

УДК 004.7

П. В. ПЕТРОВ, Р. А. СУНАРЧИН, В. А. ЦЕЛИЩЕВ**ТЕХНОЛОГИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА**

Компьютерное моделирование является наиболее распространенным методом современной науки. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта математической моделью с последующим изучением на компьютерах. В результате вычислительного эксперимента исследователи получают детальное и реалистичное описание и достоверную информацию о реальном объекте. *Математическая модель; алгоритм; программа; вычислительный эксперимент; виртуальный стенд*

Современные системы управления являются и нелинейными, и нестационарными не только за счет естественных особенностей устройств, но и за счет введения существенно нелинейных звеньев и регуляторов с переменной структурой. Необходимость отработки динамических режимов работы и выбора рациональных параметров требуют создания моделей, основанных на фундаментальных нелинейных и нестационарных уравнениях, позволяющих максимально точно и оперативно воспроизводить процессы исследуемых устройств. Аналитическое решение таких моделей невозможно, поэтому приходится полагаться лишь на ЭВМ. Вычислительный эксперимент становится практически единственным средством исследования сложных технических устройств.

Вычислительный эксперимент имеет некоторые преимущества перед физическим экспериментом [2], но все же остается виртуальным, требует окончательной проверки и должен рассматриваться как средство сокращения объемов и времени экспериментальной отработки.

Установившейся терминологии нет, в данной работе под вычислительным экспериментом понимается часть моделирования, связанная с проведением систематического исследования и построением обобщенных характеристик.

Можно выделить следующие этапы вычислительного эксперимента:

- уяснение задач исследования;
- разработка автоматизированного виртуального стенда;
- проведение предварительных расчетов и составления плана систематического эксперимента;

- построение основных размерных характеристик;

- построение обобщенных характеристик.

Под виртуальным стендом понимается такая совокупность исходных данных, математических моделей, алгоритмов и программ, которые обеспечивают максимум удобств анализа исследуемого устройства.

Форма и даже содержание вычислительного эксперимента существенно зависят от используемого программного обеспечения. Применение языков высокого уровня или специально разработанного пакета прикладных программ позволяет полностью автоматизировать процедуры анализа систем. Так может быть разработан интерфейс для интерактивного взаимодействия пользователя с ЭВМ. В данной работе показан вариант использования относительно простой интегрированной среды MathCAD, что позволяет лишь механизировать расчеты, но наглядно демонстрирует технологию вычислительного эксперимента.

В качестве объекта исследования рассмотрено простейшее, но вместе с тем типичное устройство гидроавтоматики — гидромеханический следящий привод [1] с жесткой кинематической обратной связью и четырех-щелевым идеальным золотником (рис. 1).

Виртуальный стенд включает в себя допущения, статическую модель, размерную и безразмерную динамические модели, алгоритмы, программы, пакеты прикладных специализированных программ, интерфейс для взаимодействия пользователя с ЭВМ.

Статическая модель в данном случае включает в себя одно уравнение и выражение

для ограничения ширины щели:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_r^0 &= \bar{x}_{щ}^0 \sqrt{1 - \bar{p}_r^0}, \\ \bar{p}_r^0 &= \bar{p}_1^0 - \bar{p}_2^0, \\ 0 &\leq \bar{x}^{-0} \leq 1, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\bar{Q}_r^0, \bar{x}_{щ}^0, \bar{p}_r^0$ — соответственно расход жидкости через клапан, ширина щели, перепад давления.

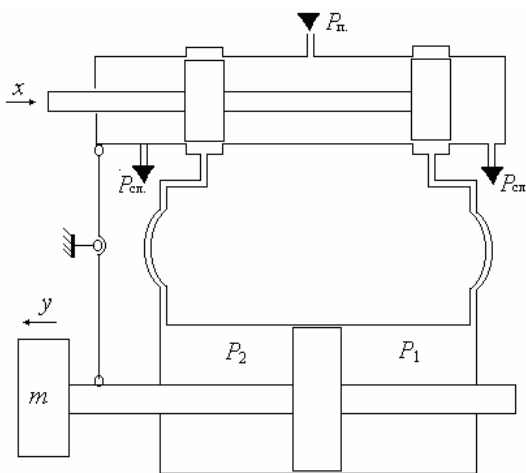


Рис. 1. Принципиальная схема гидромеханического следящего привода

Кроме того, для каждого положения равновесия привода ширина щели идеального золотника равна нулю

$$\bar{x}_{щ}^0 = \bar{x}^0 - k_{oc} \bar{y}^0 = 0, \quad (2)$$

где $\bar{x}_{щ}^0, \bar{x}^0, k_{oc}, \bar{y}^0$ — соответственно ширина щели, перемещение золотника коэффициент обратной связи, перемещение поршня.

В данном случае статическая модель имеет предельно простую форму. В общем случае она может включать систему равновесных уравнений, определяющих начальные условия и систему граничных условий и ограничений.

Размерная динамическая модель (3) гидравлического следящего привода при определенных допущениях (см. [4]) включает в себя систему дифференциальных уравнений сил и расходов для двух рабочих щелей и квазистационарное уравнение для ширины щели

(уравнение обратной связи)

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 y}{dt^2} &= p_1 F_1 - p_2 F_2 - k_v \frac{dy}{dt} - R - F_c \\ \mu_1 b_1 x_{щ1} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_n - p_1)} &= F_1 \frac{dy}{dt} + \frac{V_{10} + F_1 y}{E} \frac{dp_1}{dt} \\ \mu_2 b_2 x_{щ2} \sqrt{\frac{2}{\rho} p_2} &= F_2 \frac{dy}{dt} + \frac{V_{20} - F_2 y}{E} \frac{dp_2}{dt} \\ x_{щ1} &= x_{щ2} = x - k_{oc} y, \end{aligned} \quad (3)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} y(0) &= 0; \\ p_1 &= p_{10}; \\ p_2 &= p_{20}, \end{aligned} \quad (4)$$

где m — масса поршня; F_1, F_2 — соответственно площади поршня в правой и левой полостях гидроцилиндра; p_1, p_2 — соответственно давления в правой и левой полостях гидроцилиндра; $b_1, b_2, x_{щ1}, x_{щ2}$ — соответственно длина и ширина первой и второй щелей; μ — коэффициент расхода дросселирующей щели; k_{oc} — коэффициент обратной связи; V_{10}, V_{20} — соответственно начальные объемы первой и второй полостей; R — величина полезной нагрузки; F_c — величина сухого трения; E — модуль объемной упругости; p_{10}, p_{20} — соответственно начальное давление в правой и левой полостях гидроцилиндра; $y(0)$ — начальное положение поршня.

С учетом ограничения ширина щели может быть определена следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{если } x - k_{oc} \cdot y < x_{\max} \text{ тогда } x_{щ} &= x - k_{oc} \cdot y \\ \text{если } x - k_{oc} \cdot y \geq x_{\max} \text{ тогда } x_{щ} &= x_{\max}. \end{aligned}$$

Изменение ширины щели (в зависимости от вида командного сигнала) может быть представлено в виде одного из выражений (5):

$$x = \begin{cases} 1(t) \\ v_0 t \\ A \sin(\omega t) \\ \text{и. т. д.} \end{cases} \quad (5)$$

Численные результаты можно существенно усилить, если от первоначальных переменных перейти к обобщенным переменным [3, 4]. В теории подобия утверждается, что переменные и параметры проявляются не порознь, а совместно в определенных сочетаниях. Существенны не отдельные величины, а их комбинации. Поэтому первоначальные величины нужно вводить не как разрозненное множество индивидуальных параметров, а в виде комплексов, обобщенных переменных, в самой структуре которых отражено

взаимодействие различных влияний. Имеется множество примеров успешного применения теории подобия применительно к движению вязкой жидкости, теплопередаче, теории воздушно-реактивных двигателей и т. п. Переход от обычных физических величин (протяженность, время, давление и т. п.) к величинам комплексного типа (критерии Рейнольдса, Нуссельта, Маха, приведенные обороты и др.), которые составлены из тех же величин в определенных сочетаниях, позволили в определенной мере преодолеть трудности физического эксперимента.

Так как уравнения, описывающие процессы в природе, известны, то искомые обобщенные переменные определяются при приведении уравнений к безразмерному виду. Для этого вводятся безразмерные переменные как отношения физических величин к их характерным значениям, а решение задачи ищется в форме зависимостей безразмерных функций от безразмерных аргументов и критериев подобия (обобщенных переменных):

$$\bar{y} = \frac{y}{Y_0} = f\left(\frac{t}{T_0}, \frac{x}{Y_0}, \frac{p}{P_0}, \pi_1, \pi_2, \dots, P_1, P_2, \dots\right), \quad (6)$$

где Y_0, T_0, P_0 — соответственно характерные значения перемещения, времени и давления; π_1, π_2, \dots — безразмерные комплексы; P_1, P_2, \dots — параметрические комплексы. Выбор масштабов преобразования является неоднозначной задачей, но этот выбор не должен влиять на окончательный результат. За масштаб можно принять одно из характеристических времен, которые получаются при переходе к обобщенным переменным. Но так как гидропривод обычно входит в состав некоторой системы, то в данном случае разумнее назначить неопределенный масштаб времени, например $T_0 = 1$ с.

В качестве масштабов перемещения и давления назначаются: $Y_0 = x_m$ — максимальная ширина щели и $P_0 = P_{\Pi}$ — давление питания.

Подставляя масштабы преобразования в систему (3) и, проведя ряд преобразований, получаем систему уравнений в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \bar{T}_m^2 \frac{d^2 \bar{y}}{d\bar{t}^2} &= \bar{p}_{\Pi}(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - 2\xi_v \bar{T}_m \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} - \xi_c; \\ (\bar{x} - k_{oc}\bar{y})\sqrt{1 - \bar{p}_1} &= \bar{T}_{gy} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} + \bar{T}_{v1}(1 + \bar{V}_1) \frac{d\bar{p}_1}{d\bar{t}}; \\ \bar{T}_{gy} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} &= (\bar{x} - k_{oc}\bar{y})\sqrt{\bar{p}_2} + \bar{T}_{v2}(1 - \bar{V}_2) \frac{d\bar{p}_2}{d\bar{t}}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\bar{T}_m = \frac{T_m}{T_0}, T_m = \sqrt{\frac{m}{C_{gd}}}$ — механическая постоянная времени; $\bar{T}_{gy} = \frac{T_{gy}}{T_0}, T_{gy} = \frac{F}{Q/x_m}$ — гидравлическая постоянная времени; $\bar{T}_{v1} = \frac{T_{v1}}{T_0}, T_{v1} = \frac{V_{01}p_{\Pi}}{EQ_m}, \bar{T}_{v2} = \frac{T_{v2}}{T_0}, \bar{T}_{v2} = \frac{V_{02}p_{\Pi}}{EQ_m}$ — постоянная времени наполнения левой и правой полостей; \bar{V}_1, \bar{V}_2 — соответственно относительные объемы левой и правой полостей гидроцилиндра; \bar{p}_1, \bar{p}_2 — соответственно относительные давления в левой и правой полостях гидроцилиндра; ξ_v, ξ_c — соответственно коэффициенты затухания по вязкому и сухому трению; $\bar{p}_{\Pi} = \frac{p_{\Pi}}{C_{gd}x_m}$ — относительное давление питания; $C_{gd} = \frac{2EF^2}{V_0}$ — жесткость гидродинамической пружины.

Сравнивая выражения (7) и (3) нетрудно заметить существенное упрощение безразмерной модели. Она характеризуется тремя критериями гомохронности, коэффициентами затухания по вязкому и сухому трению и несколькими параметрическими критериями, среди которых наиболее значимым для следящих систем является коэффициент обратной связи. Обращаем внимание, что при переходе к безразмерным переменным получаются постоянные времени, похожие на те, которые обычно фигурируют в линейных моделях; это связано не столько с линеаризацией, сколько с приведением линейных уравнений к канонической форме.

Применение обобщенных переменных значительно облегчает проведение численного эксперимента, так как число обобщенных величин значительно меньше числа первоначальных аргументов задачи, а их значения имеют один порядок. Но самое существенное достоинство перехода к обобщенным переменным — возможность построения обобщенных экспериментальных характеристик точности, устойчивости и управляемости исследуемых систем.

При приведении уравнений к безразмерному виду необходимо контролировать правильность преобразований. Самая простая и надежная проверка заключается в установлении подобия размерных и безразмерных переходных процессов, построенных для тех же исходных данных.

Разработкой модели не заканчивается исследование сложных устройств. При проведении численного исследования очень важна такая организация дела, при которой будет достигнута поставленная перед этой моделью цель, т. е. выполнена проверка адекватно-

сти и намечены пути совершенствования модели. Прежде всего, требуется системный анализ модели и проверка ее адекватности, т. е. проведение предварительного исследования.

Предварительное исследование выполняется с целью определения наиболее значимых аргументов задачи и составления плана эксперимента. В данном случае предварительное исследование выполняется при малых отклонениях ширины щели и его результаты легко предсказать, так как влияние различных параметров на характеристики линейного гидравлического следящего привода общеизвестны [1]. Далее описывается технология построения обобщенных характеристик устойчивости привода.

Безразмерные переходные процессы, представленные на рис. 2, рассчитаны при одних значениях обобщенных переменных за исключением коэффициентов затухания: на левом рисунке коэффициент затухания равен $\xi = 0,5$, что обеспечивает апериодический характер процесса, на правом — имеет место граничное значение коэффициента затухания, при котором все переменные имеют гармонический характер.

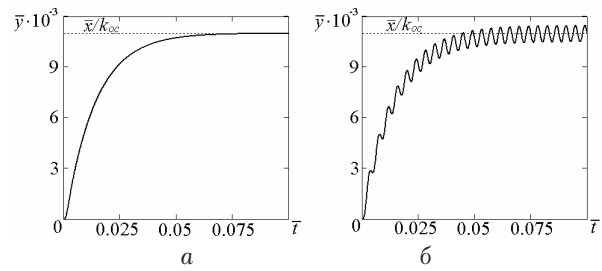



Рис. 2. Влияние величины коэффициента затухания на переходный процесс привода: а — коэффициент затухания $\xi = 0,5$; б — коэффициент затухания $\xi_{gp} = 0,018$; $T_{gv} = 0,01$; $P_p = 0,193$; $k_{oc} = 1$; $T_v = 6,784 \cdot 10^{-3}$; $T_m = 5 \cdot 10^{-4}$; $\bar{x} = 0,011$

На рис. 3 приводится MathCAD документ, описывающий построение обобщенной границы устойчивости гидромеханического следящего привода. Идея построения очень проста: для i -значений гидравлической постоянной времени и трех значений коэффициента обратной связи методом проб и ошибок определяется критическое значение коэффициента затухания и строится рабочая характеристика $\xi_{gr} = f(T_{gp}, k_{oc})$. Затем она перестраивается в обобщенную границу устойчивости, т. е. зависимость $\xi_{gr} = f(\frac{T_m k_{oc}}{T_{gp}})$.

```


1)Исходные данные:  $T_{v\_} = 6.784 \cdot 10^{-3}$     $P_{p\_} = 0.193$     $x\_ = 0.011$     $T_{m\_} = 5 \cdot 10^{-4}$ 
  

2)Начальные условия:  $y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 
  

3)Матрица первых производных:
  


$$D(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ \frac{P_{p\_}}{T_{m\_}} \cdot (y_2 - y_3) - 2 \cdot \frac{\xi_v \cdot y_1}{T_{m\_}} \\ \frac{1}{T_{v\_}} \cdot [(x\_ - y_0 \cdot k_{oc}) \cdot \sqrt{|1 - y_2|} \cdot \text{sign}(1 - y_2) - y_1 \cdot T_{gy\_}] \\ \frac{1}{T_{v\_}} \cdot [T_{gy\_} \cdot y_1 - (x\_ - y_0 \cdot k_{oc}) \cdot \sqrt{|y_3|}] \end{bmatrix}$$

Интегрирование системы уравнений на границе устойчивости:  $n := 0..10000$ 
  

 $z := \text{rkfixed}(y, 0, 0.15, 10000, D)$  - вызов в встроенной функции Рунге-Кутты
    
```

Рис. 3. Пример листинга программы вычислительного эксперимента в MathCAD

Границы, разделяющие области неустойчивых и устойчивых переходных процессов, определяются визуально, при достижении регулярного колебательного процесса. Граница устойчивости (см. рис. 4, 5) определяется очень точно (коэффициент демпфирования на границе устойчивости определяется с точностью до третьего знака после запятой).

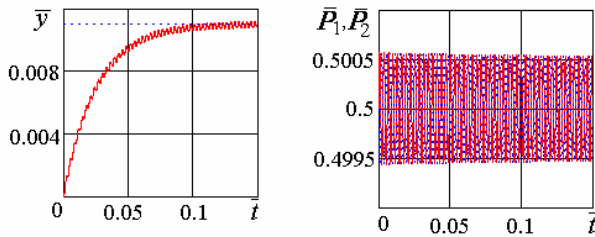


Рис. 4. Переходные процессы на границе устойчивости

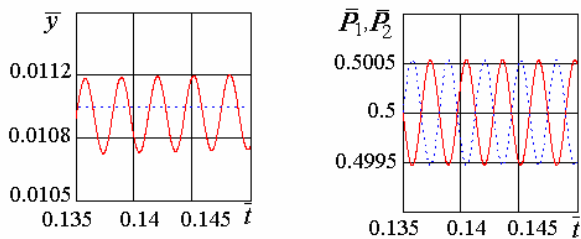


Рис. 5. Переходные процессы в узком диапазоне времени

Далее на рис. 6 приведен пример результатов вычислительного эксперимента, выполненного в пакете MathCAD. Показаны численные результаты определения границы устойчивости привода при различных значениях величины T_{gp} и при различных коэффициентах обратной связи $k_{oc} = 1, k_{oc} = 0,7, k_{oc} = 0,4$.

| $T_{gp-i} :=$ | $\xi_{gr1_i} :=$ | $\xi_{gr2_i} :=$ | $\xi_{gr3_i} :=$ |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0.017 | 0.015 | 0.01 | $5.882 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.019 | 0.013 | $9.211 \cdot 10^{-3}$ | $5.263 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.021 | 0.012 | $8.333 \cdot 10^{-3}$ | $4.762 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.023 | 0.011 | $7.609 \cdot 10^{-3}$ | $4.348 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.025 | 0.01 | $7 \cdot 10^{-3}$ | $4 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.029 | $9.256 \cdot 10^{-3}$ | $6.481 \cdot 10^{-3}$ | $3.704 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.031 | $8.621 \cdot 10^{-3}$ | $6.034 \cdot 10^{-3}$ | $3.448 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.033 | $8.065 \cdot 10^{-3}$ | $5.645 \cdot 10^{-3}$ | $3.226 \cdot 10^{-3}$ |
| 0.035 | $7.576 \cdot 10^{-3}$ | $5.303 \cdot 10^{-3}$ | $3.03 \cdot 10^{-3}$ |
| | $7.143 \cdot 10^{-3}$ | $5 \cdot 10^{-3}$ | $2.857 \cdot 10^{-3}$ |

Рис. 6. Результаты вычислительного эксперимента в программе MathCAD

На рис. 7 представлен один из результатов вычислительного эксперимента в виде зависимости граничного значения коэффициента затухания от гидравлической постоянной времени. Для полноты картины необходимо построить аналогичные характеристики от других характерных параметров. В работе [4] показано, что результаты численного исследования можно существенно усилить, если перейти к обобщенным переменным.

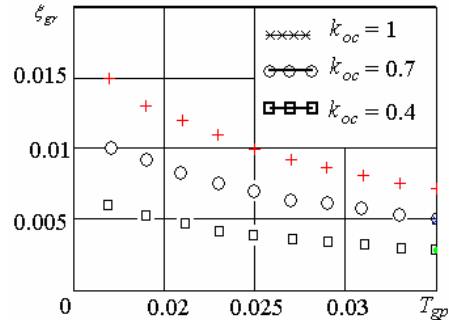


Рис. 7. Граница устойчивости ГСП

Аналогичным образом строятся обобщенные характеристики и для других наборов параметров. Например, по результатам предварительного исследования была получена характеристика зависимости K_v от величины длины щели, при различных значениях массы подвижной части. Характеристика представлена на рис. 8.

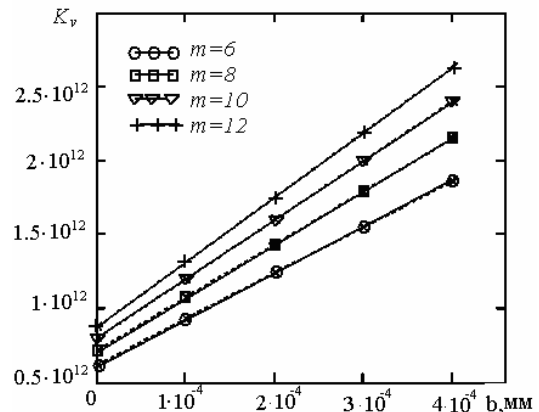


Рис. 8. График зависимости параметра K_v от размера щели, при различных значениях массы

На рис. 9 приведена обобщенная характеристика устойчивости гидромеханического следящего привода для граничных значений коэффициента затухания и комплекса добротности привода $\frac{T_m \cdot k_{oc}}{T_{gp}}$ при различных значениях k_{oc} и T_{gp} .

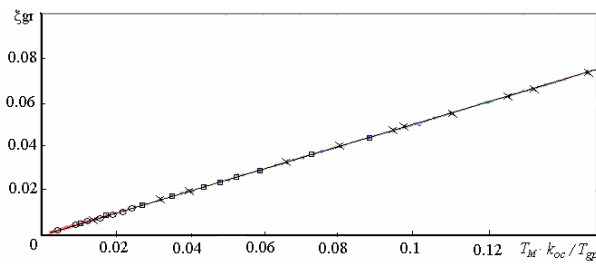


Рис. 9. Обобщенная граница устойчивости ГСП

В данной статье продемонстрирована технология проведения вычислительного эксперимента. Показано как методом перехода к обобщенным переменным при помощи машинной имитации можно получить результаты ни в чем не уступающие линейным методам. При данном подходе решения существенно сокращаются число аргументов задачи, благодаря чему решение упростилось, а обозримость результатов улучшилась. Повысилась информативность результатов, так как влияние отдельных факторов проявляется не порознь, а в совокупности и потому более отчетливо выступают внутренние связи. Безразмерные переменные изменяются в диапазоне от нуля до единицы, что существенно облегчает вычисление.

Рассмотренный пример не имеет самостоятельного значения, а призван лишь проиллюстрировать существо излагаемого метода, который можно и должно применять в более сложных случаях и, в частности, для решения алгоритмических задач, что позволит облегчить анализ результатов вычислительного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гамынин, Н. С.** Гидравлический следящий привод / Н. С. Гамынин. М.: Машиностроение, 1968. 564 с.

2. **Попов, Ю. П.** Вычислительный эксперимент / Ю. П. Попов, А. А. Самарский. М.: Знание, 1983. 62 с.

3. **Самарский, А. А.** Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования / А. А. Самарский. М.: Наука, 1988. 176 с.

4. **Сунарчин, Р. А.** Применение теории подобия для исследования линейных характеристик / Р. А. Сунарчин, Л. М. Хасанова // РК Техника. Сер. 15. Миасс: РКЦ, 1996. 6 с.

ОБ АВТОРАХ



Петров Павел Валерьевич, асп. каф. ПГМ. Дипл. маг. техн. и технол. по вак. и гидр. компрес. техники (УГАТУ, 2006). Готовит дис. в обл. гидрофицированных механотронных систем.



Сунарчин Роберт Авалевич, доц. каф. прикл. гидромеханики. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1962). Канд. техн. наук по двигателям ЛА (МАИ, 1971). Иссл. в обл. автоматич. регулирования авиац. двигателей.



Целищев Владимир Александрович, проф. каф. прикл. гидромеханики. Дипл. инж.-мех. по гидравл. машинам (УГАТУ, 1982). Д-р техн. наук по тепловым двигателям (УГАТУ, 2000). Иссл. в обл. систем автоматизации ЛА и двигательных установок.