

УДК 539.3

Б. В. НЕРУБАЙЛО, В. С. ЖЕРНАКОВ, Ю. Н. БЕРДНИКОВ**МЕТОДЫ
АСИМПТОТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА
И ТЕРМОСИЛОВЫХ АНАЛОГИЙ
В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК**

Рассматривается построение аналитических решений уравнений цилиндрических и конических оболочек на основе методов асимптотического синтеза (МАС) напряженного состояния, в которых используются различные приближенные уравнения теории оболочек: полубезмоментной теории и краевого эффекта, Власова–Доннелла, изгибаемого и тангенциального состояний и анализируются их асимптотическая и действительная погрешности. Показано, что в случае силовых воздействий на цилиндрические и конические оболочки могут быть получены простые аналитические выражения, легко поддающиеся численной реализации, или простые расчетные формулы в замкнутом виде. Записаны дифференциальные уравнения общей теории трансверсально-изотропных оболочек, являющиеся обобщением уравнений В. Э. Власова, а также приведены различные приближенные уравнения и номера гармоник для «склеивания» решений при использовании МАС. Приводятся соотношения математической термосилового аналогии, позволяющие перейти от решений для силовых задач к термоупругим, устанавливающие прямую дифференциальную связь между эффектами от силового и температурного воздействий на оболочки. Оболочка; метод синтеза; асимптотический метод; силовая аналогия

Роль аналитических методов в решении прикладных задач из различных областей механики растет, несмотря на все прогрессирующее развитие вычислительной техники и вычислительной математики, которое стало дополнительным стимулом к развитию относительно нового раздела математики — асимптотических методов, позволяющих, в частности, производить априорный анализ решений дифференциальных уравнений и отбросить несущественные, а порой весьма громоздкие слагаемые, как, например, в теории оболочек. В результате применения асимптотических методов к дифференциальным уравнениям общей теории оболочек показана возможность расчленения напряженно-деформированного состояния оболочки на ряд элементарных состояний, описываемых известными приближенными уравнениями. Такая потребность обусловлена тем, что при действии на оболочки нагрузок общего характера проблема определения напряженно-деформированного состояния может быть приведена к решению системы уравнений высокого — восьмого — порядка в частных производных, что служит естественным тормозом на пути решения многих краевых задач. Для

устранения возникающих трудностей представляется весьма плодотворным развитие и обобщение на случай произвольного деформирования оболочек методов асимптотического синтеза (МАС) напряженного состояния, которые позволяют построить напряженно-деформированное состояние на основе приближенных уравнений более простой структуры и более низкого порядка [1–3]. (Под асимптотическим синтезом понимается сведение в единое целое решений различных приближенных уравнений, каждое из которых «хорошо» описывает то или иное асимптотически однородное элементарное состояние). Так, еще в 1920–1930-е гг. были разработаны приближенные методы расчета осесимметричного деформирования куполов и днищ, в которых полное напряженно-деформированное состояние получено путем, по сути, синтеза двух напряженных состояний: безмоментного и краевого эффекта. Построенные позже методы асимптотического интегрирования уравнений общей теории оболочек позволили расчленить напряженное состояние оболочки на ряд так называемых элементарных напряженных состояний, каждое из которых описывается известными прибли-

женными уравнениями, полученными в разные времена. Это уравнения безмоментной и полубезмоментной теории, теории краевого эффекта, напряженного состояния с высокой изменчивостью (уравнения Власова–Доннелла) и, наконец, уравнения изгибного и тангенциального состояний, являющиеся аналогом уравнений плоской задачи и изгиба пластины. Что же касается синтеза напряженного состояния приближенных уравнений, то здесь вопрос оставался значительное время открытым из-за отсутствия принципов и достаточно четких критериев при определении границ «склеивания» (сращивания) приближенных решений. Наибольшие трудности при этом возникают, когда напряженное состояние описывается функциями, изменчивость которых колеблется в широких диапазонах, как, например, при воздействиях сингулярного характера — при сосредоточенных и локализованных силовых и температурных воздействиях. В этих случаях вклад того или иного элементарного напряженного состояния существенно зависит от изменчивости поверхностной или краевой нагрузки. При действии нагрузок сингулярного характера на оболочки положительной гауссовой кривизны решение представлено в форме суммы безмоментного напряженного состояния и «точечного» краевого эффекта в окрестности точки приложения сосредоточенной силы [3]. В случае оболочек нулевой гауссовой кривизны, к которым в первую очередь относятся цилиндрические и конические оболочки, возникают дополнительные трудности [2], на путях преодоления которых следует остановиться.

1. В случае круговой цилиндрической оболочки при действии нормальной нагрузки $p(\alpha, \beta)$, произвольно распределенной по поверхности, уравнения общей теории могут быть сведены к одному разрешающему уравнению относительно функции $\Phi(\alpha, \beta)$.

$$\begin{aligned}
 L\Phi(\alpha, \beta) &= R^4 D^{-1} p(\alpha, \beta) \\
 L &= \nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 + 1)^2 - \\
 &- 2(1 - \nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \nabla^2 + \\
 &+ (1 - \nu^2) c^{-2} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4}; \\
 \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}, \quad c^2 = h^2 / 12R^2.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

В качестве примера рассмотрим бесконечно длинную оболочку при действии самоуравновешенной системы « k » локальных на-

грузок, приложенных в одном ее поперечном сечении. Представим нагрузку вдоль контура в виде ряда, а вдоль образующей — в виде интеграла Фурье

$$\begin{aligned}
 p(\alpha, \beta) &= \frac{2}{\pi} p_0 \times \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda d\lambda \\
 \theta_n &= \frac{k\beta_0}{\pi} (n = 0); \\
 \theta_n &= \frac{2}{\pi n} \sin kn\beta_0 (n = 1, 2, 3, \dots).
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Решение уравнения (1.1) отыскиваем в виде, аналогичном (1.2)

$$\begin{aligned}
 \Phi(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos kn\beta \int_0^{\infty} \Phi_n(\lambda) \cos \alpha \lambda d\lambda \\
 \Phi(\alpha, \beta) &= \frac{6(1 - \nu^2)}{\pi \alpha_0 \beta_0} \left(\frac{R}{h} \right) \frac{P}{ER} \times \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha \lambda}{\lambda L(\lambda, n)} d\lambda.
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Тогда в результате очевидных подстановок находим разрешающую функцию

$$\begin{aligned}
 \Phi(\alpha, \beta) &= \frac{6(1 - \nu^2)}{\pi \alpha_0 \beta_0} \left(\frac{R}{h} \right) \frac{P}{ER} \times \\
 &\times \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha \lambda}{\lambda L(\lambda, n)} d\lambda,
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned}
 L(\lambda, n) &= (\lambda^2 + k^2 n^2)^2 (\lambda^2 + kn^2 - 1)^2 + \\
 &+ 2(1 - \nu) \lambda^2 (\lambda^4 - k^4 n^4) + (1 - \nu^2) c^{-2} \lambda^4; \\
 P &= 4\alpha_0 \beta_0 p_0 R^2.
 \end{aligned}$$

Для всех интересующих нас факторов (перемещений, сил, моментов) нетрудно получить аналогичные (1.4) выражения.

Записанное в форме (1.4) решение на основе общей теории оболочек позволяет в большинстве случаев получить напряженно-деформированное состояние с высокой степенью точности, но часто ценой проведения трудоемкой вычислительной работы на компьютерах. Затруднено решение краевых задач при условиях, отличных от шарнирного закрепления.

Одним из наиболее привлекательных путей получения достаточно точных и в то же время легко поддающихся численной реализации выражений является асимптотический синтез напряженно-деформированного состояния на основе решений приближенных уравнений.

Рассмотрим методы асимптотического синтеза (МАС) напряженно-деформированного состояния оболочек, вытекающие естественным образом из асимптотического анализа уравнений общей теории, асимптотической и действительной погрешностей решений на основе приближенных уравнений [1, 2, 5, 12]:

- основанный на условии обеспечения минимума асимптотической погрешности и применении уравнений полубезмоментной теории и теории простого краевого эффекта при «низких» номерах гармоник разложения вида (1.2), (1.3), а уравнений Власова–Доннелла — при «высоких» номерах n (первый МАС);

- заключающийся в использовании при «низких» и «высоких» номерах гармоник уравнений полубезмоментной теории, краевого эффекта, уравнений типа плоской задачи теории упругости и изгиба пластины, а при «средних» номерах — уравнений типа Власова–Доннелла (второй МАС);

- основанный на применении уравнений только четвертого порядка по продольной координате, к которым относятся: уравнения полубезмоментной теории, краевого эффекта, типа плоской задачи теории упругости и изгиба пластины (третий МАС).

Уточним понятия «низкие», «средние» и «высокие» номера гармоник.

В первом МАС граница «склеивания» приближенных решений легко устанавливается исходя из условия обеспечения минимума асимптотической погрешности, которое приводит к зависимости

$$k^4 n^4 \approx 2\sqrt{3}R/h. \quad (1.5)$$

Округленное до ближайшего целого числа значение n , найденное по этой формуле, будем обозначать через \bar{n} . Отметим, что с этой целью можно воспользоваться условием четкого разделения корней характеристических уравнений для полубезмоментной теории и краевого эффекта, что было сделано в работе [1] наряду с использованием условия минимума асимптотической погрешности. Вернемся к асимптотической погрешности. При «низких» номерах гармоник

($p < \bar{n}$) минимальную асимптотическую погрешность обеспечивает применение уравнений полубезмоментной теории и краевого эффекта (кривая 1, рис. 1), а при более высокой изменчивости применение уравнений Власова–Доннелла (кривая 2). Во втором методе при «высоких» номерах гармоник возможна замена уравнений Власова–Доннелла уравнениями четвертого порядка для тангенциального и изгибного состояний. Отметим, что в случае действия нормальной нагрузки и наличия перепада температуры по толщине оболочки имеет место лишь изгибное состояние. При действии нагрузки аксиальной или окружной, или при наличии температурного поля, постоянного по толщине оболочки, имеет место лишь тангенциальное состояние, что делает этот метод еще более эффективным и привлекательным. Асимптотическая погрешность последних двух состояний резко падает по мере увеличения изменчивости напряженного состояния (кривая 3). Замена уравнения Власова–Доннелла уравнениями изгибного и тангенциального состояний означает переход от эллиптического разрешающего уравнения к полигармоническому $\nabla^8 \Phi(\alpha, \beta) = 0$, которое, в свою очередь, распадается на два бигармонических, имеющих несвязанные решения. Для установления значения номера ряда, при котором такая замена правомерна, рассмотрим знаменатель подынтегрального выражения (1.4), в котором сохраним лишь члены, отвечающие уравнению Власова–Доннелла, и преобразуем его к виду

$$L(\lambda, n) = (\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + (1 - \nu^2)c^{-2}\lambda^4 = \lambda^8 + 4k^2 n^2 \lambda^6 + [6k^4 n^4 + (1 - \nu^2)c^{-2}] \lambda^4 + 4k^6 n^6 \lambda^2 + k^8 n^8. \quad (1.6)$$

Значение номера гармоник n , при котором можно перейти к уравнению полигармоническому, или двум бигармоническим, получим из сравнения членов в квадратных скобках с множителем λ^4 , входящим в (1.6):

$$k^4 n^4 \gg 2(1 - \nu^2)(R/h)^2. \quad (1.7)$$

Далее примем во внимание, что приближенные уравнения теории оболочек, описывающие элементарные напряженные состояния, например, уравнения краевого эффекта, являются источником погрешности порядка $(h/R)^{1/2}$ по сравнению с единицей, тогда как для уравнений общей теории оболочек характерна погрешность порядка (h/R) [4].

Поэтому при использовании приближенных уравнений теории оболочек можно пренебрегать величинами порядка $(h/R)^{1/2}$ по сравнению с единицей, и тогда вместо (1.7) получаем

$$n^4 \approx (2/k^4) (1 - \nu^2) (R/h)^{5/2}. \quad (1.8)$$

Округленное до ближайшего целого числа значение n , найденное по формуле (1.8), будем обозначать через n^* .

Таким образом, имеем два характерных значения n ($n = \bar{n}, n = n^*$), разделяющих полный интервал изменения номеров гармонического ряда ($n = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$) на «низкие» ($n \leq \bar{n}$), «средние» ($\bar{n} < n < n^*$) и «высокие» ($n \geq n^*$) номера гармоник.

Теперь, имея значения \bar{n}, n^* , нетрудно записать решение на основе одного из сформулированных здесь МАС. Сделаем это для второго МАС, воспользовавшись (1.1–1.4), для случая нагружения оболочки по отрезкам контура ($\alpha_0 \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(\alpha, \beta) = & \left[\begin{aligned} & \nu \sum_{n=0}^{\bar{n}} \theta_n \cos kn\beta \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{\lambda^2 \cos \alpha \lambda}{\lambda^4 + 4\eta^4} d\lambda + \\ & + \frac{1}{2\eta^4} \sum_n^{\bar{n}} \theta_n g_{2n}^0 \cos kn\beta \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \lambda}{\lambda^4 + 4\mu_n^4} d\lambda + \\ & + \sum_{\bar{n}+1}^{n^*} \theta_n \cos kn\beta \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{\bar{g}_{2n}(\lambda, n) \cos \alpha \lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^4 + 4\eta^4 \lambda^4} d\lambda + \\ & + \sum_{n^*+1}^\infty \theta_n \cos kn\beta \times \\ & \times \int_0^\infty \frac{(k^2 n^2 + \nu \lambda^2) \cos \alpha \lambda}{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2} d\lambda \end{aligned} \right] \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta^4 &= 3(1 - \nu^2)(R/h)^2; \\ g_{2n}^0 &= k^4 n^4 (k^4 n^4 - 1); \\ \bar{g}_{2n}(\lambda, n) &= (k^2 n^2 + \nu \lambda^2) (\lambda^2 + k^2 n^2)^2; \\ 4\mu_n^4 &= c^2 (1 - \nu^2)^{-1} k^4 n^4 (k^4 n^4 - 1)^2. \end{aligned}$$

Выражения (1.4), (1.9) послужили алгоритмом для вычислений с целью сравнений вклада элементарных напряженных состояний в полное напряженное состояние оболочки с параметрами: $R/h = 100, k = 2, \alpha = \beta = 0, \beta_0 = 0,125$. На рис. 2 представлены значения изгибающего момента для n -й гармоники на основе: общей теории оболочек (кривая \circ), уравнений Власова–Доннелла (\square), полубезмоментной теории (\bullet), теории краевого эффекта (кружок с вертикальной чертой по диаметру), полубезмоментной теории плюс краевого эффекта (кружок, залитый наполовину), уравнений изгибного состояния (залитый треугольник).

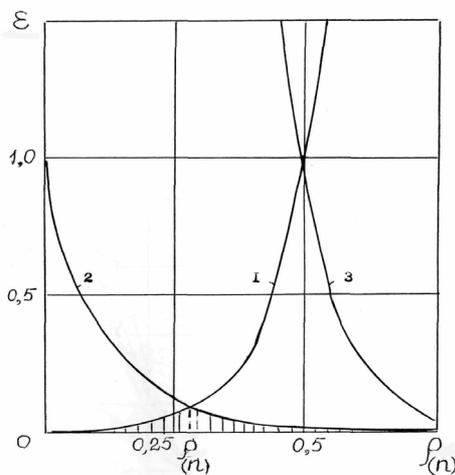


Рис. 1

Графики дают возможность увидеть действительную погрешность для каждого номера гармоники, «высветить» роль каждого элементарного состояния, а также убедиться не только в качественном, но и в количественном соответствии значений \bar{n}, n^* действительно имеющему место напряженному состоянию оболочки. Кроме того, нетрудно убедиться в неправомерности вывода некоторых авторов о возможности перехода от уравнения Власова–Доннелла к полигармоническому уравнению лишь при весьма больших значениях гармоник, в десятки раз превышающих те, что следуют из полученной здесь формулы для n^* и из действительного напряженного состояния, показанного на рис. 2.

Сформулированные здесь первый и второй МАС позволяют получать практически точные решения искомых факторов (погрешность меньше 5%), а третий МАС дает возможность построения весьма «прозрачных» выражений, а при некоторых допущениях и

конечных формул, область применения которых достаточно просто устанавливается. Например, в диапазоне изменения параметра нагрузки $\beta_0 \geq (h/R)^{1/2}$ может быть записано следующее приближенное равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} G_2(0,0) &= \frac{1}{2\pi\beta_0} \sum_{n=0}^n \theta_n \cos kn\beta \times \\ & (k^2 n^2 + \nu\lambda^2 - 1) \times \\ & \times (\lambda^2 + k^2 n^2)^2 \cos \alpha\lambda \times \\ & \times \int_0^\infty \left[\frac{(\lambda^2 + k^2 n^2)^2 (\lambda^2 + k^2 n^2 - 1)^2 +}{+ 2(1-\nu)\lambda^2 (\lambda^4 - k^4 n^4) +} \right]^{-1} d\lambda \approx \\ & \approx \frac{\pi - (1-\nu)k\beta_0}{8\pi\beta_0^4 \sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{h}{R}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

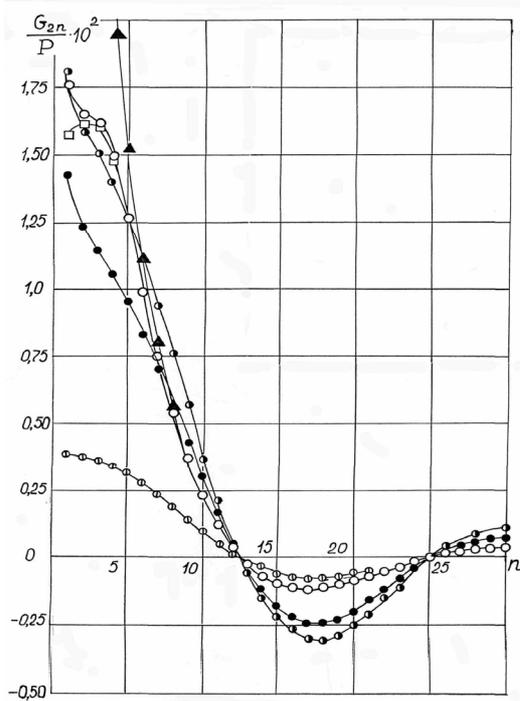


Рис. 2

Простые аналитические выражения или конечные формулы могут быть записаны не только для бесконечно длинных оболочек.

В качестве примера приведем выражение для радиального перемещения в точках приложения сосредоточенных нормальных сил P на свободном крае полубесконечной цилиндрической оболочки (при $k = 2, \nu = 0,3$):

$$w(0,0) = 3 \left(\frac{R}{h} \right)^2 \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{P}{ER}.$$

Небезынтересно отметить, что радиальное перемещение, найденное по этой формуле для двух сосредоточенных сил и по аналогичным формулам для любого числа сил, ровно в 4 раза больше радиального перемещения в случае бесконечно длинной оболочки, нагруженной такой же системой сил ($k = 2, 3, 4, 5, \dots$). Специально проведенные прецизионные эксперименты подтвердили весьма высокую точность этих формул и вышеприведенное численное соотношение между максимальными значениями радиального перемещения в бесконечно длинной и полубесконечной оболочках [1].

2. Рассмотрим цилиндрическую оболочку из трансверсально-изотропного материала, имеющего в каждой точке плоскость изотропии, параллельную срединной поверхности, так что главное направление упругости, перпендикулярное к плоскости изотропии, совпадает с соответствующей нормалью γ . Запишем дифференциальные уравнения общей теории трансверсально-изотропных оболочек, являющиеся обобщением уравнений В. З. Власова, а также приведем различные приближенные уравнения и номера гармоник для «склеивания» решений при использовании МАС.

Система дифференциальных уравнений относительно пяти искомым функций – трех компонент перемещений $u(\alpha, \beta)$, $V(\alpha, \beta)$, $w(\alpha, \beta)$ и двух сдвиговых поперечных деформаций $\varphi(\alpha, \beta)$, $\psi(\alpha, \beta)$ – может быть преобразована к классическому виду, принятому в общей теории изотропных оболочек [7]:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \nabla^2 (\nabla^2 + 1)^2 w - \\ & - 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} - \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \right) \nabla^2 w + \\ & + \frac{1-\nu^2}{c^2} (1 - \Omega \nabla^2) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} \\ & = \frac{R^4}{D} (1 - \Omega \nabla^2) \nabla^2 \nabla^2 p(\alpha, \beta); \\ & \nabla^2 \nabla^2 u = -\nu \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \\ & + c^2 \left(\frac{\partial^5 w}{\partial \alpha^5} - \frac{\partial^5 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^4} \right); \\ & \nabla^2 \nabla^2 V = -(2+\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} + \\ & + 2c^2 \left(\frac{\partial^5 w}{\partial \alpha^4 \partial \beta} + \frac{\partial^5 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\Omega = \frac{Eh^2}{10(1-\nu^2)G\gamma R^2}$ представляет собой важную величину, характеризующую влияние поперечных сдвигов на напряженно-деформированное состояние оболочки.

К системе уравнений (2.1) необходимо присоединить систему двух дифференциальных уравнений, связывающих с перемещениями искомые функции φ, ψ :

$$\begin{aligned} & \left[(1-\nu^2) \frac{R^3}{E} - \frac{h^2 R}{10G\gamma} \nabla^2 \right] \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) + \\ & + \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha^3} - \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \\ & + \frac{3-\nu}{2} \frac{\partial^3 V}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = 0 \\ & \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} + w - c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + w \right) + \\ & + \frac{1-\nu^2}{12} \frac{Rh^2}{E} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right) = \\ & = - \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} p(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Записанная здесь система уравнений (2.1–2.2) пригодна для решения задач о расчете трансверсально-изотропных цилиндрических оболочек при произвольно распределенном по поверхности нормальном давлении $p(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим упрощенные по критерию изменчивости нагрузки уравнения, которые могут давать пригодные результаты при рассмотрении частных задач.

В случае напряженно-деформированного состояния, отвечающего критерию $|\partial^2 f / \partial \beta^2| \gg |\partial^2 f / \partial \alpha^2|$ [4] (f – любая искомая функция: перемещение, усилие, момент), на основании (2.1) получаем следующее разрешающее уравнение относительно радиального перемещения $w(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \Omega \frac{\partial^2}{\partial \alpha^4} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \\ & + \frac{c^2}{1-\nu^2} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 w = \\ & = \frac{R^2}{Eh} \left(1 - \Omega \frac{\partial^2}{\partial \beta^4} \right) \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} p(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Оно является разрешающей функцией, через которую с помощью дифференциальных операторов выражаются все силовые и деформационные факторы в оболочке.

Напряженное состояние, удовлетворяющее критерию $|\partial^2 f / \partial \alpha^2| \gg |\partial^2 f / \partial \beta^2|$, может

быть описано с помощью следующего разрешающего дифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + \frac{1-\nu^2}{c^2} \left(1 - \Omega \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) = \\ & = \frac{R^4}{D} \left(1 - \Omega \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) p(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Критерию $|\partial^2 f / \partial \alpha^2| \approx |\partial^2 f / \partial \beta^2| \gg |f|$, соответствующему случаю приблизительно одной изменчивости напряженно-деформированного состояния в α и β направлениях, отвечает следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 w + \frac{1-\nu^2}{c^2} (1 - \Omega \nabla^2) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} = \\ & = \frac{R^4}{D} (1 - \Omega \nabla^2) \nabla^2 \nabla^2 p(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Когда изменчивость напряженного состояния оболочки настолько велика, что в разрешающем уравнении (2.1) можно пренебречь всеми членами его левой части по сравнению с первым членом, содержащим самую старшую производную, получаем:

$$\begin{aligned} & \nabla^2 \nabla^2 u = -\nu \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2}; \\ & \nabla^2 \nabla^2 V = -(2+\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta} - \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3}; \\ & \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{R^4}{D} (1 - \Omega \nabla^2) p(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Таким образом, (2.3)–(2.6) – это уравнения модифицированной полубезмоментной теории, теории краевого эффекта, Власова–Доннелла и изгибного состояния для случая трансверсально-изотропных оболочек.

Далее, при переходе от уравнений общей теории (2.1) к уравнениям модифицированной полубезмоментной теории (2.3) и теории краевого эффекта (2.4), полученный ранее критерий, основанный на обеспечении минимума асимптотической погрешности, следует признать справедливым без каких-либо замечаний. Критериальное значение \bar{n} при этом определяется как число, найденное по формуле $n^4 \cong 2\sqrt{3}(R/h)$ и округленное до ближайшего целого значения \bar{n} .

Для перехода от уравнений общей теории (2.1) к (2.5) или (2.6) получаем следующее численное значение номера гармоники

$$n = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{A\Omega + \sqrt{A^2\Omega^2 + 24A}},$$

локальный краевой эффект в зоне приложения нагрузки, а другое слагаемое суть решение для основного состояния.

В сечении оболочки $r = a$, где приложена нагрузка, обеспечиваем выполнение условий неразрывности для решений уравнений (3.2), (3.3) по нормальному перемещению и его трем производным [8, 10].

Далее, складывая эти решения, для вычисления нормального перемещения в середине одного из «к» нагруженных отрезков получим формулу:

$$\frac{Eh}{P}w = \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/4}}{\pi(\cos\theta)^{1/2}} \left(\frac{a}{h}\sin\theta\right)^{3/2} \times \left\{ \frac{k}{4\sin\theta\cos\theta} \frac{h}{a} + [3(1-\nu^2)]^{1/2} \times \left(\frac{\pi^2}{6k} - \frac{\pi\beta_0}{4} + \frac{1}{12}k\beta_0^2 \right) \right\}.$$

При действии сосредоточенных сил эта формула существенно упрощается. Предельный переход $\beta_0 \rightarrow 0$ приводит к следующему выражению:

$$\frac{Eh}{P}w = \frac{[3(1-\nu^2)]^{1/4}}{\pi(\cos\theta)^{1/2}} \left(\frac{a}{h}\sin\theta\right)^{3/2} \times \left\{ \frac{k}{2\sin 2\theta} \frac{h}{a} + \frac{\pi^2[3(1-\nu^2)]^{1/2}}{6k} \right\}.$$

Положив в этой формуле $\cos\theta = 1, a\sin\theta = R_0$, найдем для вычисления нормального перемещения под сосредоточенной силой в бесконечно длинной цилиндрической оболочке с радиусом $R_0 = R$:

$$\frac{Eh}{P}w = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\pi} \left(\frac{R}{h}\right)^{3/2} \times \left[\frac{k}{4} + \frac{\pi^2\sqrt{3(1-\nu^2)}R}{6k} \frac{1}{h} \right].$$

Чтобы выполнить синтез внутренних силовых факторов, заменим в решениях осесимметричного краевого эффекта множитель p_0 на $P(2\beta_0 a \sin\theta)^{-1}$ и сложим с соответствующими решениями основного состояния. Такая операция дает удобные для проведения

расчетов формулы

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{P} &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2\pi\beta_0(ah\sin\theta\cos\theta)^{1/2}} \cdot \left\{ \frac{\pi - k\beta_0}{2} + \frac{3\sin^3\theta\cos\theta}{8k^2} \cdot \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a}{h} \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{\pi^2}{6}k\beta_0 - \frac{\pi}{4}(k\beta_0)^2 + \frac{1}{12}(k\beta_0)^3 \right] \right\}; \\ \frac{T_2}{P} &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\beta_0(ah\sin\theta\cos\theta)^{1/2}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{G_1}{P} &= \frac{1}{8\beta_0\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot (\sin\theta\cos\theta)^{1/2}} \cdot \left(\frac{h}{a}\right)^{1/2} \times \\ &\times \left[1 + \frac{(\pi - k\beta_0)\nu}{\pi} + \frac{(3 - 4\nu)tg\theta}{32\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{a} \right]; \\ \frac{G_2}{P} &= \frac{1}{8\beta_0\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot (\sin\theta\cos\theta)^{1/2}} \times \\ &\times \left[\nu + \frac{\pi - k\beta_0}{\pi} + \frac{(3\nu - 4)tg\theta}{32\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{h}{a} \right]. \end{aligned}$$

Эти компактные замкнутые формулы позволяют вычислять максимальные значения усилий и изгибающих моментов, которые возникают в слабokonической оболочке в середине нагруженных областей.

При $\cos\theta = 1, a\sin\theta = R_0 = R$ из них следуют формулы:

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{P} &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\beta_0\sqrt{hR}} \cdot \frac{\pi - k\beta_0}{2}; \\ \frac{T_2}{P} &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\beta_0\sqrt{hR}} \cdot \frac{\pi - k\beta_0}{2}; \\ \frac{T_2}{P} &= \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{4\beta_0\sqrt{hR}}; \\ \frac{G_2}{P} &= \frac{\nu\pi + \pi - k\beta_0}{8\pi\beta_0\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \cdot \sqrt{\frac{h}{R}}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Аналогичные (3.4) формулы рекомендованы для вычисления внутренних силовых факторов в цилиндрических оболочках [1], где они обобщены также на случай физически ортотропных оболочек.

4. При решении различных задач термоупругости оболочек часто весьма полезным может оказаться использование математических аналогий между напряженно-деформированными состояниями при силовом и температурном воздействиях на оболочку. Аналогии позволяют применить разработанные для случаев силового воздействия

методы и аналитические выражения к случаям воздействия температурных полей. Это в полной мере относится к методам асимптотического синтеза и к построенным на их основе аналитическим выражениям.

Рассмотрим аналогию, исходя вначале из уравнений общей теории оболочек, а затем для уравнений различных элементарных напряженных состояний. Аналогия, установленная между эффектами от силового и температурного воздействий в случае полубезмоментной теории, обладает той «прозрачностью», которая помогает выделить существо задачи. Такой же «прозрачностью» обладает, на наш взгляд, аналогия для краевого эффекта при осесимметричном нормальном нагружении и при температуре, постоянной по толщине. Здесь решение термоупругой задачи определяется через решение при силовом нормальном нагружении путем умножения на постоянный коэффициент.

Пусть на цилиндрическую оболочку действуют три компоненты поверхностной нагрузки — продольная $p_1(\alpha, \beta)$, окружная $p_2(\alpha, \beta)$, нормальная $p_3(\alpha, \beta)$, а также температурное поле $t^*(\alpha, \beta)$, постоянное по толщине оболочки. Тогда при силовых воздействиях задача может быть приведена к одному уравнению типа:

$$\begin{aligned} L\Phi(\alpha, \beta) &= R^4 D^{-1} p_i(\alpha, \beta); \quad i = 1, 2, 3; \\ \Phi_1(\alpha, \beta) &= -\Phi(\alpha, \beta); \quad \Phi_2(\alpha, \beta) = \\ &= -\Phi(\alpha, \beta); \quad \Phi_3(\alpha, \beta) = \Phi(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4.1)$$

При действии температурного поля $t^*(\alpha, \beta)$ разрешающее уравнение сунт:

$$L\Phi^*(\alpha, \beta) = (1 + \nu)c^{-2}\alpha_t R t^*(\alpha, \beta), \quad (4.2)$$

где α_t — коэффициент линейного температурного расширения.

Когда законы изменения силового и температурного полей совпадают, т. е.

$$\begin{aligned} t^*(\alpha, \beta) &= t_0^* \theta(\alpha, \beta); \\ p_i(\alpha, \beta) &= p_{i0} \theta(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

легко устанавливается связь между разрешающими функциями легко устанавливается связь между разрешающими функциями $\Phi(\alpha, \beta)$ и $\Phi^*(\alpha, \beta)$, а затем и между искомыми факторами в оболочке [1];

$$\begin{aligned} \Phi^* &= - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \Phi_3 \right) f^*; \\ u^* &= - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + u_3 \right) f^*; \\ v^* &= - \left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial v_2}{\partial \beta} + v_3 \right) f^*; \\ T_j^* &= - \left(\frac{\partial T_{j1}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{j2}^*}{\partial \beta} + T_{j3}^* \right) f^* - \\ &- Eh(1 - \nu)^{-1} \alpha_t t^*(\alpha, \beta); \\ S_j^* &= - \left(\frac{\partial S_{j1}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial S_{j2}^*}{\partial \beta} + S_{j3}^* \right) f^*; \\ G_j^* &= - \left(\frac{\partial G_{j1}^*}{\partial \alpha} + \frac{\partial G_{j2}^*}{\partial \beta} + G_{j3}^* \right) f^*; \quad (J = 1, 2). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь индексы «1», «2», «3» обозначают, что тот или иной фактор возникает в оболочке при действии продольной ($i = 1$), окружной ($i = 2$), радиальной ($i = 3$) нагрузок.

Имея соотношения математической аналогии (4.3), не решая термоупругую задачу для оболочки, нетрудно записать разрешающую функцию, искомые силовые и деформационные факторы. Сделаем это для разрешающей функции $\Phi^*(\alpha, \beta)$ в случае температурного поля $t^*(\alpha, \beta)$. Имеем выражение:

$$\begin{aligned} \Phi^*(\alpha, \beta) &= \frac{24}{\pi} (1 + \nu) \left(\frac{R}{h} \right)^2 \times \\ &\times \alpha_t R t_0^* \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \cos kn\beta \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha_0 \lambda \cos \alpha \lambda}{\lambda L(\lambda, n)} d\lambda. \end{aligned}$$

В такой же форме можно записать остальные искомые факторы.

Соотношения математической термосиловой аналогии (4.3) упрощаются при использовании приближенных уравнений теории оболочек.

Соотношения термосиловой математической аналогии, устанавливающие прямую дифференциальную связь между эффектами от силового и температурного воздействий, позволяют достаточно просто найти частные решения, а в случае, например, бесконечно длинной оболочки при локализованном температурном поле — и полное решение задачи для всех искомых факторов при любом температурном поле, если имеются решения соответствующих силовых задач.

В термоупругой задаче, как и в силовой, наиболее универсальными являются первый

и второй МАС, а получающиеся на их основе результаты решения задач рассмотренного класса практически совпадают с данными по общей теории оболочек. Второй и третий МАС позволяют строить решение термоупругих задач в замкнутом виде, позволяющем избежать суммирования бесконечных рядов [1].

Аналогично могут быть записаны и соотношения термосиловой аналогии при наличии температурного перепада по толщине оболочки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Излагаются основы методов аналитического синтеза (МАС) напряженного состояния (НС) оболочек вращения и построение аналитических решений уравнений. Показано, что в случае силового воздействия на конические и цилиндрические оболочки могут быть получены аналитические выражения или простые формулы в замкнутом виде.

Записаны дифференциальные уравнения общей теории трансверсально-изотропных оболочек как обобщения уравнения В. З. Власова, а также приведены приближенные уравнения и номера гармоник для «склеивания» решений при использовании МАС.

Приводятся соотношения термосиловой аналогии, позволяющие перейти к решениям термоупругих от решений силовых задач, устанавливающие прямую дифференциальную связь между эффектами силового и температурного воздействий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Нерубайло, Б. В.** Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек / Б. В. Нерубайло. М. : Машиностроение, 1983. 248 с.
2. **Образцов, И. Ф.** О методах синтеза напряженного состояния в теории оболочек / И. Ф. Образцов, Б. В. Нерубайло // ДАН СССР. 1983. Т. 269, № 1. С. 54–56.
3. **Чернышев, Г. Н.** О контактных задачах в теории оболочек / Г. Н. Чернышев // Тр. VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. М. : Наука, 1970. С. 898–903.
4. **Новожилов, В. В.** Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. Л. : Судпромгиз, 1962. 417 с.
5. **Нерубайло, Б. В.** Три теоремы о погрешности решений различных уравнений теории оболочек с сингулярной правой частью / Б. В. Нерубайло // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 3.
6. **Образцов, И. Ф.** Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций / И. Ф. Образцов, Б. В. Нерубайло, И. В. Андрианов. М. : Машиностроение, 1991. 416 с.
7. **Нерубайло, А. Б.** Обобщение уравнений Власова для цилиндрической оболочки на случай трансверсально-изотропного материала / А. Б. Нерубайло, Б. В. Нерубайло // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 4. С. 125–132.
8. **Тимошенко, С. П.** Пластинки и оболочки / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М. : Физматгиз, 1963. 636 с.
9. **Канн, С. Н.** Строительная механика оболочек / С. Н. Канн. М. : Машиностроение, 1966. 508 с.
10. **Нерубайло, Б. В.** Асимптотический метод расчета конической оболочки на действие локальной нагрузки / Б. В. Нерубайло, В. П. Ольшанский // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 3. С. 115–124.
11. **Образцов, И. Ф.** Об одной термосиловой аналогии в теории оболочек / И. Ф. Образцов, Б. В. Нерубайло // ДАН СССР. 1986. Т. 291, № 2. С. 306–309.
12. **Nerubailo, B. V.** Methods of asymptotics synthesis for the solution of some problem in perturbation / B. V. Nerubailo, T. B. Nerubailo // 3th Int. Congr. on Industrial and Applied Math. : Book of Abstr. Hamburg, 1995.

ОБ АВТОРАХ



Нерубайло Борис Васильевич, проф. каф. строит. мех. и прочн. ЛА МАИ. Дипл. инж.-мех. по самолетостроению (МАИ, 1961). Д-р техн. наук по прочности ЛА (там же, 1980). Иссл. в обл. строит. мех. и прочн. ЛА, механики деформ. тв. тела.



Жернаков Владимир Сергеевич, проф., зав. каф. сопр. мат. УГАТУ. Дипл. инж.-мех. по авиац. двиг. (УАИ, 1967). Д-р техн. наук по тепл. двиг. ЛА (УГАТУ, 1992). Иссл. в обл. мех-ки деформ. тв. тела.



Бердников Юрий Николаевич, доц. той же каф. Дипл. инж.-мех. по экспл. ЛА (РКВИАВУ ВВС, 1959). Канд. техн. наук по строит. мех. и прочн. ЛА (МАИ, 1967). Иссл. в обл. мех-ки деформ. тв. тела.