

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК ???

Н. И. ТЮКОВ, А. И. ДАУТОВ, Е. А. ЗАКУРДАЕВА

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ПРОЦЕССА ФОРМОВАНИЯ ДЕТАЛЕЙ ВЕРТОЛЕТА
ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Рассматривается разработка аналитической математической модели процесса формования многослойных крупногабаритных конструкций из композиционных материалов в автоклаве, которая учитывает динамику теплофизического процесса. Полимеризация; формование крупногабаритных многослойных конструкций; автоклав; конвекция; кинетика сушки; оператор Лапласа; критерий Пекле

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач при производстве каркасов вертолетов является автоматическое управление процессом формования крупногабаритных многослойных конструкций из композиционных материалов, который в значительной степени влияет на объем, качество и себестоимость готовой продукции. Для этого необходима разработка аналитической математической модели процесса формования изделий в автоклаве. В качестве многослойной крупногабаритной конструкции рассматривается каркас двери кабины вертолета.

Математические модели, применяемые на разных уровнях, могут быть самыми разнообразными и выбор того или иного метода во многом будет определяться спецификой задачи. Методы описания с иерархической структурой хорошо зарекомендованы при описании теплофизических объектов.

Из всего многообразия технологических процессов, производства изделий из композиционных материалов выделим наиболее трудоемкие и энергоемкие процессы, оказывающие наибольшее влияние на качество композитов. К ним относятся:

- процессы разогрева конструкции;
- процессы формообразования;
- процессы полимеризации;
- процессы вакуумирования.

Перечисленные процессы могут быть в общем виде описаны математической моделью «вход-выход» вида [1]:

$$\vec{Q} = \varphi[\vec{X}, \vec{F}(\vec{U}, \vec{f})]. \quad (1)$$

Вследствие сложности составления общей математической модели процесса производства изделий из композиционных материалов составим частные математические модели перечисленных выше процессов.

В статье рассматривается задача определения математической модели процесса формования каркаса двери кабины вертолета для осуществления автоматического управления техническим объектом (автоклавом).

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА
ФОРМОВАНИЯ**

Разогрев каркаса в автоклаве горячим воздухом представляет собой сложный термодинамический процесс, при котором изменение температуры различных точек каркаса во времени происходит не одинаково. В настоящее время эти вопросы в литературе освещены достаточно широко. Однако точное решение этой задачи даже для простейших случаев сложно.

Ниже представлено описание процессов разогрева каркаса в автоклаве при помощи дифференциальных уравнений с переменными параметрами.

Тепловой баланс для данного случая запишется:

$$Q - Q_{yx} = Q_k + Q_{ок} + Q_c, \quad (2)$$

где Q_{yx} — количество тепла, уходящее из камеры с воздухом в окружающую среду;

Q_k — количество тепла, расходуемое на разогрев каркаса;

$Q_{ок}$ — количество тепла, расходуемое на нагрев окружающих конструкций и передаваемое через них в окружающую среду;

Q_c — количество тепла, расходуемое на нагрев воздуха зоны формообразования.

Количество тепла, расходуемое на разогрев зоны формования определим из формулы:

$$Q_B = G_B C_B (\theta_{вх} - \theta_{вых}), \quad (3)$$

где G_B — расход воздуха в единицу времени, кг³/сек;

C_B — удельная весовая теплоемкость воздуха, ккал/кг⁰С;

$\theta_{вх}$ — температура воздуха, подаваемого в зону формования, ⁰С;

$\theta_{вых}$ — температуры воздуха, выходящего из зоны формования, ⁰С.

Используя упрощение, можно принять, что

$$\theta_{вых} = \theta_B \frac{\theta_{вх} + \theta_{вых}}{2}, \quad (4)$$

где θ_B — температура воздуха в автоклаве.

Откуда $\theta_{вых} = 2\theta_B - \theta_{вх}$, тогда $Q_{вх} - Q_{вых} = 2(Q_{вх} - Q_B)$.

Окончательно выражение примет вид:

$$\begin{aligned} Q_B &= 2G_B C_B (\theta_{вх} - \theta_B); \\ \theta_{вых} &= V_B \gamma_B C_B = \frac{d\theta_B}{dt}, \end{aligned} \quad (5)$$

где V_B — объем воздуха в зоне формования, м³;

γ_B — удельный вес воздуха, м³;

C_B — удельная весовая теплоемкость воздуха, ккал/кг⁰С.

Количество тепла, расходуемое на нагрев окружающих конструкций и передаваемое через них в окружающую среду определяется по формуле:

$$Q_{ок} = \sum_{i=1}^n A_{окi} (\theta_B - \theta_H), \quad (6)$$

где $A_{окi}$ — коэффициент, характеризующий теплопередающую способность i -го элемента окружающей конструкции, ккал/час⁰С;

θ_H — температура наружного воздуха, ⁰С.

Коэффициент, характеризующий теплопередающую способность i -го элемента окружающей конструкции, определяется по формуле:

$$A_{окi} = F_{окi} - K_{окi},$$

$F_{окi}$ — площадь i -го элемента окружающих конструкций, м²;

$K_{окi}$ — коэффициент теплопередачи i -го элемента окружающих конструкций, ккал/час ⁰С.

Значение коэффициента K_i может быть определено из уравнения:

$$K_i = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^k \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (7)$$

где $\alpha_1 \alpha_2$ — коэффициенты теплопередачи элементов окружающих конструкций, ккал/м²⁰С;

δ_i — толщина i -го элемента окружающей конструкции;

λ_i — коэффициент теплопроводности элемента i -й стенки окружающей конструкции, ккал/м час ⁰С.

Количество тепла, расходуемое на разогрев каркаса двери:

$$Q_c = \sum_{i=1}^k A_{ci} (\theta_B - \theta_H), \quad (8)$$

где $A_{ci} = F_{ci} \cdot I \cdot K_{ci}$ — коэффициент, характеризующий теплопередающую способность i -го элемента каркаса, ккал/м² час ⁰С;

F_{ci} — поверхность теплообмена i -го элемента каркаса, м²;

K_{ci} — коэффициент теплопередачи i -го элемента каркаса, ккал/м час ⁰С.

Для упрощения выражения $\sum_{i=1}^n A_{окi}$ и

$\sum_{i=1}^k A_{ci}$ обозначим соответственно через A_1 и A_2 . Тогда уравнение теплового баланса в развернутом виде в дифференциальной форме запишется:

$$\begin{aligned} G_B C_B 2(\theta_{вх} - \theta_B) &= V_B \gamma_B C_B \frac{d\theta_B}{dt} + \\ &+ A_1 (\theta_B - \theta_H) + A_2 (\theta_B - \theta_{\bar{n}}), \\ 2G_B C_B \theta_{вх} &= V_B \gamma_B C_B \frac{d\theta_B}{dt} + A_1 \theta_B - \\ &- A_2 \theta_H + A_2 \theta - A_2 \theta_{\bar{n}} + 2G_B C_B \theta_B, \\ \frac{2G_B C_B}{A_1 + A_2 G_B C_B} \theta_{вх} &+ \frac{A_1}{A_1 + A_2 + 2G_B C_B} \theta_H = \\ &= \frac{V_B \gamma_B C_B}{(A_1 + A_2 + 2G_B C_B)} \frac{d\theta_B}{dt} - \frac{A_2 C_B \theta_{\bar{n}}}{A_1 + A_2 + 2G_B C_B}. \end{aligned} \quad (9)$$

Полученное уравнение необходимо дополнить уравнением нагрева каркаса:

$$\frac{G_K C_K}{A_2} \cdot \frac{d\theta_K}{dt} + \theta_K = \theta_B, \quad (10)$$

где G_k — масса каркаса, кг;
 C_k — теплоемкость каркаса, ккал/кг $^{\circ}$ С;
 θ_k — температура каркаса, $^{\circ}$ С.

В результате получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{V_B \lambda_B C_B}{A_1 + A_2 + 2G_B C_B} \frac{d\theta_B}{dt} + \theta_B - \frac{A_2}{A_1 + A_2 + 2G_B C_B} \theta_{\tilde{n}} \\ &= \frac{2G_B C_B}{A_1 + A_2 + 2G_B C_B} \theta_{\text{вх}} + \frac{A_1}{A_1 + A_2 + 2G_B C_B} \theta_{\text{н}}; \\ & \frac{G_{\tilde{n}} C_{\tilde{n}}}{A_2} \cdot \frac{d\theta_{\tilde{n}}}{dt} + \theta_{\tilde{n}} = \theta_{\tilde{a}}. \end{aligned} \quad (11)$$

В уравнениях системы (11) коэффициенты при производных имеют размерность времени. Обозначим их:

$T_1 = \frac{V_B \lambda_B C_B}{A_1 + A_2 + 2G_B C_B}$ — постоянная времени разогрева воздуха зоны формования, с;

$T_2 = \frac{G_k C_k}{A_2}$ — постоянная времени разогрева каркаса, с.

В первом уравнении коэффициенты при θ_k и $\theta_{\text{н}}$, $\theta_{\text{вх}}$ безразмерные:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{A_1}{A_1 + A_2 + 2G_B}; \\ E_2 &= \frac{A_2}{A_1 + A_2 + 2G_B C_B}. \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$E_3 = \frac{2G_B C_B}{A_1 + A_2 + 2G_B C_B}.$$

Эти коэффициенты отражают все многообразие конструктивных и эксплуатационных факторов, влияющих на процесс формования каркаса.

Слагаемые правой части первого уравнения (11) имеют размерность температуры. Обозначим их через $Q_0 = E_3 \theta_{\text{вх}} + E_1 \theta_{\text{н}}$. Тогда систему уравнений (11) можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} T_1 \frac{d\theta_B}{dt} + \theta_B - E_2 \theta_{\tilde{n}} &= \theta_0 \\ T_2 \frac{d\theta_{\tilde{n}}}{dt} + \theta_{\tilde{n}} &= \theta_B \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Поскольку в процессе тепловой подготовки формования нас интересует в первую очередь температура каркаса, то решим систему уравнений (12) относительно θ_k :

$$T_1 T_2 \frac{d^2 \theta_k}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{d\theta_k}{dt} + (1 - E_2) \theta_k = \theta_y. \quad (13)$$

Корни характеристического уравнения имеют вид:

$$P_{1,2} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 \cdot T_2} \pm \sqrt{\frac{(T_1 + T_2)^2}{4(T_1 \cdot T_2)^2} - \frac{1 - E_2}{T_1 \cdot T_2}}. \quad (14)$$

Если

$$\begin{aligned} & \frac{(T_1 + T_2)^2}{4(T_1 \cdot T_2)^2} - \frac{1 - E_2}{T_1 \cdot T_2} > 0; \\ & T_1^2 + T_2^2 + 2T_1 T_2^2 - 4T_1 T_2 (1 - E_2) > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Значение E_2 всегда удовлетворяет неравенству ($0 < E < 1$), значит, наибольшая вероятность нарушения неравенства (15) в случае $E_2 = 0$.

Тогда:

$$\begin{aligned} & T_1^2 + T_2^2 - 2T_1 T_2^2 > 0, \\ & (T_1 - T_1)^2 \Rightarrow > 0. \end{aligned}$$

Поэтому корни P_1 и P_2 будут всегда действительными и, судя по подкоренному выражению, отрицательными. Обозначим $T_1 = -\alpha$ и $T_2 = \beta$.

Причем если $|\alpha| > |\beta|$ при условии мгновенной подачи горячего воздуха и постоянных внешних условиях, то решение дифференциального уравнения (13) примет вид:

$$\theta_k = K_0 + C_1 e^{-\alpha t} + C_2 e^{-\beta t}. \quad (16)$$

Из условия начала работы при произвольных постоянных и установившегося режима, получим:

$$\begin{aligned} \theta_k(t) &= \frac{Q_y}{1 - E_2} - \left[\frac{\theta_y}{1 - E_2} - \right. \\ & \left. - \theta_k(0) \left(\frac{\beta}{\alpha - \beta} e^{-\alpha t} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} \right) \right]. \end{aligned}$$

Так как при $t \rightarrow \infty$ производные стремятся к нулю:

$$\theta_k \rightarrow \infty = \frac{\theta_y}{1 - E_2} = K_0, \text{ при } t = 0; \theta_k = \theta_k(0).$$

Получаем систему уравнений:

$$K_0 + C_1 + C_2 = \theta_k(0), \quad \alpha C_1 - \beta C_2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{K_0 - \theta_k(0)\beta}{\alpha - \beta}; C_2 = \frac{K_0 - \theta_k(0)\alpha}{\alpha - \beta}.$$

Для упрощения выразим α и β через T_1 и T_2 , тогда уравнение (13) перепишем в виде:

$$\frac{T_1 T_2}{1 - E_2} \cdot \frac{d^2 \theta_k}{dt^2} + \frac{T_1 + T_2}{1 - E_2} \cdot \frac{d\theta_k}{dt} + \theta_k = \frac{1}{1 - E_2} \theta_y = \theta_y'. \quad (17)$$

Будем считать, что существует также новые постоянные времена T_{01} и T_{02} , для которых справедливы условия [2]:

$$\frac{T_1 T_2}{1 - E_2} = T_{01} T_{02};$$

$$\frac{T_1 + T_2}{1 - E_2} = T_{01} + T_{02}.$$

В новых обозначениях уравнение (13) запишется

$$T_{01} T_{02} \frac{d^2 \theta_k}{dt^2} + (T_{01} + T_{02}) \frac{d\theta_k}{dt} + \theta_k = \theta_y'. \quad (18)$$

В этом случае корни уравнения будут равны:

$$\alpha = -\frac{1}{T_{02}}; \beta = -\frac{1}{T_{01}}.$$

С учетом преобразований решение запишется в виде:

$$\theta_k(t) = \theta_y' - [\theta_y' - \theta_k(0)] \times$$

$$\times \left[\frac{T_{02}}{T_{02} - T_{01}} e^{-\alpha t} - \frac{T_{01}}{T_{02} - T_{01}} e^{-\beta t} \right]. \quad (19)$$

Таким образом, мы видим, что в некоторых точках фазового пространства ($G_B, \theta_B, \theta_H, V_B$) процесс описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Вторым этапом исследования является идентификация модели процесса. Для этого необходимо поставить ряд экспериментов и применить регрессионный анализ к коэффициентам уравнения (19), получить зависимость их от переменных $G_B, \theta_B, \theta_H, V_B$.

Математическая модель процесса разогрева автоклава представляет собой систему дифференцированных уровней с переменными параметрами. Коэффициенты этой системы уравнений являются неизвестными параметрами, зависящими от конструктивных особенностей автоклава и внешних условий конструкции каркаса. В результате решения систем уравнений получено выражение для температуры каркаса двери кабины вертолета, которое позволяет оптимизировать процесс управления формированием.

Экспериментальные данные для составления математической модели технологического процесса формирования получены на реальной установке при изготовлении изделий из полимеров.

Результаты расчетов параметров динамики объекта на участках предварительного нагрева и нагревания до температуры формирования приведены в табл.

Таблица

Определение параметров динамики на этапах предварительного нагрева

№ каркаса	Предварительный нагрев			Нагревание	
	$\tau_{\text{наг}}$, мин	K_1 , °С/мин	$t_{\text{нач1}}$, °С	K_2 , °С/мин	$t_{\text{нач2}}$, °С
1	3,75	1,33	15	1,24	60,77
2	7,50	1,59	28,30	1,57	61,6
образец	7,50	2,00	18,32	1,78	60,77
среднее	6,25	1,60	20,54	1,53	61,05

На каждой диаграмме приведены графики изменения температуры по 10 контрольным точкам изделия. По каждому из графиков определялись параметры динамики, средние значения параметров являются результатными.

На рис. 1 представлены данные сопоставления результатов моделирования на участке предварительного нагрева с экспериментальными данными, на рис. 2 представлены данные сопоставления результатов моделирования с данными эксперимента на этапе нагревания.

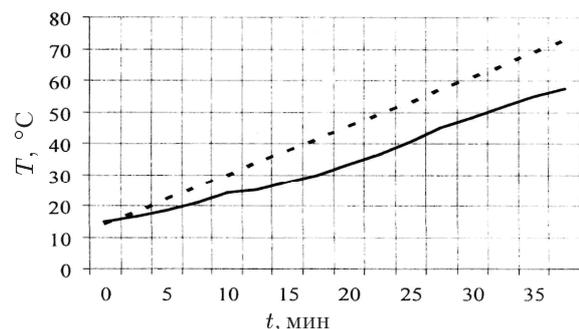


Рис. 1. Сопоставление экспериментальных данных (----) и результатов моделирования (—) на этапе предварительного нагрева

Показания рассчитывались для каждого каркаса по его параметрам динамики. Абсолютная погрешность составляет 3,32 °С для изделия 123, 1,93 °С, для образца — 9,645 °С, относительная погрешность соответственно 2 и 5,85 %.

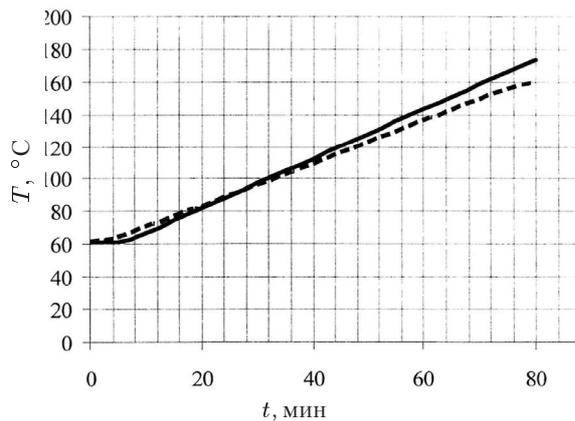


Рис. 2. Сопоставление экспериментальных данных (----) и результатов моделирования (—) на этапе формирования

Передаточная функция объекта на этапе предварительного нагрева и нагревания:

$$W(p) = 20 + \frac{1,56e^{-6,25p}}{p} \approx 20 + \frac{1,56}{p(1 + 6,25p)}$$

Она показывает, что объект управления обладает значительным запаздыванием. Таким образом, информация от объекта управления поступает с задержкой во времени $\tau = 6,5$ минут, поэтому коррекция управления может производиться лишь приблизительно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрены вопросы описания теплофизических процессов уравнениями второго порядка с распределенными параметрами. Модель процесса аппроксимирована системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Получено выражение для скорости выпаривания связующего. Результаты математического описания процесса выпаривания связующего показывают, что скорость выпаривания пропорциональна температуре в автоклаве и определяет характер всего процесса для фиксированных температурных стадий.

Разработанная математическая модель процесса формования каркаса отражает характер преобразования входных воздействий в выходные и позволяет использовать результаты для управления процессом формования.

Модель позволяет разработать алгоритмы управления по контуру температуры, давления, вакуумирования.

Результаты теоретических и экспериментальных исследований, представленных в статье, внедрены на Кумертауском авиационном производственном предприятии (КумАПП) в цехе по производству изделий из полимерных композиционных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский, А. А.** Справочник по теории автоматического управления / А. А. Красовский. М. : Наука, 1987. 712 с.
2. **Воронов, А. А.** Теория автоматического управления / А. А. Воронов. М. : Высшая школа, 1977. 504 с.

ОБ АВТОРАХ



Тюков Николай Иванович, проф., зав. каф. пром. автоматизации Кумертауск. фил. УГАТУ. Дипл. инж. (Оренбургск. с.-х. ин-т, 1963). Д-р техн. наук по авт. упр. и рег. (Ин-т им. Потона, 1984). Иссл. в обл. автом. технол. проц. в вертолетостроении.



Даутов Анвар Ибрагимович, дир. того же филиала, зав. каф. естественнотехн. и общетехн. дисц. Дипл. инж. электрон. техн. (Электротехн. ин-т нефти, 1972). Канд. техн. наук по теплотехн. (Казанск. хим.-технол. ин-т, 1977). Иссл. в обл. теплотехн. и теплофиз.



Закурдаева Елена Анатольевна, ст. преп. каф. пром. автоматизации того же филиала. Дипл. инж. по автоматиз. технол. процессов и производств (там же, 2001). Иссл. в обл. теплофиз. процессов, композ. материалов.