятности; $|\tau_{12}| \le \le |\tau_{13}| \le\dots\le|\tau_{1n}|$; $\mu_{12}\le\mu_{13}\le\dots\le\mu_{1n}$.

Оценка двумерной взаимной плотности распределения вероятности совместно эргодических процессов, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle w_2[X;Y,\tau]\rangle=\frac{d^2\langle W_1[X_1;Y,\tau]\rangle}{dXdY}=$$
$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}w_2[X,Y|\langle x(t)\rangle,\langle y(t+|\tau|)\rangle]dt=$$
$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}w_2\left[X,Y\left|\begin{matrix}t,t+|\tau|;x_{-nk},\dots,x_{nr},\\ y_{-ng},\dots,y_{nq}\end{matrix}\right.\right]dt;$$
$$m_{\delta w}(X;Y,\tau)=\frac{d^2m_{\delta W}(X;Y,\tau)}{dXdY}=$$
$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\begin{matrix}w_2[X,Y|\langle x(t)\rangle,\langle y(t+|\tau|)\rangle]-\\ -w_2[X;Y,\tau]\end{matrix}\right\}dt=$$

$$
=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\times
$$

$$
\times\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{matrix} w_2\left[X,Y\,\middle|\,\begin{matrix} t,t+|\tau|;x_{-nk},.,x_{nr},\\ y_{-ng},.,y_{nq}\end{matrix}\right]-\\ -w_2[X;Y,\tau]\end{matrix}\right\}dt;
$$

$$
R_{\delta w}(X_1;Y_1,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2)=\frac{d^4R_{\delta W}(X_1;Y_1,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2)}{dX_1dY_1dX_2dY_2}=
$$

$$
=\frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\int_{-T}^{T-|\tau_2|}\times
$$

$$
\times\left\{\begin{matrix} w_4\left[X_1,Y_1,X_2,Y_2\,\middle|\,\begin{matrix}\langle x(t_1)\rangle,\langle y(t_1+|\tau_1|)\rangle,\\ \langle x(t_2)\rangle,\langle y(t_2+|\tau_2|)\rangle\end{matrix}\right]-\\ -w_2\left[X_1,Y_1\middle|\langle x(t_1)\rangle,\langle y(t_1+|\tau_1|)\rangle\right]\times\\ \times w_2\left[X_2,Y_2\middle|\langle x(t_2)\rangle,\langle y(t_2+|\tau_2|)\rangle\right]\end{matrix}\right\}dt_1dt_2=
$$

$$
=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\times
$$

$$
\times\left\{\begin{matrix} w_4\left[X_1,Y_1,X_2,Y_2\,\middle|\,\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},.,x_{nr},y_{-ng},.,y_{nq}\end{matrix}\right]-\\ -w_2\left[X_1,Y_1\,\middle|\,\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|;\\ x_{-nk},.,x_{nr},y_{-ng},.,y_{nq}\end{matrix}\right]\times\\ \times w_2\left[X_2,Y_2\,\middle|\,\begin{matrix}t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},.,x_{nr},y_{-ng},.,y_{nq}\end{matrix}\right]\end{matrix}\right\}dt_1dt_2,
$$

где $w2[X, Y \mid \bullet]$ и $w_4[X_1, Y_1, X_2, Y_2 \mid \bullet]$ – условные плотности распределений вероятностей.

Оценка одномерной характеристической функции и характеристики ее погрешности соответственно:

$$
\langle\theta_1[j\nu]\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\langle w_1[X]\rangle e^{j\nu X}dX=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\theta_1\left[j\nu\middle|\langle x(t)\rangle\right]dt=
$$

$$
=\frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\theta_1\left[j\nu\middle|t;x_{-nk},...,x_{nr}\right]dt;
$$

$$
m_{\delta\theta}(j\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}m_{\delta w}(X)e^{j\nu X}dX=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\theta_1\left[j\nu\middle|\langle x(t)\rangle\right]-\theta_1[j\nu]\right\}dt=
$$

$$
=\frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\theta_1\left[j\nu\middle|t;x_{-nk},...,x_{nr}\right]-\theta_1[j\nu]\right\}dt;
$$

$$
R_{\delta\theta}(j\nu_1,j\nu_2)=\int\int_{-\infty}^{\infty}R_{\delta w}(X_1,X_2)e^{j(\nu_1X_1+\nu_2X_2)}dX_1dX_2=
$$

$$
=\frac{1}{4T^2}\int\int_{-T}^{T}\left\{\begin{matrix}\theta_2\left[j\nu_1,j\nu_2\middle|\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_2)\rangle\right]-\\ -\theta_1\left[j\nu_1\middle|\langle x(t_1)\rangle\right]\theta_1\left[j\nu_2\middle|\langle x(t_2)\rangle\right]\end{matrix}\right\}dt_1dt_2=
$$

$$
=\frac{1}{4n^2T_0^2}\times
$$

$$
\times\int\int_{-T}^{T}\left\{\begin{matrix}\theta_2\left[j\nu_1,j\nu_2\middle|t_1,t_2;x_{-nk},.,x_{nr}\right]-\\ -\theta_1\left[j\nu_1\middle|t_1;x_{-nk},.,x_{nr}\right]\theta_1\left[j\nu_2\middle|t_2;x_{-nk},.,x_{nr}\right]\end{matrix}\right\}dt_1dt_2,
$$

где $\theta_1[j\nu|\bullet]$ и $\theta_2[j\nu_1, j\nu_2|\bullet]$ – одномерная и двумерная условные характеристические функции.

Оценка n-мерной характеристической функции, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$
\langle\theta_n[j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};.;j\nu_n,\tau_{1n}]\rangle=
$$

$$
=\int_{-\infty}^{\infty}.\int_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}\langle w_n[X_1;X_2,\tau_{12};.;X_n,\tau_{1n}]\rangle\times\\ \times e^{j(\nu_1X_1+\nu_2X_2+.+\nu_nX_n)}\end{matrix}dX_1.dX_n=
$$

$$
=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\int_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}\theta_n\left[\begin{matrix}j\nu_1,j\nu_2,.,j\nu_n\times\\ \times\left|\begin{matrix}\langle x(t)\rangle,\langle x(t+|\tau_{12}|)\rangle,\\ ...,\langle x(t+|\tau_{1n}|)\rangle\end{matrix}\right.\end{matrix}\right]dt=
$$

$$
=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\theta_n\left[\begin{matrix}j\nu_1,j\nu_2,.,j\nu_n\times\\ \times\left|\begin{matrix}t,t+|\tau_{12}|,\\ ..,t+|\tau_{1n}|;\\ x_{-nk},.,x_{nr}\end{matrix}\right.\end{matrix}\right]dt;
$$

$$
m_{\delta\theta}(j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};.;j\nu_n,\tau_{1n})=
$$

$$
=\int_{-\infty}^{\infty}.\int_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}m_{\delta w}(X_1;X_2,\tau_{12};.;X_n,\tau_{1n})\times\\ \times e^{j(\nu_1X_1+\nu_2X_2+.+\nu_nX_n)}\end{matrix}dX_1.dX_n=
$$

$$
=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\int_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}\left\{\begin{matrix}\theta_n\left[\begin{matrix}j\nu_1,j\nu_2,.,j\nu_n\times\\ \times\left|\begin{matrix}\langle x(t)\rangle,\langle x(t+|\tau_{12}|)\rangle,\\ ..,\langle x(t+|\tau_{1n}|)\rangle\end{matrix}\right.\end{matrix}\right]-\\ -\theta_n[j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};.;j\nu_n,\tau_{1n}]\end{matrix}\right\}dt=
$$

$$
=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\times
$$

$$
\times\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{matrix}\theta_n\left[\begin{matrix}j\nu_1,j\nu_2,.,j\nu_n\times\\ \times\left|\begin{matrix}t,t+|\tau_{12}|,\\ ..,t+|\tau_{1n}|;\\ x_{-nk},.,x_{nr}\end{matrix}\right.\end{matrix}\right]-\\ -\theta_n[j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};.;j\nu_n,\tau_{1n}]\end{matrix}\right\}dt;
$$

$$R_{\delta\theta}\begin{pmatrix} j\nu_{11}; j\nu_{21}, \tau_{12\cdot 1};\ldots; \\ j\nu_{n1}, \tau_{1n\cdot 1}; j\nu_{12}; j\nu_{22}, \tau_{12\cdot 2};\ldots; \\ j\nu_{n2}, \tau_{1n\cdot 2} \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} . \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} . \int_{-\infty}^{\infty} R_{\delta w}\begin{pmatrix} X_{11}; X_{21}, \tau_{12\cdot 1};.; \\ X_{n1}, \tau_{1n\cdot 1}; X_{12}; X_{22}, \\ \tau_{12\cdot 2};.; X_{n2}, \tau_{1n\cdot 2} \end{pmatrix} \times$$

$$\times e^{j(\nu_{11}X_{11}+\nu_{21}X_{21}+..+\nu_{n1}X_{n1}+\nu_{12}X_{12}+\nu_{22}X_{22}+..+\nu_{n2}X_{n2})} dX_{11}.dX_{n1}dX_{12}.dX_{n2} =$$

$$= \frac{1}{(2T-|\tau_{1n\cdot 1}|)(2T-|\tau_{1n\cdot 2}|)} \int_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot 1}|} \int_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot 2}|} \times$$

$$\times \left\{ \theta_{2n}\left[\begin{matrix} j\nu_{11}, j\nu_{21},.., j\nu_{n1}, \\ j\nu_{12}, j\nu_{22},.., j\nu_{n2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} \langle x(t_1)\rangle, \langle x(t_1+|\tau_{12\cdot 1}|)\rangle,.., \langle x(t_1+|\tau_{1n\cdot 1}|)\rangle, \\ \langle x(t_2)\rangle, \langle x(t_2+|\tau_{12\cdot 2}|)\rangle,.., \langle x(t_2+|\tau_{1n\cdot 2}|)\rangle \end{matrix} \right. \right] - \right.$$

$$- \theta_n\left[\begin{matrix} j\nu_{11}, j\nu_{21},.., j\nu_{n1} \times \\ \times \left| \langle x(t_1)\rangle, \langle x(t_1+|\tau_{12\cdot 1}|)\rangle,.., \langle x(t_1+|\tau_{1n\cdot 1}|)\rangle \right. \end{matrix} \right] \times$$

$$\left. \times \theta_n\left[\begin{matrix} j\nu_{12}, j\nu_{22},.., j\nu_{n2} \times \\ \times \left| \langle x(t_2)\rangle, \langle x(t_2+|\tau_{12\cdot 2}|)\rangle,.., \langle x(t_2+|\tau_{1n\cdot 2}|)\rangle \right. \end{matrix} \right] \right\} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu_{1n\cdot 1})(2n-\mu_{1n\cdot 2})T_0^2} \sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n\cdot 1}-1} \sum_{u=-n}^{n-\mu_{1n\cdot 2}-1} \int_{t_i}^{t_i+T_0} \int_{t_u}^{t_u+T_0} \times$$

$$\times \left\{ \theta_{2n}\left[\begin{matrix} j\nu_{11}, j\nu_{21},.., j\nu_{n1}, \\ j\nu_{12}, j\nu_{22},.., j\nu_{n2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} t_1, t_1+|\tau_{12\cdot 1}|,.., t_1+|\tau_{1n\cdot 1}|, \\ t_2, t_2+|\tau_{12\cdot 2}|,.., t_2+|\tau_{1n\cdot 2}|; \\ x_{-nk},.., x_{nr} \end{matrix} \right. \right] - \right.$$

$$- \theta_n\left[\begin{matrix} j\nu_{11}, j\nu_{21},..., j\nu_{n1} \times \\ \times \left| t_1, t_1+|\tau_{12\cdot 1}|,..., t_1+|\tau_{1n\cdot 1}|; x_{-nk},.., x_{nr} \right. \end{matrix} \right] \times$$

$$\left. \times \theta_n\left[j\nu_{12}, j\nu_{22},..., j\nu_{n2} \left| \begin{matrix} t_2, t_2+|\tau_{12\cdot 2}|,...., \\ t_2+|\tau_{1n\cdot 2}|; x_{-nk},.., x_{nr} \end{matrix} \right. \right] \right\} dt_1 dt_2,$$

где $\theta_n[j\nu_{11}, j\nu_{21},\ldots, j\nu_{n1} \mid \bullet]$ и $\theta_{2n}[j\nu_{11}, j\nu_{21},\ldots, j\nu_{n1}, j\nu_{12}, j\nu_{22},\ldots, j\nu_{n2} \mid \bullet]$ – n-мерные и $2n$-мерные условные характеристические функции.

Оценка двумерной взаимной характеристической функции совместно эргодических процессов, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle \theta_2[j\nu; j\eta, \tau] \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle w_2[X;Y,\tau] \rangle e^{j(\nu X+\eta Y)} dXdY =$$

$$= \frac{1}{2T-|\tau|} \int_{-T}^{T-|\tau|} \theta_2\left[j\nu, j\eta \left| \langle x(t)\rangle, \langle y(t+|\tau|)\rangle \right. \right] dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0} \sum_{i=-n}^{n-\mu-1} \int_{t_i}^{t_i+T_0} \theta_2\left[j\nu, j\eta \left| t, t+|\tau|; x_{-nk},.., x_{nr}, y_{-ng},.., y_{nq} \right. \right] dt;$$

$$m_{\delta\theta}(j\nu; j\eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} m_{\delta w}(X;Y,\tau) e^{j(\nu X+\eta Y)} dXdY =$$

$$= \frac{1}{2T-|\tau|} \int_{-T}^{T-|\tau|} \left\{ \theta_2\left[j\nu, j\eta \left| \langle x(t)\rangle, \langle y(t+|\tau|)\rangle \right. \right] - \theta_2[j\nu, j\eta, \tau] \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0} \sum_{i=-n}^{n-\mu-1} \int_{t_i}^{t_i+T_0} \left\{ \begin{matrix} \theta_2\left[j\nu, j\eta \left| t, t+|\tau|; x_{-nk},.., x_{nr}, y_{-ng},.., y_{nq} \right. \right] - \\ - \theta_2[j\nu, j\eta, \tau] \end{matrix} \right\} dt;$$

$$R_{\delta\theta}(j\nu_1; j\eta_1, \tau_1; j\nu_2; j\eta_2, \tau_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \begin{matrix} R_{\delta w}(X_1;Y_1,\tau_1; X_2;Y_2,\tau_2) \times \\ \times e^{j(\nu_1 X_1+\eta_1 Y_1+\nu_2 X_2+\eta_2 Y_2)} \end{matrix} dX_1 dY_1 dX_2 dY_2 =$$

$$= \frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)} \int_{-T}^{T-|\tau_1|} \int_{-T}^{T-|\tau_1|} \times$$

$$\times \left\{ \theta_4\left[j\nu_1, j\eta_1, j\nu_2, j\eta_2 \left| \begin{matrix} \langle x(t_1)\rangle, \langle y(t_1+|\tau_1|)\rangle, \\ \langle x(t_2)\rangle, \langle y(t_2+|\tau_2|)\rangle \end{matrix} \right. \right] \right.$$

$$\left. \begin{matrix} - \theta_2\left[j\nu_1, j\eta_1 \left| \langle x(t_1)\rangle, \langle y(t_1+|\tau_1|)\rangle \right. \right] \times \\ \times \theta_2\left[j\nu_2, j\eta_2 \left| \langle x(t_2)\rangle, \langle y(t_2+|\tau_2|)\rangle \right. \right] \end{matrix} \right\} dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2} \sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1} \sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1} \int_{t_i}^{t_i+T_0} \int_{t_u}^{t_u+T_0} \times$$

$$\times \left\{ \theta_4\left[j\nu_1, j\eta_1, j\nu_2, j\eta_2 \left| \begin{matrix} t_1, t_1+|\tau_1|, t_2, t_2+|\tau_2|; \\ x_{-nk},.., x_{nr}, y_{-ng},.., y_{nq} \end{matrix} \right. \right] - \right.$$

$$\left. \begin{matrix} - \theta_2\left[j\nu_1, j\eta_1 \left| \begin{matrix} t_1, t_1+|\tau_1|; \\ x_{-nk},.., x_{nr}, y_{-ng},.., y_{nq} \end{matrix} \right. \right] \times \\ \times \theta_2\left[j\nu_2, j\eta_2 \left| \begin{matrix} t_2, t_2+|\tau_2|; \\ x_{-nk},.., x_{nr}, y_{-ng},.., y_{nq} \end{matrix} \right. \right] \end{matrix} \right\} dt_1 dt_2.$$

Оценка математического ожидания, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle m_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X \langle w_1[X] \rangle dX = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [\langle x(t)\rangle - m_\delta] dt =$$

$$= \frac{1}{2nT_0} \sum_{i=-n}^{n-1} \int_{t_i}^{t_i+T_0} m(t; x_{-nk},\ldots,x_{nr}) dt;$$

$$m_{\delta m} = \int_{-\infty}^{\infty} X m_{\delta w}(X) dX = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [\langle x(t)\rangle - m_\delta - m_x] dt =$$

$$= \frac{1}{2nT_0} \sum_{i=-n}^{n-1} \int_{t_i}^{t_i+T_0} [m(t; x_{-nk},\ldots,x_{nr}) - m_x] dt;$$

$$R_{\delta m} = D_{\delta m} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 R_{\delta w}(X_1, X_2) dX_1 dX_2 =$$

$$= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} R_\delta(t_1, t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{4n^2T_0^2} \sum_{i=-n}^{n-1} \sum_{u=-n}^{n-1} \int_{t_i}^{t_i+T_0} \int_{t_u}^{t_u+T_0} R_\delta(t_1, t_2; x_{-nk},\ldots, x_{nr}) dt,$$

где m_δ – математическое значение погрешности измерения реализации $x(t)$ процесса; $m(t; x_{-nk},\ldots, x_{nr})$ – математическое ожидание реализации процесса в момент времени t, восстановленной по отсчетам $x_{-nk},\ldots, x_{nr}$.

Оценка дисперсии, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle D_x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}(X-m_x)^2\langle w_1[X]\rangle dX=$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\left[\langle x(t)\rangle-m_\delta-m_x\right]^2+D_\delta\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{aligned}&[m(t;x_{-nk},.,x_{nr})-m_x]^2+\\&+D_\delta(t;x_{-nk},.,x_{nr})\end{aligned}\right\}dt;$$

$$m_{\delta D}=\int_{-\infty}^{\infty}(X-m_x)^2 m_{\delta w}(X)dX=$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\left[\langle x(t)\rangle-m_\delta-m_x\right]^2+D_\delta-D_x\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{aligned}&[m(t;x_{-nk},...,x_{nr})-m_x]^2+\\&+D_\delta(t;x_{-nk},...,x_{nr})-D_x\end{aligned}\right\}dt;$$

$$R_{\delta D}=D_{\delta D}=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X_1-m_x)^2(X_2-m_x)^2R_{\delta w}(X_1,X_2)dX_1dX_2=$$

$$=\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left\{\begin{aligned}&m^{2\times2}[\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_2)\rangle]-\\&-[\langle x(t_1)\rangle-m_\delta]^2[\langle x(t_2)\rangle-m_\delta]^2\end{aligned}\right\}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{4n^2T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-1}\sum_{u=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\left\{\begin{aligned}&m^{2\times2}(t_1,t_2;x_{-nk},.,x_{nr})-\\&-m^2(t_1;x_{-nk},.,x_{nr})\times\\&\times m^2(t_2;x_{-nk},.,x_{nr})\end{aligned}\right\}dt_1dt_2,$$

где D_δ – дисперсия погрешности измерения реализации процесса; $D_\delta(t;\ x_{-nk},\ldots,\ x_{nr})$ – дисперсия погрешности измерения реализации процесса в момент времени t, восстановленной по отсчетам $x_{-nk},\ldots,\ x_{nr}$; $m^{2\times2}[<x(t_1)>,\ <x(t_2)>]$ и $m^{2\times2}[t_1,\ t_2;\ x_{-nk},\ldots,\ x_{nr}]$ – начальные моменты четвертого порядка от произведения квадратов реализаций процесса, восстановленных в моменты времени t_1 и t_2 соответственно по оценкам $<x(t)>$ и отсчетам $x_{-nk},\ldots, x_{nr}$.

Оценка корреляционной функции, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle R_x(\tau)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{aligned}&(X_1-m_x)(X_2-m_x)\times\\&\times\langle w_2[X_1;X_2,\tau]\rangle dX_1dX_2\end{aligned}=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\begin{aligned}&[\langle x(t)\rangle-m_\delta-m_x]\times\\&\times[\langle x(t+|\tau|)\rangle-m_\delta-m_x]+R_\delta(\tau)\end{aligned}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{aligned}&[m(t;x_{-nk},.,x_{nr})-m_x]\times\\&\times[m(t+|\tau|;x_{-nk},.,x_{nr})-m_x]+\\&+R_\delta(t,t+|\tau|;x_{-nk},.,x_{nr})\end{aligned}\right\}dt;$$

$$m_{\delta R}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{aligned}&(X_1-m_x)(X_2-m_x)\times\\&\times m_{\delta w}(X_1;X_2,\tau)\end{aligned}dX_1dX_2=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\begin{aligned}&[\langle x(t)\rangle-m_\delta-m_x]\times\\&\times[\langle x(t+|\tau|)\rangle-m_\delta-m_x]+\\&+R_\delta(\tau)-R_x(\tau)\end{aligned}\right\}dt=$$

$$R_{\delta R}(\tau_1,\tau_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{aligned}&(X_{11}-m_x)(X_{21}-m_x)\times\\&\times(X_{12}-m_x)(X_{22}-m_x)\times\\&\times R_{\delta w}(X_{11};X_{21},\tau_1;X_{12};X_{22},\tau_2)\\&dX_{11}dX_{21}dX_{12}dX_{22}\end{aligned}=$$

$$=\frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\times$$

$$\times\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\int_{-T}^{T-|\tau_2|}\left\{\begin{aligned}&m^4\left[\begin{aligned}&\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle,\langle x(t_2)\rangle,\\&\langle x(t_2+|\tau_2|)\rangle\end{aligned}\right]-\\&-[\langle x(t_1)\rangle-m_\delta][\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle-m_\delta]\times\\&\times[\langle x(t_2)\rangle-m_\delta][\langle x(t_2+|\tau_2|)\rangle-m_\delta]\end{aligned}\right\}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{u-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\times$$

$$\times\left\{\begin{aligned}&m^4(t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;x_{-nk},...,x_{nr})-\\&-m^2(t_1,t_1+|\tau_1|;x_{-nk},...,x_{nr})\times\\&\times m^2(t_2,t_2+|\tau_2|;x_{-nk},...,x_{nr})\end{aligned}\right\}dt_1dt_2,$$

где $R_\delta(\tau)$ – корреляционная функция погрешности измерения реализации процесса; $R_\delta(t_1,\ t_2;\ x_{-nk},\ldots,\ x_{nr})$ – корреляционная функция погрешности измерения реализации процесса, восстановленной по отсчетам $x_{-nk},\ldots,\ x_{nr}$; $m^4[\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle,\langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_2|)\rangle]$ и $m^4(t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;x_{-nk},...,x_{nr})$ начальные моменты четвертого порядка от произведения реализаций процесса, восстановленных в моменты времени t_1, $t_1+|\tau_1|$, t_2, $t_2+|\tau_2|$ соответственно по оценкам $<x(t_1)>$, $<x(t_1+|\tau_1|)>$, $<x(t_2)>$, $<x(t_2+|\tau_1|)>$ и отсчетам $x_{-nk},\ldots, x_{nr}$.

Оценка ковариационной функции, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle B_x(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_1X_2\langle w_2[X_1;X_2,\tau]\rangle dX_1dX_2 =$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left[\left[\langle x(t)\rangle - m_\delta\right]\left[\langle x(t+|\tau|)\rangle - m_\delta\right] + R_\delta(\tau)\right]dt =$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{matrix} m(t;x_{-nk},..,x_{nr})\times\\ \times m(t+|\tau|;x_{-nk},..,x_{nr})+\\ +R_\delta(t,t+|\tau|;x_{-nk},..,x_{nr})\end{matrix}\right\}dt;$$

$$m_{\delta B}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_1X_2 m_{\delta w}(X_1;X_2,\tau)dX_1dX_2 =$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left[\begin{matrix}\left[\langle x(t)\rangle - m_\delta\right]\times\\ \times\left[\langle x(t+|\tau|)\rangle - m_\delta\right] + R_\delta(\tau) - B_x(\tau)\end{matrix}\right]dt =$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{matrix} m(t;x_{-nk},..,x_{nr})\times\\ \times m(t+|\tau|;x_{-nk},..,x_{nr})+\\ +R_\delta(t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr})-\\ -B_x(\tau)\end{matrix}\right\}dt;$$

$$R_{\delta B}(\tau_1,\tau_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_{11}X_{21}X_{12}X_{22}\times$$
$$\times R_{\delta w}(X_{11};X_{21},\tau_1;X_{12};X_{22},\tau_2)dX_{11}dX_{21}dX_{12}dX_{22} =$$
$$=\frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\times$$
$$\times\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\int_{-T}^{T-|\tau_2|}\left\{\begin{matrix} m^4\left[\begin{matrix}\langle x(t_1)\rangle,\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle,\\ \langle x(t_2)\rangle,\langle x(t_2+|\tau_2|)\rangle\end{matrix}\right]-\\ -\left[\langle x(t_1)\rangle - m_\delta\right]\left[\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle - m_\delta\right]\times\\ \times\left[\langle x(t_2)\rangle - m_\delta\right]\left[\langle x(t_2+|\tau_2|)\rangle - m_\delta\right]\end{matrix}\right\}dt_1dt_2 =$$
$$=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\times$$
$$\times\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\left\{\begin{matrix} m^4\left(\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|,\\ t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},...,x_{nr}\end{matrix}\right)-\\ -m^2\left(\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|;\\ x_{-nk},..,x_{nr}\end{matrix}\right)m^2\left(\begin{matrix}t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},..,x_{nr}\end{matrix}\right)\end{matrix}\right\}dt_1dt_2.$$

Оценка взаимной корреляционной функции совместно эргодических процессов, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle R_{xy}(\tau)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X-m_x)(Y-m_y)\langle w_2[X;Y,\tau]\rangle dXdY =$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\begin{matrix}\left[\langle x(t)\rangle - m_{\delta x} - m_x\right]\left[\langle y(t+|\tau|)\rangle - m_{\delta y} - m_y\right]+\\ +R_{\delta x\delta y}(\tau)\end{matrix}\right\}dt =$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\times$$
$$\times\left\{\begin{matrix}\left[m(t;x_{-nk},..,x_{nr}) - m_x\right]\times\\ \times\left[\langle m(t+|\tau|;y_{-ng},..,y_{nq})\rangle - m_y\right]+\\ +R_{\delta x\delta y}(t,t+|\tau|;x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq})\end{matrix}\right\}dt;$$

$$m_{\delta Rxy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X-m_x)(Y-m_y)m_{\delta w}(X;Y,\tau)dXdY =$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\begin{matrix}\left[\langle x(t)\rangle - m_{\delta x} - m_x\right]\times\\ \times\left[\langle y(t+|\tau|)\rangle - m_{\delta y} - m_y\right]+\\ +R_{\delta x\delta y}(\tau) - R_{xy}(\tau)\end{matrix}\right\}dt =$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\times$$
$$\times\left\{\begin{matrix}\left[m(t;x_{-nk},..,x_{nr}) - m_x\right]\times\\ \times\left[m(t+|\tau|;y_{-ng},..,y_{nq}) - m_y\right]+\\ +R_{\delta x\delta y}(t,t+|\tau|;x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq})-\\ -R_{xy}(\tau)\end{matrix}\right\}dt;$$

$$R_{\delta Rxy}(\tau_1,\tau_2) =$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}(X_1-m_x)(Y_1-m_y)\times\\ \times(X_2-m_x)(Y_2-m_y)\times\\ \times R_{\delta w}(X_1;Y_1,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2)dX_1dY_1dX_2dY_2\end{matrix} =$$

$$=\frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\int_{-T}^{T-|\tau_2|}\left\{\begin{matrix} m^4\left[\begin{matrix}\langle x(t_1)\rangle,\langle y(t_1+|\tau_1|)\rangle,\\ \langle x(t_2)\rangle,\langle y(t_2+|\tau_2|)\rangle\end{matrix}\right]-\\ -\left[\langle x(t_1)\rangle - m_{\delta x}\right]\left[\langle x(t_1+|\tau_1|)\rangle - m_{\delta x}\right]\times\\ \times\left[\langle y(t_2)\rangle - m_{\delta y}\right]\left[\langle y(t_2+|\tau_2|)\rangle - m_{\delta y}\right]\end{matrix}\right\}dt_1dt_2 =$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\times$$
$$\times\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\left\{\begin{matrix} m^4\left[\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq}\end{matrix}\right]-\\ -m^2\left[\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|;\\ x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq}\end{matrix}\right]\times\\ \times m^2\left[\begin{matrix}t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq}\end{matrix}\right]\end{matrix}\right\}dt_1dt_2,$$

где $R_{\delta x\delta y}$ и $R_{\delta x\delta y}$ $(t,\ t+|\tau|;\ x_{-nk},\ldots,x_{nr},\ y_{-ng},\ldots,y_{nq})$ – взаимные корреляционные функции погрешностей аналоговых и цифровых измерений $x(t)$ и $y(t+|\tau|)$.

Оценка взаимной ковариационной функции совместно эргодических процессов, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle B_{xy}(\tau)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} XY\langle w_2[X;Y,\tau]\rangle dXdY =$$

$$= \frac{1}{2T-|\tau|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\begin{matrix}[\langle x(t)\rangle - m_{\delta x}]\times\\ \times[\langle y(t+|\tau|)\rangle - m_{\delta y}]+\\ +R_{\delta x\delta y}(\tau)\end{matrix}\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix}m(t;x_{-nk},..,x_{nr})m(t+|\tau|;y_{-ng},..,y_{nq})+\\ +R_{\delta x\delta y}(t,t+|\tau|;x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq})\end{matrix}\right\}dt;$$

$$m_{\delta Bxy}(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} XYm_{\delta w}(X;Y,\tau)dXdY =$$

$$= \frac{1}{2T-|\tau|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\begin{matrix}[\langle x(t)\rangle - m_{\delta x}]\times\\ \times[\langle y(t+|\tau|)\rangle - m_{\delta y}]+\\ +R_{\delta x\delta y}(\tau) - B_{xy}(\tau)\end{matrix}\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix}m(t+|\tau|;y_{-nk},..,y_{nr})\times\\ \times m(t+|\tau|;y_{-ng},..,y_{nq})+\\ +R_{\delta x\delta y}(t,t+|\tau|;x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq})-\\ -B_{xy}(\tau)\end{matrix}\right\}dt;$$

$$R_{\delta Bxy}(\tau_1,\tau_2) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\begin{matrix}X_1Y_1X_2Y_2\\ R_{\delta w}(X_1;Y_1,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2)_2\end{matrix}dX_1dY_1dX_2dY_2 =$$

$$= \frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\times$$

$$\times\int\limits_{-T}^{T-|\tau_1|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_2|}\left\{m^4\begin{bmatrix}\langle x(t_1)\rangle,\langle y(t_1+|\tau_1|)\rangle,\\ \langle x(t_2)\rangle,\langle y(t_2+|\tau_2|)\rangle\end{bmatrix}-\right.$$

$$\left.\begin{matrix}-[\langle x(t_1)\rangle - m_{\delta x}][\langle y(t_1+|\tau_1|)\rangle - m_{\delta y}]\times\\ \times[\langle x(t_2)\rangle - m_{\delta x}][\langle y(t_2+|\tau_2|)\rangle - m_{\delta y}]\end{matrix}\right\}dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{u-\mu_2-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\int\limits_{t_u}^{t_u+T_0}\times$$

$$\times\left\{m^4\begin{bmatrix}t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{bmatrix}-\right.$$

$$\left.\begin{matrix}-m^2\begin{bmatrix}t_1,t_1+|\tau_1|;\\ x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq}\end{bmatrix}\times\\ \times m^2\begin{bmatrix}t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},..,x_{nr},y_{-ng},..,y_{nq}\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}dt_1dt_2.$$

Оценка спектральной плотности мощности, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle S_x(\omega)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle B_x(\tau)\rangle\,e^{-j\omega\tau}d\tau;$$

$$m_{\delta S}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} m_{\delta B}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty}[\langle B_x(\tau)\rangle - B_x(\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau;$$

$$R_{\delta S}(\omega_1,\omega_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{\delta B}(\tau_1,\tau_2)\,e^{-j(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)}d\tau_1d\tau_2.$$

Оценка взаимной спектральной плотности мощности совместно эргодических процессов, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\langle S_{xy}(\omega)\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\langle B_{xy}(\tau)\rangle\,e^{-j\omega\tau}d\tau;$$

$$m_{\delta Sxy}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} m_{\delta Bxy}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}[\langle B_{xy}(\tau)\rangle - B_{xy}(\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau;$$

$$R_{\delta Sxy}(\omega_1,\omega_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{\delta Bxy}(\tau_1,\tau_2)\,e^{-j(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)}d\tau_1d\tau_2.$$

АПРОБАЦИЯ И ПРИЗНАНИЕ

Приведенные результаты исследований апробировались на всемирных, международных и всероссийских форумах. Они вошли в учебную литературу, сопровождаются комплексом учебно-исследовательских лабораторных работ и используются при обучении студентов и аспирантов. Эти доклады и труды неоднократно отмечалась наградами на различных смотрах и конкурсах [2, 8–11].

ВЫВОДЫ

Введенные определения распределений вероятностей и плотностей распределений вероятностей существенно расширяют возможности описания эргодических случайных процессов. Они позволяют не только получить с их помощью известные моментные характеристики случайных процессов, но и ввести характеристические функции, которые для описания эргодических процессов практически не применялись. Полученные на основе комплексного подхода математические ожидания и корреляционные функции погрешностей результатов измерений позволяют адекватно во взаимодействии между собой учесть влияние конечной длительности реализации и погрешностей отсчетов для аналоговых и цифровых измерений. Они исключают суммирование элементарных погрешностей, учитывающих порознь конечную длительность реализации, погрешность отсчетов и влияние дискретизации во времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **ГОСТ 21878-76** Случайные процессы и динамические системы. Термины и определения. Введ. 1.07.77 г. М.: Изд-во стандартов, 1976. 30 с.

2. **Заико А. И.** Случайные процессы. Модели и измерения: учеб. пособие. М.: МАИ, 2006. 297 с.

3. **Заико А. И.** 72200700005. Случайный процесс Заико А. И. с равномерным законом распределения. Математическая модель. Зарег. 28.02.07 г.; Информационный фонд ФГУП «ВНТИЦ». 10 с.

4. **Заико А. И.** Определения и алгоритмы измерения характеристик эргодических случайных процессов // Метрология. 2003. № 4. С. 3–5.

5. **Левин Б. Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 1. М.: Сов. радио. 1974. 552 с.

6. **Грибанов Ю. И., Мальков В. Л.** Погрешности и параметры цифрового спектрально-корреляционного анализа. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.

7. **Ланге Ф. Г.** Статистические аспекты построения измерительных систем. М.: Радио и связь, 1981. 168 с.

8. **Заико А. И.** Виртуальные учебно-исследовательские лабораторные работы // Современные технологии обучения: матер. V1 междунар. конф. Ч. 1. СПб.: Санкт-Петербург. гос. электротехн. ун-т, 2000. С. 136–138.

9. **Электрические сигналы:** метод. указания к выполнению виртуальных учебно-исследовательских лабораторных работ / сост. Заико А. И. Уфа: Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2001. 35 с.

10. **Zaiko A. I., Zaiko N. A.** Accuracy of statistic and spectral Measurement // XVII IMEKO World Congress 2003: Proc. Dubrovnik: HMD Croatian Metrology Society, IMEKO, 2003. P. 1275–1279.

11. **Zaiko A., Zaiko T.** Complex Approach to the Definition of Measurement Errors // Proc. 10th IMEKO TC7 Int. Symp. on «Advances of Measurement Science». Saint-Petersburg: Russia, 2004. V. 1. P. 149–152.

ОБ АВТОРЕ

Заико Александр Иванович, проф. каф. теоретич. основ электротехники. Дипл. инженер электронной техники (УАИ, 1970). Д-р техн. наук по информац.-измерит. системам (ЛЭТИ, 1990). Заслуж. изобретатель РБ и РФ. Дейст. член Международ. инж. акад. Иссл. в области метрологическ. обеспечения, анализа и синтеза инф.-измерит. систем и измерения случайных процессов.