Уфа : УГАТУ, 2007 Вестник УГАТУ • Управление, ВТиИ Т. 9, № 7 (25). С. 83–89

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.9

А. В. ЖИБЕР, О. С. КОСТРИГИНА

ТОЧНО ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Получен критерий интегрируемости по Дарбу двумерных динамических систем уравнений. Описан класс точно интегрируемых моделей, обладающих полным набором интегралов первого и второго порядков. *Характеристическая алгебра Ли; x- и y-интегралы; тензор Римана*

Работа посвящена исследованию проблемы интегрируемости нелинейных двумерных систем

$$u_{xy} = F(u, u_x, u_y)(u^i_{xy} = F^i, \quad i = 1, 2, \dots , n). \tag{1}$$

Последние описывают широкий класс нелинейных явлений в самых различных областях теоретической и математической физики.

Изучаемые системы (1) обладают нетривиальной группой внутренних симметрий, генерируемой алгеброй Ли-Беклунда. Симметрийный метод классификации интегрируемых уравнений очень эффективен в случае эволюционных уравнений, однако, при симметрийной классификации гиперболических уравнений возникают серьезные технические трудности даже в простейшей ситуации (см., например, [1], [2]).

Для решения задачи классификации интегрируемых гиперболических систем уравнений (1) используется подход, основанный на исследовании структуры характеристической алгебры Ли.

Рассмотрим набор независимых переменных

$$u, u_1, \bar u_1, u_2, \bar u_2, \dots , u_n, \bar u_n, \dots ,$$

где

$$u_1 = u_x, \quad \bar u_1 = u_y, \quad u_2 = u_{xx}, \quad \bar u_2 = u_{yy}, \dots .$$

Обозначим через $\bar D(D)$ — оператор полного дифференцирования по переменной $y(x)$.

Определение 1. *Функция $W(u, u_1, u_2, \dots , u_m)$ называется x-интегралом порядка m системы* (1), *если $\bar D(W) = 0$. Аналогично y-интеграл m-го порядка — это функция $\bar W(u, \bar u_1, \bar u_2, \dots , \bar u_m)$, удовлетворяющая соотношению $D(\bar W) = 0$.*

X-интегралы $W^1, W^2, \dots , W^k$ называются независимыми, если D^iW^j функционально независимы. В статье [3] показано, что максимальное число независимых x-интегралов равно порядку n исходной системы.

Определение 2. *Система уравнений* (1) *называется интегрируемой по Дарбу, если у нее существует максимальное число независимых x- и y-интегралов.*

Понятие характеристической алгебры Ли было введено в [4] для систем гиперболических уравнений вида

$$u^i_{xy} = F^i(u), \quad i = 1, 2, \dots , n \tag{2}$$

(см. также [5]–[9]).

Определим x- и y-характеристические алгебры Ли системы уравнений (1). Пусть F — пространство локально-аналитических функций, зависящих от конечного числа переменных $\bar u_1, u, u_1, u_2, \dots , u_k \dots$. Оператор $\bar D$ на функциях из F действует по правилу

$$\bar D = \bar u^i_2 X_i + X_{n+1},$$

где

$$X_i = \frac{\partial}{\partial \bar u^i_1}, \quad i = 1, 2, \dots , n,$$

$$X_{n+1} = \bar u^i_1 \frac{\partial}{\partial u_i} + F^i \frac{\partial}{\partial u^i_1} + D(F^i)\frac{\partial}{\partial u^i_2} + \dots + \\ + \dots + D^{k-1}(F^i)\frac{\partial}{\partial u^i_k} + \dots .$$

Выполнено при поддержке грантов РФФИ №№ 05-01-00775-а,06-01-92051-КЭ-а, 05-01-97910-р_агидель_а

X-характеристическая алгебра Ли уравнений (1) есть алгебра A, порожденная векторными полями $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$. Аналогично определяется y-характеристическая алгебра Ли $\bar{A}$.

В статье [5] приведены примеры двухкомпонентных динамических систем (1) с конечномерными x- и y-характеристическими алгебрами Ли. Так, например, для систем уравнений

$$u^1_{xy} = \frac{u^2 u^1_x u^1_y}{u^1 u^2 + c},$$
$$u^2_{xy} = \frac{u^1 u^2_x u^2_y}{u^1 u^2 + c}, \quad c = \mathrm{const},$$
$$u^1_{xy} = \frac{u^1_x u^1_y}{u^1 + u^2},$$
$$u^2_{xy} = \frac{u^2_x u^2_y}{u^1 + u^2},$$

$\dim A = \dim \bar{A} = 5$.

X- и y-интегралы этих систем имеют вид

$$\omega_1 = \frac{u^1_x u^2_x}{u^1 u^2 + c}, \quad \omega_2 = \frac{u^1_{xx}}{u^1_x} - \frac{u^1 u^2_x}{u^1 u^2 + c},$$
$$\bar{\omega}_1 = \frac{u^1_y u^2_y}{u^1 u^2 + c}, \quad \bar{\omega}_2 = \frac{u^1_{yy}}{u^1_y} - \frac{u^1 u^2_y}{u^1 u^2 + c}$$

и

$$\omega_1 = \frac{u^1_x u^2_x}{u^1 + u^2}, \quad \omega_2 = \frac{u^1_{xx}}{u^1_x} - \frac{u^2_x}{u^1 + u^2},$$
$$\bar{\omega}_1 = \frac{u^1_y u^2_y}{u^1 + u^2}, \quad \bar{\omega}_2 = \frac{u^1_{yy}}{u^1_y} - \frac{u^2_y}{u^1 + u^2}$$

соответственно.

В настоящей работе получен критерий интегрируемости по Дарбу нелинейных гиперболических систем уравнений (1), приведен список точно интегрируемых моделей по Дарбу с x- и y-характеристическими алгебрами Ли A и $\bar{A}$ размерности $\dim A = \dim \bar{A} = 2n$. А также описан класс двухкомпонентных систем (1), обладающих тремя интегралами первого порядка и одним второго.

1. КРИТЕРИЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПО ДАРБУ

В статьях [4], [6] показано, что система (2) обладает полным набором x-интегралов тогда и только тогда, когда характеристическая алгебра конечномерна. В этом пункте мы обобщаем этот результат на уравнения (1). А именно справедливо утверждение.

Теорема 1. *Система уравнений (1) интегрируема по Дарбу, если и только если характеристические алгебры Ли A и $\bar{A}$ конечномерны. При этом, если n_k — число x-интегралов k-го порядка, $k = 1, 2, \ldots, m$, то*

$$\dim A = n + \sum_{i=1}^{m} i n_i. \tag{3}$$

Приведем краткую схему доказательства теоремы 1.

Пусть система уравнений (1) интегрируема по Дарбу. Тогда существует набор x-интегралов $\omega^i(u, u_1, \ldots, u_s)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ порядка s, удовлетворяющий условию

$$\det\left(\frac{\partial \omega^i}{\partial u^j_s}\right) \neq 0. \tag{4}$$

Теперь, в силу (4) от переменных $\bar{u}_1, u, u_1, \ldots, u_m, \ldots$ можно перейти к набору независимых переменных $\bar{u}_1, u, u_1, \ldots, u_{s-1}, \omega, \omega_1, \ldots, \omega_m, \ldots$, где $\omega = (\omega^1, \ldots, \omega^n)$, $\omega_k = D^k \omega$, $k = 1, 2, \ldots$. В новых переменных оператор X_{n+1} запишется так:

$$\tilde{X}_{n+1} = \bar{u}^i_1 \frac{\partial}{\partial u_i} + F^i \frac{\partial}{\partial u^i_1} + D(F^i)\frac{\partial}{\partial u^i_2} + \ldots + D^{s-2}(F^i)\frac{\partial}{\partial u^i_{s-1}}.$$

Ясно, что алгебра Ли, порожденная элементами $X_1, \ldots, X_n, \tilde{X}_{n+1}$, конечномерна.

Обратно, предположим, что алгебра A конечномерна. Обозначим через L линейную оболочку элементов $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Ясно, что

$$A = L \oplus B.$$

Удобно в дальнейшем рассматривать подалгебру B. Последняя содержит элементы вида

$$\tilde{X}_i = [X_i, X_{n+1}] = \frac{\partial}{\partial u^i} + \alpha^k_{i1}\frac{\partial}{\partial u^k_1} + \alpha^k_{i2}\frac{\partial}{\partial u^k_2} + \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если $\dim B = n$, то B есть линейная оболочка элементов $\tilde{X}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и система уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} + \alpha^k_{i1}\frac{\partial}{\partial u^k_1}\right)\omega = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

имеет n функционально независимых решений $\omega^i(u, u_1)$, образующих полный набор

x-интегралов первого порядка. В этом случае, так как $\dim L = n$ и $m = 1$, $n_1 = n$, то формула (3) верна.

Пусть $\dim B = n+1$. Тогда базис алгебры B состоит из элементов $\tilde{X}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, где

$$\tilde{X}_{n+1} = \alpha^k_{n+1\ m}\frac{\partial}{\partial u^k_m} + \\ + \alpha^k_{n+1\ m+1}\frac{\partial}{\partial u^k_{m+1}} + \ldots,\ m \geq 1.$$

Если $m = 1$, то система уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} + \alpha^k_{i1}\frac{\partial}{\partial u^k_1}\right)\omega = 0,$$
$$\alpha^k_{n+1\ 1}\frac{\partial \omega}{\partial u^k_1}\omega = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

имеет $n-1$ функционально независимых решений $\omega^i(u, u_1)$, которые являются x-интегралами.

Далее рассмотрим уравнения

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial u^i} + \alpha^k_{i1}\frac{\partial}{\partial u^k_1} + \alpha^k_{i2}\frac{\partial}{\partial u^k_2}\right)W = 0,\\ \left(\alpha^k_{n+1\ 1}\frac{\partial}{\partial u^k_1} + \alpha^k_{n+1\ 2}\frac{\partial}{\partial u^k_2}\right)W = 0,\\ i = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{5}$$

Система уравнений (5) имеет $2n-1$ функционально независимых решений

$$W,\ \omega^i,\ D\omega^i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

при этом $\mathrm{ord} W = 2$. Таким образом, исходная система (1) обладает полным набором x-интегралов $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}, W$. При этом справедлива формула (3), так как $n_1 = n-1$, $n_2 = 1$.

Аналогично рассматриваются случаи $m > 1$ и $\dim B > n+1$.

2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ИНТЕГРАЛАМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В этом пункте рассматриваются системы уравнений (1) с полным набором x- и y-интегралов $\omega^i(u, u_1)$, $\bar{\omega}^i(u, \bar{u}_1)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то есть с x- и y-характеристическими алгебрами Ли A и $\bar{A}$ размерности $2n$.

Из уравнений

$$\bar{D}(\omega_i) = 0, \quad D(\bar{\omega}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

следует, что правая часть системы (1) имеет вид

$$F^i(u, u_1, \bar{u}_1) = -\Gamma^i_{kj}(u)u^k_1\bar{u}^j_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Теорема 2. *Система уравнений (1), (6) обладает максимальным числом x- и y-интегралов первого порядка, если и только если выполнены соотношения*

$$\begin{gathered}\tilde{R}^i_{pqj} = \frac{\partial}{\partial u^q}\Gamma^i_{pj} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{pq} + \\ + \Gamma^s_{pj}\Gamma^i_{sq} - \Gamma^i_{vj}\Gamma^v_{pq} = 0,\\ R^i_{qpj} = \frac{\partial}{\partial u^p}\Gamma^i_{jq} - \frac{\partial}{\partial u^j}\Gamma^i_{pq} + \\ + \Gamma^i_{ps}\Gamma^s_{jq} - \Gamma^i_{jv}\Gamma^v_{pq} = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Здесь R^i_{qpj} — тензор Римана, а $\tilde{R}^i_{pqj}$ — сопряженный тензор Римана.

X-интегралы $\omega^i(u, u_1)$ задаются формулами

$$\omega^i(u, u_1) = A^i_s(u)u^s_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где функции $A^i_s(u)$ — решение системы уравнений

$$\frac{\partial}{\partial u^k}A^i_s(u) - \Gamma^j_{sk}A^i_j(u) = 0. \tag{8}$$

Условие совместности уравнений (8) записывается так $\tilde{R}^i_{pqj} = 0$ (см. (7)).

Отметим, что соотношения (7) эквивалентны равенствам $[\tilde{X}_i, \tilde{X}_j] = 0$, $[\tilde{Y}_i, \tilde{Y}_j] = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Здесь

$$\tilde{X}_i = [X_i, X_{n+1}] = \frac{\partial}{\partial u^i} - \Gamma^s_{ki}(u)u^k_x\frac{\partial}{\partial u^s_x} + \ldots,$$
$$\tilde{Y}_i = [Y_i, Y_{n+1}] = \frac{\partial}{\partial u^i} - \Gamma^s_{ij}(u)u^j_y\frac{\partial}{\partial u^s_y} + \ldots.$$

При этом векторные поля $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \ldots, \tilde{X}_n$ образуют базис x-характеристической алгебры Ли A, а поля $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, \ldots, \tilde{Y}_n$ задают базис алгебры $\bar{A}$.

С другой стороны, соотношения (7) выражают тот факт, что инварианты Лапласа линеаризованной системы уравнений для системы (1), (6) есть нулевые матрицы.

Для двухкомпонентных систем (1) справедливо утверждение.

Теорема 3. *Любая система уравнений (1) ($n = 2$) с полным набором x- и y-интегралов первого порядка точечным преобразованием $u = \phi(v)$ приводится к следующей*

$$v^i_{xy} = v^2_x v^1_y - v^k_x v^k_y \frac{\partial}{\partial v^k} ln\left(p(v^1) + q(v^2)\right), \quad i = 1, 2. \tag{9}$$

Интегралы системы (9) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= v^1_x - v^2_x,\\
\omega_2 &= \left[e^{-v^1} p(v^1) + s(v^1)\right] v^1_x + \\
&\qquad + \left[e^{-v^1} q(v^2) - s(v^1)\right] v^2_x,\\
\bar\omega_1 &= v^1_y - v^2_y,\\
\bar\omega_2 &= \left[e^{-v^2} p(v^1) - r(v^2)\right] v^1_y + \\
&\qquad + \left[e^{-v^2} q(v^2) + r(v^2)\right] v^2_y,
\end{aligned}$$

где функции $s(v^1), r(v^2), p(v^1)$ и $q(v^2)$ связаны соотношениями

$$s'(v^1) = e^{-v^1} p(v^1),\ r'(v^2) = e^{-v^2} q(v^2).$$

3. ДВУХКОМПОНЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Здесь мы рассматриваем системы (1) при $n = 2$, обладающие тремя интегралами первого порядка и одним второго.

Теорема 4. *Любая невырожденная система уравнений (1) с интегралами*

$$\begin{aligned}
&\omega^1(u, u_1), \quad \omega^2(u, u_1, u_2),\\
&\bar\omega^1(u, \bar u_1), \quad \bar\omega^2(u, \bar u_1)
\end{aligned} \tag{10}$$

точечной заменой приводится к одному из следующих видов

$$u^i_{xy} = \Gamma^i_{kj}(u) u^k_1 \bar u^j_1, \quad i = 1, 2$$

или

$$u^1_{xy} = u^1_1 \bar u^2_1, \quad u^2_{xy} = \bar r(u, \bar u_1) u^1_1. \tag{11}$$

Доказательство. Из условий (10) следуют соотношения

$$\begin{aligned}
&\bar\omega^1_{u^1} u^1_1 + \bar\omega^1_{u^2} u^2_1 + \bar\omega^1_{\bar u^1_1} F^1 + \bar\omega^1_{\bar u^2_1} F^2 = 0,\\
&\bar\omega^2_{u^1} u^1_1 + \bar\omega^2_{u^2} u^2_1 + \bar\omega^2_{\bar u^1_1} F^1 + \bar\omega^2_{\bar u^2_1} F^2 = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Так как

$$\begin{vmatrix} \bar\omega^1_{\bar u^1_1} & \bar\omega^1_{\bar u^2_1} \\ \bar\omega^2_{\bar u^1_1} & \bar\omega^2_{\bar u^2_1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то из соотношений (12) получаем,что

$$\begin{aligned}
F^1 &= \bar p u^1_1 + \bar q u^2_1,\\
F^2 &= \bar r u^1_1 + \bar s u^2_1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\bar p, \bar q, \bar r, \bar s$ — функции переменных $u, \bar u_1$.

Равенство $\bar D \omega^1 = 0$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\omega^1_{u^1} \bar u^1_1 + \omega^1_{u^2} \bar u^2_1 + \omega^1_{u^1_1}(\bar p u^1_1 + \bar q u^2_1) + \\
&\qquad + \omega^1_{u^2_1}(\bar r u^1_1 + \bar s u^2_1) = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ясно, что $(\omega^1_{u^1_1})^2 + (\omega^1_{u^2_1})^2 \neq 0$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\omega^1_{u^1_1} \neq 0$. Тогда или $\bar p u^1_1 + \bar q u^2_1 = 0$, или $\bar p u^1_1 + \bar q u^2_1 \neq 0$. В первом случае мы приходим к вырожденной системе

$$u^1_{xy} = 0, \quad u^2_{xy} = \bar r u^1_1 + \bar s u^2_1.$$

Во втором случае из (14) следуют формулы

$$\begin{aligned}
\bar p &= c_1 \bar r + c_2 \bar s + c_3 \bar u^1_1 + c_4 \bar u^2_1,\\
\bar q &= d_1 \bar r + d_2 \bar s + d_3 \bar u^1_1 + d_4 \bar u^2_1,
\end{aligned}$$

где $c_i = c_i(u), d_i = d_i(u), i = \overline{1, 4}$.

Подстановка последних соотношений в (14) дает

$$\begin{aligned}
&\bar r[\omega^1_{u^1_1}(c_1 u^1_1 + d_1 u^2_1) + u^1_1 \omega^1_{u^2_1}] + \\
&+ \bar s[\omega^1_{u^1_1}(c_2 u^1_1 + d_2 u^2_1) + u^2_1 \omega^1_{u^2_1}] + A \bar u^1_1 + B \bar u^2_1 = 0.
\end{aligned}$$

Здесь A, B — функции переменных u, u_1.

Если

$$\begin{aligned}
&\omega^1_{u^1_1}(c_1 u^1_1 + d_1 u^2_1) + u^1_1 \omega^1_{u^2_1} = 0,\\
&\omega^1_{u^1_1}(c_2 u^1_1 + d_2 u^2_1) + u^2_1 \omega^1_{u^2_1} = 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

то

$$\begin{vmatrix} c_1 u^1_1 + d_1 u^2_1 & u^1_1 \\ c_2 u^1_1 + d_2 u^2_1 & u^2_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно,

$$c_1 u^1_1 u^2_1 + d_1 (u^2_1)^2 = c_2 (u^1_1)^2 + d_2 u^1_1 u^2_1$$

и поэтому

$$d_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_1 = d_2 = c.$$

Таким образом

$$\bar{p} = c\bar{r} + c_3\bar{u}_1^1 + c_4\bar{u}_1^2,$$
$$\bar{q} = c\bar{s} + d_3\bar{u}_1^1 + d_4\bar{u}_1^2,$$

и мы приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{xy}^1 &= c[\bar{r}u_1^1 + \bar{s}u_1^2] + P, \\ u_{xy}^2 &= \bar{r}u_1^1 + \bar{s}u_1^2, \end{aligned} \tag{16}$$

где $c = c(u)$, $P = \alpha_1 u_1^1\bar{u}_1^1 + \alpha_2 u_1^1\bar{u}_1^2 + \alpha_3 u_1^2\bar{u}_1^1 + \alpha_4 u_1^2\bar{u}_1^2$, $\alpha_i = \alpha_i(u)$, $i = \overline{1,4}$. Систему (16) точечной заменой $u^1 = \lambda(u^1, v^1)$, $v = v$ можно привести к виду

$$u_{xy}^1 = P, \quad u_{xy}^2 = \bar{r}u_1^1 + \bar{s}u_1^2. \tag{17}$$

Теперь, из (14) при $\omega^1_{u_1^2} \neq 0$ получаем, что

$$\bar{r}u_1^1 + \bar{s}u_1^2 = \gamma_1 u_1^1\bar{u}_1^1 + \gamma_2 u_1^1\bar{u}_1^2 + \gamma_3 u_1^2\bar{u}_1^1 + \gamma_4 u_1^2\bar{u}_1^2,$$
$$\gamma_i = \gamma_i(u), \quad i = \overline{1,4},$$

а значит, система (17) имеет вид

$$u_{xy}^i = \Gamma_{ks}^i(u^i)u_x^k u_y^s, \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Можно показать, что для системы (1), обладающей интегралами второго порядка ω_1^1 и ω^2, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} u_2^1 &= \alpha\omega^2 + \beta\omega_1^1 + \gamma, \\ u_2^2 &= \theta\omega^2 + \mu\omega_1^1 + \epsilon, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \theta, \mu, \epsilon$ — функции переменных u, u_1.

Из соотношений (19) дифференцированием получаем равенства

$$\begin{aligned} F^1_{u_1^1}u_2^1 + F^1_{u_1^2}u_2^2 &= \bar{D}(\alpha)\omega^2 + \bar{D}(\beta)\omega_1^1 + \dots, \\ F^2_{u_1^1}u_2^1 + F^2_{u_1^2}u_2^2 &= \bar{D}(\theta)\omega^2 + \bar{D}(\mu)\omega_1^1 + \dots, \end{aligned} \tag{20}$$

где многоточием обозначены слагаемые, зависящие от переменных u, u_1, $\bar{u}_1$. Далее, из (19), (20) с учетом соотношений(13) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{p}(\alpha\omega^2 + \beta\omega_1^1) + \bar{q}(\theta\omega^2 + \mu\omega_1^1) &= \\ &= \bar{D}(\alpha)\omega^2 + \bar{D}(\beta)\omega_1^1, \\ \bar{r}(\alpha\omega^2 + \beta\omega_1^1) + \bar{s}(\theta\omega^2 + \mu\omega_1^1) &= \\ &= \bar{D}(\theta)\omega^2 + \bar{D}(\mu)\omega_1^1, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \alpha\bar{p} + \theta\bar{q} &= \alpha_{u^1}\bar{u}_1^1 + \alpha_{u^2}\bar{u}_1^2 + \\ &+ \alpha_{u_1^1}(\bar{p}u_1^1 + \bar{q}u_1^2) + \alpha_{u_1^2}(\bar{r}u_1^1 + \bar{s}u_1^2), \\ \beta\bar{p} + \mu\bar{q} &= \beta_{u^1}\bar{u}_1^1 + \beta_{u^2}\bar{u}_1^2 + \\ &+ \beta_{u_1^1}(\bar{p}u_1^1 + \bar{q}u_1^2) + \beta_{u_1^2}(\bar{r}u_1^1 + \bar{s}u_1^2), \\ \alpha\bar{r} + \theta\bar{s} &= \theta_{u^1}\bar{u}_1^1 + \theta_{u^2}\bar{u}_1^2 + \\ &+ \theta_{u_1^1}(\bar{p}u_1^1 + \bar{q}u_1^2) + \theta_{u_1^2}(\bar{r}u_1^1 + \bar{s}u_1^2), \\ \beta\bar{r} + \mu\bar{s} &= \mu_{u^1}\bar{u}_1^1 + \mu_{u^2}\bar{u}_1^2 + \\ &+ \mu_{u_1^1}(\bar{p}u_1^1 + \bar{q}u_1^2) + \mu_{u_1^2}(\bar{r}u_1^1 + \bar{s}u_1^2). \end{aligned} \tag{21}$$

При $\omega^1_{u_1^2} = 0$ имеем (см. (19))

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{\omega^1_{u_1^1}}, \quad \theta \neq 0.$$

Тогда, учитывая (17), из первого и третьего равенств системы (21) находим

$$\bar{q} = 0,$$
$$\bar{s} = \varphi_1(u)\bar{u}_1^1 + \varphi_2(u)\bar{u}_1^2, \quad \text{при} \quad \theta_{u_1^2} = 0,$$
$$\bar{r} = \psi_1(u)\bar{s} + \psi_2(u)\bar{u}_1^1 + \psi_3(u)\bar{u}_1^2, \ \text{при } \theta_{u_1^2} \neq 0.$$

Таким образом, система (17) приводится к одной из следующих:

$$u_{xy}^1 = (\alpha_1\bar{u}_1^1 + \alpha_2\bar{u}_1^2)u_1^1, \quad u_{xy}^2 = \bar{r}u_1^1 + P, \tag{22}$$

либо

$$\begin{aligned} u_{xy}^1 &= (\alpha_1\bar{u}_1^1 + \alpha_2\bar{u}_1^2)u_1^1, \\ u_{xy}^2 &= (\alpha_3 u_1^1 + u_1^2)\bar{s} + P, \end{aligned} \tag{23}$$

здесь $P = \mu_1 u_1^1\bar{u}_1^1 + \mu_2 u_1^1\bar{u}_1^2 + \mu_3 u_1^2\bar{u}_1^1 + \mu_4 u_1^2\bar{u}_1^2$, $\mu_i = \mu_i(u, v)$, $\alpha_j = \alpha(u)$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,3}$.

Если $\alpha_2 = 0$, то в силу первых уравнений систем (22), (23) имеем

$$\omega^1_{u^1}\bar{u}_1^1 + \omega^1_{u^2}\bar{u}_1^2 + \omega^1_{u_1^1}\alpha_1 u_1^1\bar{u}_1^1 = 0.$$

Поэтому $\omega^1_{u^2} = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_1(u^1)$. Теперь точечным преобразованием $u^1 = f(u^1)$, $u^2 = u^2$ системы (22), (23) приводятся к следующим

$$u_{xy}^1 = u_1^1\bar{u}_1^1, \quad u_{xy}^2 = \bar{r}u_1^1 + P, \tag{24}$$

$$u_{xy}^1 = u_1^1\bar{u}_1^1, \quad u_{xy}^2 = (\alpha_3 u_1^1 + u_1^2)\bar{s} + P. \tag{25}$$

Сделав замену $u^1 = u^1$, $u^2 = g(u^1, u^2)$ для системы (25), получаем

$$u_{xy}^1 = u_1^1\bar{u}_1^1, \quad u_{xy}^2 = \bar{s}u_1^2 + P. \tag{26}$$

И, наконец, системы (24), (26) заменой $u^1 = h(u^1)$ приводятся к виду

$$u^1_{xy} = 0, \quad u^2_{xy} = \bar{r} u^1_1 + P,$$
$$u^1_{xy} = 0, \quad u^2_{xy} = \bar{s} u^2_1 + P.$$

Теперь, при $\alpha_2 \neq 0$ замена $u^1 = u^1$, $u^2 = z(u^1, u^2)$ системы (22), (23) преобразует в следующие:

$$u^1_{xy} = \alpha u^1_1 \bar{u}^1_1, \quad u^2_{xy} = \bar{r} u^1_1 + P, \tag{27}$$

$$u^1_{xy} = \alpha u^1_1 \bar{u}^1_1, \quad u^2_{xy} = (\alpha_3 u^1_1 + u^2_1)\bar{s} + P. \tag{28}$$

Если x-интеграл первого порядка зависит от переменной u^2_1, то из (14) получаем, что правые части системы (27), (28) есть однородные полиномы второй степени.

При $\omega^1_{u^2} = 0$ получаем, что $\alpha = \alpha(u^2)$ и после точечной замены $\int \alpha(u^2) du^2 = u^2$, $u^1 = u^1$ приходим к уравнениям

$$u^1_{xy} = u_1 \bar{u}^2_1, \quad u^2_{xy} = \bar{r} u^1_1 + P, \tag{29}$$

$$u^1_{xy} = u^1_1 \bar{u}^2_1, \quad u^2_{xy} = (\alpha u^1_1 + u^2_1)\bar{s} + P. \tag{30}$$

Рассмотрим y-интеграл системы (30). Имеем

$$\bar{\omega}^1_{u^1} u^1_1 + \bar{\omega}^1_{u^2} u^2_1 + \bar{\omega}^1_{\bar{u}^1_1} u^1_1 \bar{u}^2_1 + \\ + \bar{\omega}^1_{\bar{u}^2_1}[(\alpha u^1_1 + u^2_1)\bar{s} + P_{u^1_1} u^1_1 + P_{u^2_1} u^2_1] = 0.$$

Последнее соотношение запишем в виде

$$X\bar{\omega}^1 + Y\bar{\omega}^1 = 0,$$

где

$$X = \frac{\partial}{\partial u^1} + \bar{u}^2_1 \frac{\partial}{\partial \bar{u}^1_1} + (\alpha \bar{s} + P_{u^1_1}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^2_1},$$
$$Y = \frac{\partial}{\partial u^2} + (\bar{s} + P_{u^2_1}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^2_1}.$$

Так как система (30) обладает двумя y-интегралами первого порядка, то $[X, Y] = 0$. Откуда находим, что $\bar{s} + P_{u^2_1} = 0$, а следовательно, система (30) имеет «квадратичный» вид.

Если соотношения (15) не выполнены, то либо

$$\bar{r} = p(u)\bar{s} + q(u)\bar{u}^1_1 + \theta(u)\bar{u}^2_1,$$

либо

$$\bar{s} = p(u)\bar{r} + q(u)\bar{u}^1_1 + \theta(u)\bar{u}^2_1.$$

Имеем три случая:

1. При $p(u) \neq 0, \bar{r} = p(u)\bar{s} + q(u)\bar{u}^1_1 + \theta(u)\bar{u}^2_1$

$$\begin{cases} u^1_{xy} = [c_1 p\bar{s} + c_2\bar{s}]u^1_1 + [\alpha_1 p\bar{s} + \alpha_2\bar{s}]u^2_1 + P \\ u^2_{xy} = p\bar{s}u^1_1 + su^2_1 + (q\bar{u}^1_1 + \theta\bar{u}^2_1)u^1_1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u^1_{xy} = (\alpha(u)u^1_1 + \beta(u)u^2_1)\bar{s} + P \\ u^2_{xy} = [u^2_1 + pu^1_1]\bar{s} + \tilde{P}, \quad p \neq 0. \end{cases} \tag{31}$$

2. При $p(u) = 0$ и $\bar{r} = q(u)\bar{u}^1_1 + \theta(u)\bar{u}^2_1$

$$\begin{cases} u^1_{xy} = c_2\bar{s}u^1_1 + P \\ u^2_{xy} = \bar{s}u^2_1 + \tilde{P}. \end{cases} \tag{32}$$

3. При $p(u) = 0$ и $\bar{s} = q(u)\bar{u}^1_1 + \theta(u)\bar{u}^2_1$

$$\begin{cases} u^1_{xy} = c_1\bar{u}^1_1 + \alpha_1\bar{r}u^2_1 + P \\ u^2_{xy} = \bar{r}u^1_1 + \tilde{P}. \end{cases} \tag{33}$$

Точечной заменой уравнения (31)–(33) приводятся к виду

$$u^1_{xy} = P, \quad u^2_{xy} = \bar{r}(\alpha u^1_1 + \beta u^2_1) + P_1. \tag{34}$$

Здесь P, P_1 — однородные полиномы второй степени по переменным $u_1, \bar{u}_1$. Для системы (34) верны предыдущие рассуждения.

Таким образом, любая невырожденная система (1) с интегралами (10) точечной заменой приводится к либо к системе (18), либо к системе (29). Тем самым теорема доказана.

Замечание. Система (11) обладает интегралами вида (10) тогда и только тогда, когда функция $\bar{r}$ является решением следующего уравнения

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + \bar{u}^2_1 \frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{u}^1_1} + \bar{r}\frac{\partial \bar{r}}{\partial \bar{u}^2_1} + \bar{u}^1_1 \frac{P'(u^1)}{2} + P(u^1)\bar{u}^2_1 = 0.$$

При этом

$$\omega^1 = e^{-u^2} u^1_1,$$

$$\omega^2 = u^2_2 - u^2_1 \frac{D\omega^1}{\omega} - \frac{(u^2_1)^2}{2} + \frac{1}{2}P(u^1)e^{2u^2}(\omega^1)^2,$$

а y-интегралы $\bar{\omega}^1$ и $\bar{\omega}^2$ определяются из уравнения в частных производных первого порядка

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} + \bar{u}^2_1 \frac{\partial}{\partial \bar{u}^1_1} + \bar{r}\frac{\partial}{\partial \bar{u}^2_1}\right)\bar{\omega} = 0.$$

Для таких систем уравнений x-характеристическая алгебра Ли A имеет размерность 5, а размерность y-характеристической алгебры Ли $\bar{A}$ равна 4.

ВЫВОДЫ

Для системы нелинейных уравнений на основе понятия характеристической алгебры Ли предложен тест на проверку интегрируемости в квадростурах.

Построены все n-компонентные волновые уравнения, имеющие $2n$ законов сохранения первого порядка специального вида (x- y-интегралов).

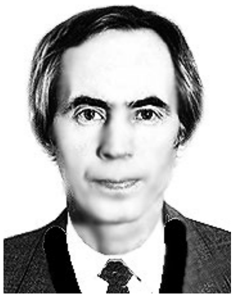
Найдены новые примеры двухкомпонентных систем уравнений с тремя интегралами первого порядка и одним второго.

Предложенные интегрируемые модели могут быть использованы при исследовании волновых процессов, в частности, для проверки и обоснования вычислительных экспериментов в этой области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Жибер, А. В.** Системы уравнений $u_x = p(u,v)$, $v_y = q(u,v)$, обладающие симметриями / А. В. Жибер, А. Б. Шабат // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 29–33.
2. **Жибер, А. В.** Квазилинейные гиперболические уравнения с бесконечной алгеброй симметрий / А. В. Жибер // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58, № 4. С. 33–54.
3. **Гурьева, А. М.** О характеристическом уравнении квазилинейной гиперболической системы уравнений / А. М. Гурьева, А. В. Жибер // Вестник УГАТУ. 2005. Т. 6, № 2 (13). С. 26–33.
4. **Лезнов, А. Н.** Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем / А. Н. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат // Теоретическая и математическая физика. 1982. Т. 51, № 1. С. 10–21.
5. **Костригина, О. С.** О нелинейных гиперболических системах уравнений с конечномерной характеристической алгеброй Ли / О. С. Костригина // Труды теор. и мат. физики : тр. 38-й рег. молодежн. конф. 29 янв.–2 фев. Екб. : УрО РАН, ИММ, 2007. С. 164–168.
6. **Шабат, А. Б.** Экспоненциальные системы типа 1 и матрицы Картана : препринт / А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов. Уфа : БФ АН СССР, 1981. 20 с.
7. **Habibullin, I. T.** Characteristic algebras of fully discrete hyperbolic type equations / I. T. Habibullin // Semmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2005. V. 1, № 23. P. 1–9.
8. **Жибер, А. В.** О характеристических алгебрах Ли уравнений $u_{xy} = f(u, u_x)$ / А. В. Жибер, Р. Д. Муртазина // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 7. С. 65–78.
9. **Жибер, А. В.** Квадратичные системы, симметрия, характеристичекие и полные алгебры / А. В. Жибер, Ф. Х. Мукминов // Задачи математической физики и ассимптотика их решений : сб. науч. тр. БНЦ УрО АН СССР. Уфа, 1991. С. 14–32.

ОБ АВТОРАХ



Жибер Анатолий Васильевич, проф., вед. науч. сотр. ИМ УНЦ РАН. Дипл. математик (Новосиб. гос. ун-т, 1969). Д-р физ.-мат. наук по диф. уравнениям (защ. в ИМиМ УрОРАН, Екб., 1994). Иссл. в обл. совр. группового анализа диф. уравнений.

Костригина Ольга Сергеевна, асп. каф. математики. Дипл. инж.-мат. (УГАТУ, 2005). Готовит дис. о нелин. интегрируемых гиперболич. сист. уравнений и характеристич. алгебрах Ли.