Уфа : УГАТУ, 2012 Вестник УГАТУ Т. 16, № 6 (51). С. 86–90
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ

УДК 531.36:517.9

Р. Р. Исламов, Р. Р. Исламов (мл.)

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается автономная динамическая система, которая описывается квазилинейными дифференциальными уравнениями. Для интегрирования уравнений движения таких систем используются интегральные многообразия. Данная теория применяется для исследования астатического гироскопа. *Квазилинейная система*; *интегральное многообразие*; *полиномиальные интегралы*; *астатический гироскоп*

Исследуется автономная динамическая система, которая описывается квазилинейными дифференциальными уравнениями. Предполагается, что характеристическое уравнение порождающей системы имеет l нулевых, $2p$ чисто мнимых корней и $2m$ комплексных корней с отрицательными вещественными частями, причем кратным корням соответствуют простые элементарные делители. С помощью уравнений интегрального многообразия исследование исходной системы порядка $n = l + 2p + 2m$ сводится к исследованию вспомогательной системы порядка $N = l + p$. При этом используются полиномиально независимые интегралы порождающей системы.

Стационарные режимы и устойчивость решений исходной системы определяются исследованием вспомогательной системы. Вспомогательная система дифференциальных уравнений применяется также для приближенного интегрирования исходной системы.

В качестве примера исследуется движение астатического гироскопа. Получена формула, которая позволяет определить среднюю угловую скорость вращения наружного кольца гироскопа относительно основания при нутационных колебаниях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть математическая модель движения динамической системы описывается автономными квазилинейными дифференциальными уравнениями, приведенными к виду

$$\frac{dX}{dt} = JX + \varepsilon F(X, \varepsilon), \qquad (1)$$

где $X = \{x_1,\ldots,x_n\}$ – n-мерный вектор, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Предполагается, что диагональная матрица J имеет l нулевых, $2p$ чисто мнимых и $2m$ комплексных собственных чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$:

$$\begin{aligned} &\lambda_s = 0,\ldots,\lambda_{l+\alpha-1} = 0,\\ &\lambda_{l+\alpha} = i\omega_\alpha,\ldots,\lambda_{\nu+\alpha} = -i\omega_\alpha;\\ &\operatorname{Re}\lambda_\beta = \operatorname{Re}\lambda_{m+\beta} < 0;\\ &\begin{pmatrix} \beta = l+2p+1,\ldots,l+2p+m;\\ s = 1,\ldots,l;\alpha = 1,\ldots,p;\nu = l+p \end{pmatrix}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Вектор-функция $F(X, \varepsilon)$ разлагается в ряд по степеням малого параметра ε

$$F(X, \varepsilon) \equiv F_1(X) + \varepsilon F_2(X) + \ldots \ (F_k(0) = 0), \qquad (3)$$

проекции векторов $F_k(x)$ являются полиномами от проекции $x_1,\ldots,x_n$ вектора X.

В дальнейшем нашей задачей является нахождение решения $X(t)$ уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию $X(t_0) = X_0$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ И ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Наряду с системой (1) рассмотрим вспомогательную систему порядка N [1]

$$\frac{d\zeta}{dt} = \varepsilon G_1(\zeta) + \varepsilon^2 G_2(\zeta) + \ldots. \qquad (4)$$

Ищем уравнение интегральных многообразий системы (1) и (4) в форме

$$\zeta = V(X) + \varepsilon\Phi_1(X) + \varepsilon^2\Phi_1(X) + \ldots\ \Phi(0) = 0. \qquad (5)$$

Для определения вектор-функций $V(X)$, $G_k(\zeta)$, $\Phi_k(X)$ дифференцируем соотношение (5) по t в силу уравнений (1) и (4). Затем, исключая из результата дифференцирования вектор ζ с помощью равенств (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим уравнения с частными производными

Контактная информация: 8(347)277-73-35

$$\frac{DV}{DX}JX=0,$$
$$\frac{D\Phi_k}{DX}JX=U_k\left(X\right)+G_k\left(V\right), \qquad (6)$$

где $\frac{DV}{DX}$, $\frac{D\Phi_k}{DX}$ – матрицы Якоби, а $U_k(x) \equiv$ $\equiv U_k(F_1,\ldots, F_k,\ldots, G_1,\ldots, G_{k-1}, V, \Phi_1,\ldots,\Phi_{k-1})$ – известная вектор-функция при известных $G_1(X),\ldots,G_{k-1}(X)$ и V, $\Phi_1(X),\ldots,\Phi_{k-1}(X)$ ($F_1,\ldots,F_k$ – известные векторы (3)). Из первого уравнения (6) вытекает, что проекции вектора $V(X)$ являются интегралами порождающей системы (1) при $\varepsilon = 0$. При этом интегралы следует взять такие, чтобы с помощью выбора вектора $G_k(V)$ можно было найти решение $\Phi_k(X)$ системы (6). Допустим, что в качестве проекций вектора $V(X)$ выбраны полиномиально независимые интегралы $V_1,\ldots, V_n$ системы

$$\frac{dX}{dt}=JX \qquad (7)$$

через которые все интегралы выражаются полиномиально. Тогда вектор $G_k(V)$ будет полиномиальный относительно $V_1,\ldots, V_n$, а проекции вектора $\Phi_k(X)$ будут полиномами относительно $x_1,\ldots, x_n$. Итак, при указанном выборе проекция вектора $V(X)$, векторы $G_k(V)$ и $\Phi_k(X)$ последовательно определяются из уравнения (6) с отмеченными выше свойствами, тем самым строятся система (4) и уравнение (5). При этом порядок вспомогательной системы (4) зависит от числа полиномиально независимых интегралов системы (7).

Функции вида

$$v_1=x_1,\ldots,v_l=x_l,$$
$$v_{l+1}=x_{l+1}x_{l+p+1},\ldots,v_{l+p}=x_{l+p}x_{l+2p} \qquad (8)$$

с учетом соотношений (2) являются полиномимально независимыми интегралами уравнения (7). Через них любой полиномиальный интеграл системы (7) выражается полиномиально, если частоты $\omega_1,\ldots,\omega_p$ рационально несоизмеримы. Из вышесказанного следует, что если в качестве проекции вектора $V(X)$ выбрать $l + p$ интегралов (8), то исходную систему (1) порядка $n = l +$ $+ 2p + 2m$ можно привести к вспомогательной системе (4) порядка $N = l + p$. Исследование стационарных режимов системы (1) приводит к исследованию постоянных решений системы (4). Система (4) пригодна для исследования устойчивости нулевого решения системы (1).

В дальнейшем вспомогательная система (4) используется для интегрирования исходной системы (1).

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИСХОДНОЙ СИСТЕМЫ

Задача построения решений системы (1) сводится к интегрированию системы (4) с медленно изменяющимися переменными.

Переменная x_j ($j = 1, 2,\ldots,n$) ищется в виде

$$y_j=x_j+\varepsilon j_{1j}\left(X\right)+\varepsilon^2 j_{2j}\left(X\right)+\ldots, \qquad (9)$$

где y_i удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy_j}{dt}=\lambda_j y_j+\varepsilon q_{1j}\left(\zeta\right)y_j+\varepsilon^2 q_{2j}\left(\zeta\right)y_j+\ldots \qquad (10)$$

Функции $q_{kj}(\zeta)$, $\varphi_{kj}(\zeta)$ находятся из уравнений в частных производных

$$\frac{Dj_{kj}}{DX}JX-\lambda_j j_{kj}=q_{kj}\left(V\right)x_j+G_{kj}\left(X\right). \qquad (11)$$

Здесь $G_{kj}(X)$ – известный полином. Всегда можно подобрать функции $q_{kj}(V(x))$ так, чтобы уравнение (10) имело полиномиальное решение $\varphi_{kj}(X)$ [1]. Так как уравнение (10) линейное относительно y_j и при известном ζ (ζ – решение системы (4)) отыскание y_j приводит к квадратуре, то из (9) находится интеграл системы (1). После разрешения уравнения (9) относительно x_j ($j = 1, 2,\ldots,n$) и определяется полное решение системы (1) в виде

$$X=H\left(y_1,\ldots,y_n,\varepsilon\right),$$
$$y_j=y_{0j}\exp\left(\lambda_j t+\varepsilon\int_0^t q_j\left(\zeta,\varepsilon\right)dt\right), \qquad (12)$$

где $q_j(\zeta, \varepsilon) = q_{1j}(\zeta) + \varepsilon\, q_{2j}(\zeta) +\ldots$, y_{0j} – постоянная интегрирования; ζ – решение системы (4).

Частному решению системы (4) соответствует интегральное многообразие системы (1), которое определяется уравнениями (5). При этом выражение (12) определяет интегральные кривые на интегральном многообразии. Таким образом, поставленная задача решена.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ АСТАТИЧЕСКОГО ГИРОСКОПА

Применим вышеизложенную теорию к исследованию движения гироскопа.

Уравнения движения астатического гироскопа в кардановом подвесе с учетом вязкого трения (в осях подвеса) записывается в виде [2].

$$\begin{aligned}
&\left((A+A_1)\cos^2\beta + C_1\sin^2\beta + I_0\right)\ddot{\alpha} + \\
&+H_0\cos\beta\,\dot{\beta} - (A+A_1-C_1)\sin 2\beta\,\dot{\alpha}\dot{\beta} = -m_1\dot{\alpha}, \\
&(A+B_1)\ddot{\beta} + \frac{1}{2}(A+A_1-C_1)\sin 2\beta\,\dot{\alpha}^2 - \\
&-H_0\cos\beta\,\dot{\alpha} = -m_2\dot{\beta}, \\
&C(\dot{\varphi}_0 + \dot{\alpha}\sin\beta) = H_0 = \text{const.}
\end{aligned} \qquad (13)$$

Здесь точка над переменной означает дифференцирование по времени; α и β – углы поворота внешней рамки относительно основания и внутренней рамки относительно внешней; φ_0 – угол собственного вращения ротора; A, A, C и A_1, B_1, C_1 – главные моменты инерции ротора и внутренней рамки относительно осей x, y, z, причем правая ортогональная система координат $Oxyz$ считается жестко связанной с внутренней рамкой подвеса, а оси y, z направлены соответственно по оси вращения внутренней рамки и оси собственного вращения ротора гироскопа (начало координат находится в неподвижной точке O, которая является точкой пересечения осей наружной и внутренней рамок подвесов); I_0 – момент инерции внешней рамки относительно оси его вращения; H_0 – постоянная интегрирования (предполагается, что момент трения в подшипниках, несущих ось ротора, и другие сопротивления компенсируются подводимым вращающим моментом); m_1, m_2 – коэффициенты пропорциональности моментов вязкого трения в осях подвесов.

Рассмотрим движение гироскопа для начальных условий

$$\alpha = \alpha_0,\ \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0,\ \beta = \beta_0,\ \dot{\beta} = \dot{\beta}_0\,. \qquad (14)$$

Вводим безразмерное время

$$\tau = \omega t,\ \omega = \frac{H_0\cos\beta_0}{\sqrt{I(\beta_0)(A+B_1)}}, \qquad (15)$$

где $I(\beta_0) = (A+A_1)\cos^2\beta_0 + C_1\sin^2\beta_0 + I_0$, а также новые переменные

$$\varepsilon q_1 = \frac{d\alpha}{dt}\frac{I(\beta_0)}{H_0\cos\beta_0},\quad \varepsilon q_2 = \beta - \beta_0 \qquad (16)$$

(ε – малый параметр, причем в окончательных формулах следует положить $\varepsilon = 1$) и обозначения

$$\begin{aligned}
&\varepsilon a = \frac{m_1}{H_0\cos\beta_0}\left(\frac{A+B_1}{I(\beta_0)}\right)^{\frac{1}{2}},\quad \varepsilon b = \frac{m_2}{H_0\cos\beta_0}, \\
&2\kappa = \frac{A+A_1-C_1}{I(\beta_0)}\sin 2\beta_0,\quad \mu = \mathrm{tg}\,\beta_0.
\end{aligned} \qquad (17)$$

Тогда уравнения (13) с точностью до величин второго порядка относительно εq_1 и εq_2 можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{dq_1}{d\tau} + \frac{dq_2}{d\tau} = \varepsilon Q_1(q_1, q_2), \\
&\frac{d^2 q_2}{d\tau^2} - q_1 = \varepsilon Q_2(q_1, q_2),
\end{aligned} \qquad (18)$$

где

$$\begin{aligned}
&Q_1(q_1,q_2) \equiv -aq_1 + \mu\frac{dq_2}{d\tau}q_2 + 2\kappa\frac{dq_2}{d\tau}q_1, \\
&Q_2(q_1,q_2) \equiv -b\frac{dq_2}{d\tau} - \kappa q_1^2 - \mu q_1 q_2.
\end{aligned} \qquad (19)$$

Корни характеристического уравнения системы (18) при $\varepsilon = 0$ будут $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm I$ ($i = \sqrt{-1}$) .

Используя преобразования

$$\begin{aligned}
&q_1 = -(x_2 + x_3), \\
&q_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\
&\frac{dq_2}{d\tau} = i(x_2 - x_3),
\end{aligned} \qquad (20)$$

уравнения (18) приведем к виду (1)

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{d\tau} = f_1(x_1, x_2, x_3), \\
&\frac{dx_2}{d\tau} = ix_2 + \varepsilon f_2(x_1, x_2, x_3), \\
&\frac{dx_3}{d\tau} = -ix_3 + \varepsilon f_3(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned} \qquad (21)$$

где

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1,x_2,x_3) \equiv a(x_2+x_3) + \\
&\quad + i\mu(x_2 - x_3)_1(x_1+x_2+x_3) + i2\kappa\left(x_3^2 - x_2^2\right), \\
&f_2(x_1,x_2,x_3) \equiv -\frac{a+b}{2}x_2 + \frac{b-a}{2}x_3 + \\
&\quad + i\frac{\kappa}{2}\left(3x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3\right) - i\mu\left(x_1x_2 + x_2x_3 + x_2^2\right), \\
&f_3(x_1,x_2,x_3) \equiv -\frac{a+b}{2}x_3 + \frac{b-a}{2}x_2 + \\
&\quad + i\frac{\kappa}{2}\left(3x_3^2 - x_2^2 + 2x_2x_3\right) + i\mu\left(x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2\right).
\end{aligned}$$
$$(22)$$

Для интегрирования системы (21) применим метод, изложенный выше.

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau}=\varepsilon\psi_1(\zeta_1,\zeta_2)+\ldots,\quad \frac{d\zeta_2}{d\tau}=\varepsilon\psi_2(\zeta_1,\zeta_2)+\ldots. \tag{23}$$

Уравнения интегрального многообразия систем (21) и (23) ищем в форме (5):

$$\zeta_1=v_1+\varepsilon\varphi_1(x_1,x_2,x_3)+\ldots,\quad \zeta_2=v_2+\varepsilon\varphi_2(x_1,x_2,x_3)+\ldots, \tag{24}$$

где

$$v_1=x_1,\ v_2=x_2x_3 \tag{25}$$

– алгебраические интегралы системы (21) при $\varepsilon = 0$. Функции $\psi_k(\zeta_1, \zeta_2)$, $\varphi_k(x_1, x_2, x_3)$ ($k = 1, 2$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида (6):

$$\begin{aligned} &ix_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}-ix_3\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3}==\psi_1(v_1,v_2)-f_1(x_1,x_2,x_3),\\ &ix_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}-ix_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3}=\psi_2(v_1,v_2)-\\ &-x_3f_2(x_1,x_2,x_3)-x_2f_3(x_1,x_2,x_3).\end{aligned} \tag{26}$$

Функции $\psi_1(v_1, v_2)$, $\psi_2(v_1, v_2)$, можно выбрать так, чтобы уравнения (26) имели полиномиальные относительно x_1, x_2, x_3 решения $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$, $\varphi_2(x_1, x_2, x_3)$.

Находим

$$\psi_1(v_1,v_2)\equiv 0,\ \psi_2(v_1,v_2)\equiv-(a+b)v_2. \tag{27}$$

Тогда получаем уравнения (23) в первом приближении

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau}=0,\quad \frac{d\zeta_2}{d\tau}=-\varepsilon(a+b)\zeta_2. \tag{28}$$

Интегрируя уравнения (28), получим решение

$$\zeta_1=\zeta_{10},\quad \zeta_2=\zeta_{20}e^{-\varepsilon(a+b)\tau}. \tag{29}$$

Здесь постоянные ζ_{10}, ζ_{20} выражаются через начальные условия (14).

При известной величине ζ_1 определим переменную x_1 в первом приближении

$$x_1=\zeta_1-\varepsilon\varphi_1(x_1,x_2,x_3), \tag{30}$$

где $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ – решение уравнения (26):

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x_1,x_2,x_3)\equiv ia(x_2-x_3)-\\ &-\mu x_1(x_2+x_3)+\left(\kappa-\frac{\mu}{2}\right)\left(x_2^2+x_3^2\right).\end{aligned} \tag{31}$$

Ищем переменную x_2 в виде (9)

$$y_2=x_2+\varepsilon\varphi(x_1,x_2,x_3)+\ldots. \tag{32}$$

Здесь неизвестная переменная y_2 и функция $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяют уравнениям типа (10) и (11):

$$\frac{dy_2}{d\tau}=iy_2+\varepsilon q(v_1,v_2)y_2+\ldots, \tag{33}$$

$$\begin{aligned}&ix_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}-ix_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}-i\varphi=\\ &=-f_2(x_1,x_2,x_3)+x_2q(v_1,v_2),\end{aligned} \tag{34}$$

где функция $f_2(x_1, x_2, x_3)$ имеет выражение (22).

Путем выбора функции $q(v_1, v_2)$ можно обеспечить существование полиномиального решения $\varphi(x_1, x_2, x_3)$.

Итак, из уравнения (34) последовательно определяем

$$q(v_1,v_2)\equiv-\frac{a+b}{2}+i\mu v_1, \tag{35}$$

и

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1,x_2,x_3)\equiv i\frac{a-b}{4}x_3+\\ &+(\mu-\kappa)\left(x_2^2-x_2x_3\right)-\frac{\kappa}{2}\left(x_2^2+\frac{x_3^2}{3}\right).\end{aligned} \tag{36}$$

Используя выражение (35) из уравнения (33) в первом приближении находим решение

$$y_2=y_{20}\exp\left(\left(i-\varepsilon\frac{a+b}{2}-\varepsilon i\mu\zeta_{10}\right)\tau\right), \tag{37}$$

где постоянные ζ_{10} и y_{20} выражаются через начальные данные

$$\zeta_{10}=\dot\alpha_0\frac{I(\beta_0)}{H_0\cos\beta_0};\quad y_{20}=-\frac{1}{2}\left(\frac{I(\beta_0)}{H_0\cos\beta_0}+\frac{i\dot\beta_0}{\omega}\right).$$

Из формулы (32) находим переменную x_2

$$x_2=y_2-\varepsilon\varphi(x_1,x_2,x_3)+\ldots \tag{38}$$

где y_2 и $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ определяются из соотношений (37) и (36). Тогда при известном выражении для x_2, переменная x_3 находится из равенства

$$x_3=\bar x_2=\bar y_2-\varepsilon\bar\varphi(x_1,x_2,x_3)+\ldots \tag{39}$$

Здесь черта над буквой означает комплексную сопряженность.

Определив приближенные решения x_1, x_2 и x_3 системы (21) из уравнений (30), (38) и (39), перейдем согласно равенствам (20) и (16) к исходным переменным α и β.

В дальнейшем нас будет интересовать вопрос о систематическом уходе наружного кольца относительно основания при собственных колебаниях гироскопа. Приводим приближенное выражение для угловой скорости наружного кольца

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{H_0 \cos\beta_0}{I(\beta_0)} e^{-\delta t} \left(\lambda\cos\theta t - \nu\sin\theta t + \right.$$
$$+\frac{1}{4}(n_2 - n_1)(\lambda\sin\theta t + \nu\cos\theta t) +$$
$$+\frac{\lambda\kappa}{2}(\lambda\cos\theta t - \nu\sin\theta t) +$$
$$+\kappa e^{-\delta t}\left(\left(\nu^2 - \lambda^2\right)\cos 2\theta t - \lambda\nu\sin 2\theta t\right) +$$
$$\left. +(\kappa - \mu)e^{-\delta t}\left(\frac{\nu^2 + \lambda^2}{2} + \frac{\nu^2 - \lambda^2}{2}\cos 2\theta t + \lambda\nu\sin 2\theta t\right)\right), \quad (40)$$

где

$$\lambda = \dot{\alpha}_0 \frac{I(\beta_0)}{H_0 \cos\beta_0}, \ \nu = \dot{\beta}_0 \omega^{-1},$$
$$\delta = \frac{1}{2}\omega(n_1 + n_2), \theta = \omega + \omega\lambda(\kappa - \mu),$$
$$n_1 = m_1\left(\omega I(\beta_0)\right)^{-1}, n_1 = m_2\omega^{-1}(A + B_1)^{-1},$$

а для ω имеем значение (15).

Из анализа формул (40) следует, что при наличии трения амплитуда нутационных колебаний уменьшается по экспоненциальному закону. При учете нелинейных членов в уравнении движения (13), в собственных колебаниях гироскопа наблюдаются высшие гармоники. Из формулы (40) получаем при отсутствии трения ($m_1 = m_2 = \delta = 0$) постоянный уход наружного кольца со средней угловой скоростью

$$\frac{d\alpha_{cp}}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{\sin\beta_0 (I_0 + C_1)}{H_0 \cos^2\beta_0}\left(\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\beta}_0^2 \frac{A + B_1}{I(\beta_0)}\right). \quad (41)$$

Формула типа (41) впервые была получена Магнусом [3] в 1955 году.

ВЫВОДЫ

Показано, что исследование квазилинейной системы дифференциальных уравнений порядка $n = l + 2p + 2m$ в случае l нулевых, $2p$ чисто мнимых и $2m$ комплексных корней характеристического уравнения порождающей системы можно свести к исследованию вспомогательной системы порядка $N = l + p$. При этом используется интегральное многообразие исходной и вспомогательной систем, а также полиномиально независимые интегралы порождающей системы. Вспомогательная система дифференциальных уравнений позволяет отыскать стационарные режимы исходной системы и исследовать их устойчивость. Вспомогательная система применяется также для интегрирования исходной системы.

Указанный метод исследования используется для изучения нелинейных колебаний астатического гироскопа. Приведена формула для средней угловой скорости прецессии гироскопа при нутационных колебаниях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Валеев К. Г.** Об одной теореме Ляпунова // Математическая физика. Киев, 1971. Вып. 9. С. 17–23.

2. **Николаи Е. Л.** Гироскоп в кардановом подвесе. М.: Наука, 1964.

3. **Magnus K.** Beiteräge zur Dinamik des kraftfreien kardanisch gelagerten Kreisels. ZAMM, Bd. 5.H.1/2, Januar-Februar, 1955.

ОБ АВТОРАХ

Исламов Роберт Рахимович, доц. каф. математики. Дипл. инженер-механик (УАИ, 1966). Канд. физ.-мат. наук по дифференц. и интегральн. уравнениям (Ин-т мат. АН УССР, 1973). Исс. в обл. устойчивости решений обыкн. диф. уравнений.

Исламов Ринат Робертович, дипл. инженер по вычислительн. машинам, комплексам и сетям (УГАТУ, 2004). Канд. физ.-мат. наук (УГАТУ, 2007). Иссл. в обл. дифференц. уравнений, математическ. моделирования динамическ. систем.