

УДК 534.1

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЕГО СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ МЕТОДОМ СПЛАЙНОВ

В. П. Павлов

victor.pavlov.51@yandex.ru

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Поступила в редакцию 19.03.2017

Аннотация. Рассматриваются собственные поперечные колебания прямого стержня с поперечным сечением прямоугольной формы, имеющим постоянную высоту и переменную ширину, изменяющуюся по экспоненциальному закону. Аналитическим методом получены значения частот собственных колебаний при различных функциях изменения поперечного сечения стержня и различных способах его закрепления. Выяснено, что некоторые аналитические результаты заметно отличаются от ранее полученных другими авторами. Также для анализа спектра частот собственных колебаний стержня переменного сечения применен численный метод – метода сплайнов степени 5 дефекта 1. Детальное изучение погрешности метода сплайнов при сравнении с аналитическим решением показало, что на всех рассмотренных задачах данный метод характеризуется вторым порядком сходимости и обеспечивает точность расчета частот собственных колебаний для первых десяти собственных форм на уровне не менее шести значащих цифр. Это позволяет считать предлагаемый метод сплайнов весьма эффективным средством при анализе процессов поперечных колебаний стержней с переменным поперечным сечением в тех случаях, когда точное аналитическое решение неизвестно.

Ключевые слова: стержни переменного сечения; колебания; частоты собственных колебаний; сплайны; математическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании конструкций часто возникает задача определения частот собственных колебаний стержней с переменным по длине поперечным сечением. Существующие методы их расчета не всегда обеспечивают требуемую точность. Поэтому задача разработки новых методов расчета и в настоящее время является весьма актуальной.

Для расчета частот свободных поперечных колебаний стержней с переменным сечением применяется либо метод конечного элемента (МКЭ), реализованный, например, в пакетах ANSYS, SolidWorks и др., либо решить аналитически или численно дифференциальное уравнение четвертого порядка следующего вида [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где $w = w(x, t)$ – функция зависимости поперечных перемещений точек оси стержня от координаты x и времени t ; $\mu = \mu(x)$ – функция зависимости массы единицы длины стержня от x ; $E = \text{const}$ – модуль упругости материала стержня; $I = I(x)$ – функция зависимости осевого момента инерции поперечного сечения стержня от координаты x .

Запишем уравнение (1) в развернутой форме:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2E \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + E \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) будем искать в виде:

$$w = W(x) \sin \omega t, \quad (3)$$

где $W(x)$ – форма колебаний; ω – круговая частота собственных колебаний.

После подстановки (3) в (2) и ряда преобразований получаем:

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2E \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + E \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \mu \omega^2 W = 0. \quad (4)$$

В итоге задача определения частот собственных колебаний ω сводится к решению однородного дифференциального уравнения (4).

Аналитические решения задачи вида (1) рассматривались в работах [2–4].

Здесь будет рассматриваться уточнение аналитических решений и численный метод решения дифференциального уравнения (4), базирующийся на сплайн-функциях степени 5 дефекта 1.

Этот метод, далее называемый «метод сплайнов», хорошо зарекомендовал себя при решении разнообразных статических и динамических задач о деформировании стержней постоянного поперечного сечения [5–10]. В предлагаемой работе оцениваются его возможности при расчете частот собственных колебаний стержня с переменным поперечным сечением.

При оценки точности метода сплайнов будем придерживаться методике, изложенной в работе [6].

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА СПЛАЙНОВ СТЕПЕНИ 5 ДЕФЕКТА 1 ПРИ РАСЧЕТЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

При построении сплайна степени 5 дефекта 1 на отрезке $[a, b]$ формируется сетка Δ :

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b, \quad (5)$$

имеющая N узлов. На данной сетке строится сплайн-функция $\mathbf{W}_{5,1}(x)$ степени 5 дефекта 1, имеющая $N_s = N + 4$ степеней свободы.

В пределах каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1, N-1}$ сплайн-функция $\mathbf{W}_{5,1}(x)$ является многочленом пятой степени:

$$\begin{cases} \mathbf{W}_{5,1}(x) = \sum_{\alpha=0}^5 a_{\alpha}^{(i)} (x - x_i)^{\alpha}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{1, N-1}. \end{cases} \quad (6)$$

Согласно [6], параметры, определяющие сплайн, сведены в вектор-столбец \mathbf{Q} из $N_s = N + 4$ параметров сплайна:

$$\mathbf{Q} = (q_k, \quad k = \overline{1, N+4})^T, \quad (7)$$

где

$$\begin{cases} q_1 = \mathbf{W}_{5,1}(x_1), & q_2 = \frac{d\mathbf{W}_{5,1}(x_1)}{dx}, \\ q_3 = \frac{d^2\mathbf{W}_{5,1}(x_1)}{dx^2}, & q_4 = \frac{d^3\mathbf{W}_{5,1}(x_1)}{dx^3}, \\ \{q_{i+4} = \frac{d^4\mathbf{W}_{5,1}(x_1)}{dx^4}, \quad i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (8)$$

В узлах сетки Δ рассматриваются значения сплайн-функции $\mathbf{W}_{5,1}(x)$ и ее производные до четвертого порядка включительно:

$$\begin{cases} f_i = \mathbf{W}_{5,1}(x_i), & f_i^s = \frac{d^s \mathbf{W}_{5,1}(x_i)}{dx^s}, \\ s = 1, \dots, 4, & i = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (9)$$

Из них формируются векторы-столбцы:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_f = (f_i, \quad i = \overline{1, N})^T, \\ \mathbf{V}_{df} = (f_i^1, \quad i = \overline{1, N})^T, \\ \mathbf{V}_{dsf} = (f_i^s, \quad i = \overline{1, N})^T, \quad s = 2, \dots, 4. \end{cases} \quad (10)$$

Векторы узловых значений сплайн-функции $\mathbf{W}_{5,1}(x)$ и ее производных определим согласно [6] матричными выражениями:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_f = \mathbf{M}_f \mathbf{Q}, & \mathbf{V}_{df} = \mathbf{M}_{df} \mathbf{Q}, \\ \mathbf{V}_{d2f} = \mathbf{M}_{d2f} \mathbf{Q}, & \mathbf{V}_{d3f} = \mathbf{M}_{d3f} \mathbf{Q}, \\ \mathbf{V}_{d4f} = \mathbf{M}_{d4f} \mathbf{Q}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\mathbf{M}_f, \mathbf{M}_{df}, \mathbf{M}_{d2f}, \mathbf{M}_{d3f}, \mathbf{M}_{d4f}$ – прямоугольные матрицы размера $N \times (N+4)$, формируемые по методике, изложенной в [6].

Для построения дискретного аналога дифференциального уравнения (4) сформируем диагональные матрицы размера $(N \times N)$ с размещенными на их диагоналях значениями погонной массы μ , а также изгибной жесткости EI и ее производных для поперечных сечений стержня в узлах сетки сплайна:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\mu} \equiv [\mathbf{J}_{ik}^{\mu}], \\ \text{где } \mathbf{J}_{ik}^{\mu} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ \mu(x_i), & \text{если } i = k, \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{EI} \equiv [\mathbf{J}_{ik}^{EI}], \\ \text{где } \mathbf{J}_{ik}^{EI} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ EI(x_i), & \text{если } i = k, \end{cases} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \mathbf{J}_{\partial EI} \equiv [\mathbf{J}_{ik}^{\partial EI}], \\ \text{где } \mathbf{J}_{ik}^{\partial EI} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ E \frac{\partial I(x_i)}{\partial x}, & \text{если } i = k, \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}_{\partial^2 EI} \equiv [\mathbf{J}_{ik}^{\partial^2 EI}], \\ \text{где } \mathbf{J}_{ik}^{\partial^2 EI} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq k, \\ E \frac{\partial^2 I(x_i)}{\partial x^2}, & \text{если } i = k. \end{cases} \end{array} \right. \quad (15)$$

На основе (9), (10), (12)–(15) построим дискретный аналог уравнения (4):

$$\begin{aligned} & \mathbf{J}_{EI} \mathbf{V}_{d4f} + 2\mathbf{J}_{\partial EI} \mathbf{V}_{d3f} + \\ & + \mathbf{J}_{\partial^2 EI} \mathbf{V}_{d2f} - \omega^2 \mathbf{J}_{\mu} \mathbf{V}_f = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставим (11) в (16) и получим в матричном виде систему из N уравнений с $N+4$ неизвестными:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{J}_{EI} \mathbf{M}_{d4f} + 2\mathbf{J}_{\partial EI} \mathbf{M}_{d3f} + \\ & + \mathbf{J}_{\partial^2 EI} \mathbf{M}_{d2f}) \mathbf{Q} - \omega^2 (\mathbf{J}_{\mu} \mathbf{M}_f) \mathbf{Q} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$\mathbf{BQ} - \omega^2 \mathbf{CQ} = 0, \quad (18)$$

где \mathbf{B} и \mathbf{C} – прямоугольные матрицы размера $N \times (N+4)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B} = \mathbf{J}_{EI} \mathbf{M}_{d4f} + \\ + 2\mathbf{J}_{\partial EI} \mathbf{M}_{d3f} + \mathbf{J}_{\partial^2 EI} \mathbf{M}_{d2f}, \\ \mathbf{C} = \mathbf{J}_{\mu} \mathbf{M}_f. \end{array} \right. \quad (19)$$

При расчете на колебания конкретных стержневой система (18) дополняется системой из четырех уравнений, учитывающих конкретные краевые условия:

$$\mathbf{AQ} = 0, \quad (20)$$

где \mathbf{A} – прямоугольная матрица размера $4 \times (N+4)$.

В частности для стержня, защемленного при $x=0$ и свободного при $x=l$ (рис. 1), краевые условия задаются выражениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = 0, \\ \frac{d^2 W}{dx^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = 0, \quad \text{при } x = l. \end{array} \right. \quad (21)$$

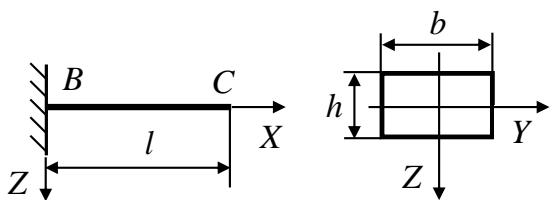


Рис. 1. Стержень, защемленный при $x=0$ и свободный при $x=l$

При этом компоненты матрицы \mathbf{A} определяются компонентами из соответствующих строк матриц \mathbf{M}_f , \mathbf{M}_{df} , \mathbf{M}_{d2f} и \mathbf{M}_{d3f} :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{1,j} = M_{1,j}^f, \\ A_{2,j} = M_{1,j}^{df}, \\ A_{3,j} = M_{N,j}^{d2f}, \\ A_{4,j} = M_{N,j}^{d3f}, \quad j = \overline{1, N+4}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Для стержня, защемленного при $x=0$ и шарнирно опертого при $x=l$ (рис. 2), краевые условия задаются выражениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad \text{при } x = 0, \\ W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x = l. \end{array} \right. \quad (23)$$

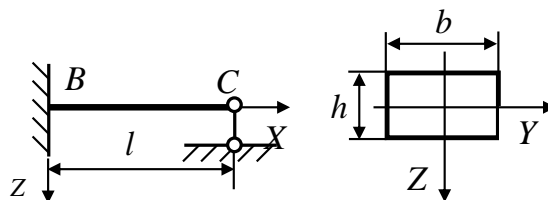


Рис. 2. Стержень, защемленный при $x=0$ и шарнирно опертый при $x=l$

При этом компоненты матрицы \mathbf{A} определяются компонентами из соответствующих строк матриц \mathbf{M}_f , \mathbf{M}_{df} , \mathbf{M}_{d2f} :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{1,j} = M_{1,j}^f, \\ A_{2,j} = M_{1,j}^{df}, \\ A_{3,j} = M_{N,j}^f, \\ A_{4,j} = M_{N,j}^{d2f}, \quad j = \overline{1, N+4}. \end{array} \right. \quad (24)$$

В итоге, объединяя (18) и (20), получаем систему из $N+4$ линейных однородных алгебраических уравнений с $N+4$ неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{BQ} - \omega^2 \mathbf{CQ} = 0, \\ \mathbf{AQ} = 0. \end{array} \right. \quad (25)$$

Представим систему уравнений в виде:

$$\mathbf{DQ} = 0, \quad (26)$$

где \mathbf{D} – квадратная матрица размера $(N+4) \times (N+4)$

$$\mathbf{D} = (D_{ik}, \quad i = \overline{1, N+4}, \quad k = \overline{1, N+4}) \quad (27)$$

с компонентами, определяемыми выражениями

$$\begin{cases} D_{nk} = B_{nk} - \omega^2 C_{nk}, \\ n = \overline{1, N}, \quad k = \overline{1, N+4}, \\ D_{rk} = A_{sk}, \quad r = s + N, \\ s = \overline{1, \dots, 4}, \quad k = \overline{1, N+4}. \end{cases} \quad (28)$$

Частоты собственных колебаний ω определяются из равенства нулю определителя \tilde{D} , сформированного из компонент матрицы D :

$$\tilde{D} = \det[D_{ik}] = 0. \quad (29)$$

Таким образом фактически мы переходим к задаче определения собственных значений матрицы, алгоритмы решения которой достаточно подробно изложены в работе [11].

ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА, ИМЕЮЩАЯ ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СПЛАЙНОВ

Для оценки точности предлагаемого численного метода выберем тестовую задачу, имеющую точное аналитическое решение о свободных колебаниях стержня с переменным поперечным сечением.

При формировании точного аналитического решения уравнения (4) выражения для погонной массы стержня μ и осевого момента инерции I выберем в экспоненциальной форме [2–4]:

$$\mu = \mu_0 e^{\frac{\delta x}{l}}, \quad I = I_0 e^{\frac{\delta x}{l}}, \quad (30)$$

где l – длина балки, μ_0 , I_0 и δ – некоторые постоянные.

На основе (30) определим производные:

$$\frac{\partial I}{\partial x} = I_0 \frac{\delta}{l} e^{\frac{\delta x}{l}}, \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = I_0 \frac{\delta^2}{l^2} e^{\frac{\delta x}{l}}. \quad (31)$$

При подстановке (30) и (31) в (4) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\delta}{l} \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \\ - \frac{\mu_0}{EI_0} \omega^2 W = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

При обозначениях

$$\begin{cases} x = l \tilde{x}, & x \in [0, 1], \\ W = W_0 \tilde{w}, & \tilde{w} \in [0, 1], \end{cases} \quad (33)$$

где W_0 – масштабный коэффициент с размерностью перемещения, уравнение (32) приводится к безразмерному виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + 2\delta \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \\ - \frac{\mu_0 l^4}{EI_0} \omega^2 \tilde{w} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Введем обозначение

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\mu_0 l^4}{EI_0} \omega^2 \quad (35)$$

и представим (34) в виде:

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + 2\delta \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} + \delta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \tilde{\omega}^2 \tilde{w} = 0. \quad (36)$$

Точное решение уравнения (36) имеет вид [2–4]:

$$\begin{aligned} \tilde{w} = e^{-\frac{\delta}{2} \tilde{x}} \left(C_1 e^{\lambda_1 \tilde{x}} + C_2 e^{-\lambda_1 \tilde{x}} + \right. \\ \left. + C_3 \sin(\lambda_2 \tilde{x}) + C_4 \cos(\lambda_2 \tilde{x}) \right), \end{aligned} \quad (37)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий, а величины λ_1 и λ_2 определяются выражениями

$$\lambda_1 = \sqrt{\tilde{\omega} + \frac{\delta^2}{4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\tilde{\omega} - \frac{\delta^2}{4}}. \quad (38)$$

В справедливости решения (37) можно убедиться непосредственной подстановкой (37) и (38) в уравнение (36).

Имея точное решение (37) уравнения (36), определим значения $\tilde{\omega}$ при различных краевых условиях.

Далее, считая найденным значение $\tilde{\omega}$, на основе формулы (35) запишем выражение для вычисления круговой частоты ω свободных поперечных колебаний стержня с конкретными размерами и из конкретного материала:

$$\omega = \tilde{\omega} \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI_0}{\mu_0}}. \quad (39)$$

ТОЧНЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, ЗАЩЕМЛЕННОГО НА ЛЕВОМ КОНЦЕ И СВОБОДНОГО НА ПРАВОМ

В отечественной литературе не приводятся численные результаты решения рассматриваемой тестовой задачи. Но такие результаты могут быть весьма полезными при тестировании различных численных методов, в том числе и метода конечного элемента, реализованного в вычислительных комплексах типа ANSYS, SolidWorks и др.

Поэтому в данной статье приводятся результаты решения ряда тестовой задачи в численном виде с большим числом значащих цифр. Это связано также и с тем, что, как показано далее, в зарубежных статьях точность решения данной тестовой задачи в ряде случаев имеет заметные погрешности.

Решим задачу 1, рассматривая консольный стержень, защемленный на левом конце и свободный на правом (рис. 1), с краевыми условиями:

$$\begin{cases} \tilde{w} = 0, & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} = 0, & \text{при } \tilde{x} = 0, \\ \frac{d^2 \tilde{w}}{d\tilde{x}^2} = 0, & \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} = 0, & \text{при } \tilde{x} = 1. \end{cases} \quad (40)$$

При подстановке (37) в уравнения (40) получаем систему из четырех уравнений

$$\begin{cases} \tilde{w}(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\delta}{2}(C_1 + C_2 + C_4) + \\ + (C_1\lambda_1 - C_2\lambda_1 + C_3\lambda_2) = 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\delta^2}{4}[C_1e^{\lambda_1} + C_2e^{-\lambda_1} + \\ + C_3 \sin(\lambda_2) + C_4 \cos(\lambda_2)] - \\ - \delta[C_1\lambda_1e^{\lambda_1} - C_2\lambda_1e^{-\lambda_1} + C_3\lambda_2 \cos(\lambda_2) - \\ - C_4\lambda_2 \sin(\lambda_2)] + C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1} + C_2\lambda_1^2e^{-\lambda_1} - \\ - C_3\lambda_2^2 \sin(\lambda_2) - C_4\lambda_2^2 \cos(\lambda_2) = 0, \\ \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3} = -\frac{\delta^3}{8}(C_1e^{\lambda_1} + C_2e^{-\lambda_1} + \\ + C_3 \sin(\lambda_2) + C_4 \cos(\lambda_2)) + \\ + \frac{3\delta^2}{4}[C_1\lambda_1e^{\lambda_1} - C_2\lambda_1e^{-\lambda_1} + \\ + C_3\lambda_2 \cos(\lambda_2) - C_4\lambda_2 \sin(\lambda_2)] - \\ - \frac{3\delta}{2}[C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1} + C_2\lambda_1^2e^{-\lambda_1} - \\ - C_3\lambda_2^2 \sin(\lambda_2) - C_4\lambda_2^2 \cos(\lambda_2)] + \\ + C_1\lambda_1^3e^{\lambda_1} - C_2\lambda_1^3e^{-\lambda_1} - \\ - C_3\lambda_2^3 \cos(\lambda_2) + C_4\lambda_2^3 \sin(\lambda_2), \end{cases} \quad (41)$$

решениями которой при условиях (38) являются значения $\tilde{\omega}_m$, $m = 1, 2, \dots$ круговых частот собственных колебаний при различных номерах $m = 1, 2, \dots$ форм колебаний.

Для рассматриваемой балки (см. рис. 1) по данной аналитической методике были вычислены «точные» значения $\tilde{\omega}$ для первых десяти форм колебаний при значениях $\delta = -2, -1, 0, 1, 2$. Далее их будем называть «наши точные значения». Полученные «точные значения» круговой частоты собственных колебаний $\tilde{\omega}$ для задачи с краевыми условиями (40) представлены в табл. 1–6.

Кроме этого, уравнение (36) было решено методом сплайнов для консольной балки с краевыми условиями (40) при различных числах узлов сетки N . Результаты численного расчета для числа отрезков сплайна $M = N - 1 = 4096$ представлены в табл. 2–6.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ 1

Задача о собственных колебаниях стержня с краевыми условиями (40) достаточно подробно изучена в работах [2–4], где представлены конкретные конечные результаты. Это позволило сопоставить наши результаты с результатами, полученные другими авторами.

Для этого сведем расчетные значения $\tilde{\omega}$, найденные в работах [2–4] при $\delta = -1$, и наши результаты в единую табл. 1.

Видим (табл. 1), что при первой форме колебаний ($m = 1$) у всех авторов точными являются как минимум две значащие цифры, что с точки зрения инженерных расчетов вполне достаточно, но такая точность мала для оценки точности тестируемых методов расчета.

Считая, что наши результаты, расположенные в последнем столбце табл. 1 наиболее точные, будем цифры других авторов, отличающиеся от цифр наших результатов, отмечать подчеркиванием (табл. 1). С ростом номера формы колебаний при $m > 1$ число точных значащих цифр в результатах расчетов работ [2–4] также увеличивается.

Затем в табл. 2–6 проведем сопоставление «аналитических» и «численных» результатов наших исследований с результатами работы [3] при значениях $\delta = -2, -1, 0, 1, 2$, полученных при краевых условиях (40).

Таблица 1

Значения $\tilde{\omega}$ при $\delta = -1$ для стержня, защемленного на левом конце и свободного на правом
при $\tilde{w} = d\tilde{w}(0)/d\tilde{x} = d^2\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^2 = d^3\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^3 = 0$

Форма колебаний, m	[4] (1956)	[2] (1995)	[3] (2007)	Наши «точные значения»
1	4,735	4,7347	4,72298	4,73490654221649
2	24,2025	24,2005	24,20168	24,2018132844023
3	63,85	63,8608	63,86448	63,8644902792793
4	–	123,091	123,09790	123,097908412741
5	–	–	202,06870	202,068768536219

Таблица 2

Значения $\tilde{\omega}$ при $\delta = -2$ для стержня, защемленного на левом конце и свободного на правом
при $\tilde{w} = d\tilde{w}(0)/d\tilde{x} = d^2\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^2 = d^3\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^3 = 0$

Форма колебаний, m	Наши «точные значения»	Метод сплайнов $M = 4096$	Результаты работы [3]
1	6,26264256893450	6,26264231576614	6,25877
2	26,5835932004034	26,5835926777522	26,58350
3	66,3744954399754	66,3744991903729	66,37449
4	125,684715943357	125,684739330185	125,68471
5	204,695312941743	204,695387783430	204,69531
6	303,424052860963	303,424233289106	–
7	421,881333131228	421,881701381328	–
8	560,071583103154	560,072255326124	–
9	717,997104787273	717,998236848967	–
10	895,659197513926	895,660990807472	–

Таблица 3

Значения $\tilde{\omega}$ при $\delta = -1$ для стержня, защемленного на левом конце и свободного на правом
при $\tilde{w} = d\tilde{w}(0)/d\tilde{x} = d^2\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^2 = d^3\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^3 = 0$

Форма колебаний, m	Наши «точные значения»	Метод сплайнов $M = 4096$	Результаты работы [3]
1	4,73490654221649	4,73490645124282	4,72298
2	24,2018132844023	24,2018136126137	24,20168
3	63,8644902792793	63,8644962919600	63,86448
4	123,097908412741	123,097936170124	123,09790
5	202,068768536219	202,068850544223	202,06876
6	300,772927988594	300,773119067071	–
7	419,213647298600	419,214030369548	–
8	557,392018470798	557,392710372960	–
9	715,308621161975	715,309778446583	–
10	892,963779363369	892,965604111036	–

Таблица 4

Значения $\tilde{\omega}$ при $\delta = 0$ для стержня, защемленного на левом конце и свободного на правом
при $\tilde{w} = d\tilde{w}(0)/d\tilde{x} = d^2\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^2 = d^3\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^3 = 0$

Форма колебаний, m	Наши «точные значения»	Метод сплайнов $M = 4096$	Результаты работы [3]
1	3,51601526850015	3,51601526100587	3,51602
2	22,0344915646668	22,0344922921727	22,03449
3	61,6972144135491	61,6972214473059	61,69721
4	120,901916052306	120,901945753802	120,90191
5	199,859530116803	199,859615283878	199,85953
6	298,555530967730	298,555726715107	–
7	416,990786056605	416,991175599529	–
8	555,165247555763	555,165948028835	–
9	713,078917978976	713,080086225561	–
10	890,731797198302	890,733635594896	–

Таблица 5

Значения $\tilde{\omega}$ при $\delta = 1$ для стержня, заземленного на левом конце и свободного на правом

$$\text{при } \tilde{w} = d\tilde{w}(0)/d\tilde{x} = d^2\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^2 = d^3\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^3 = 0$$

Форма колебаний, m	Наши «точные значения»	Метод сплайнов $M = 4096$	Результаты работы [3]
1	2,56534242535465	2,56534241754923	2,85833
2	20,0383790960018	20,0383797500670	20,03917
3	59,8708487989285	59,8708555783863	59,87084
4	119,098627091752	119,098656270978	119,09862
5	198,069640843486	198,069725119322	198,06964
6	296,773611695971	296,773806085860	–
7	415,214188901910	415,214576521510	–
8	553,392453038218	553,393150926798	–
9	711,308975719378	711,310140618875	–
10	888,964073306182	888,965907498148	–

Таблица 6

Значения $\tilde{\omega}$ при $\delta = 2$ для стержня, заземленного на левом конце и свободного на правом

$$\text{при } \tilde{w} = d\tilde{w}(0)/d\tilde{x} = d^2\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^2 = d^3\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^3 = 0$$

Форма колебаний, m	Наши «точные значения»	Метод сплайнов $M = 4096$	Результаты работы [3]
1	1,84057164991397	1,84057156870337	2,90893
2	18,1721206455047	18,1721207874618	18,17520
3	58,3886853512903	58,3886906489132	58,38868
4	117,692174342326	117,692200585216	117,69217
5	196,702245966178	196,702325355152	196,70224
6	295,429532379734	295,429719442014	–
7	413,885667841524	413,886045199532	–
8	552,075060142279	552,075744349122	–
9	709,999941242120	710,001088543747	–
10	887,661548898154	887,663361091103	–

Из табл. 5 видно, что при $\delta = 1$ для первой формы колебаний ($m = 1$) различие для $\tilde{\omega}$ между «нашими точными» результатами и результатами работы [3] достигает 11%.

Из табл. 6 видно, что при $\delta = 2$ для первой формы колебаний ($m = 1$) различие для $\tilde{\omega}$ между «нашими точными» результатами и результатами работы [3] достигает 58%.

Такого большого различия быть не должно, так как решалась одна и та же задача, фактически одним и тем же методом, а результаты получены существенно различные. Возникает вопрос, а какое из решений верное, а может оба решения неверные?

Самое странное при этом то, что для остальных форм колебаний расхождения результатов существенно меньше, и величина расхождения убывает с ростом номера формы колебаний.

Выявить причины расхождения результатов конечно лучше всего при непосредственном научном контакте авторов данных исследований, но это сделать наверно сложно, поэтому мы просто сравним «наши точные» результаты» и результаты работы [3] с результатами расчетов по методу сплайнов.

Видим (см. табл. 2–6), что при числе отрезков сетки узлов сплайна $M = 4096$ для всех значений δ первые 6–7 цифр численного решения полностью совпадают с цифрами «нашего точного решения».

Таким образом, имея два принципиально отличающихся по реализации метода решения одной и той же задачи, мы наблюдаем полное совпадение, как минимум, первых шести значащих цифр в обоих решениях. А это с большой степенью вероятности позволяет сделать заключение, что наше «точное решение» и решение на основе метода сплайнов точны, как минимум, на уровне шести значащих цифр.

В итоге можно считать, что мы имеем достаточно обоснованное подтверждение верности «нашего точного решения» и высокой точности предлагаемого нами метода сплайнов.

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА СПЛАЙНОВ

Исследование нельзя рассматривать полным, если не исследовано изменение погрешности метода сплайнов в зависимости от размерности M сетки его узлов.

Точность метода сплайнов оценивалась по частотам собственных колебаний прямого

стержня переменного сечения, имеющего длину $l = 2$ м, постоянную высоту поперечного сечения $h = 0,02$ м и ширину поперечного сечения, изменяющуюся по закону:

$$b = b_0 e^{\frac{\delta x}{l}} \quad \text{при } b_0 = 0,03 \text{ м.} \quad (42)$$

Материал стержня – сталь с модулем Юнга $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и плотностью $\rho = 7850 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

При этих исходных данных имеем:

$$\begin{cases} \mu_0 = \rho b_0 h = 4,71 \text{ кг/м,} \\ I_0 = \frac{b_0 h^3}{12} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4. \end{cases} \quad (43)$$

В итоге получаем:

$$\begin{cases} I = \frac{bh^3}{12} = \frac{b_0 h^3}{12} e^{\frac{\delta x}{l}} = I_0 e^{\frac{\delta x}{l}}, \\ \mu = \rho bh = \rho b_0 h e^{\frac{\delta x}{l}} = \mu_0 e^{\frac{\delta x}{l}}. \end{cases} \quad (44)$$

На основе метода сплайнов вычислялись численные значения первых десяти собственных частот ω_m , $m = 1, 2, \dots, 10$, которые затем сопоставлялись с точными значениями $\omega_m^{(T)}$, $m = 1, 2, \dots, 10$.

Точность расчетов оценивалась десятичным логарифмом абсолютного значения относительной ошибки $\lg |\delta\omega|$:

$$\lg |\delta\omega| = \lg |(\omega_T - \omega) / \omega_T|, \quad (45)$$

где ω – расчетное значение круговой частоты собственных колебаний, ω_T – точное значение круговой частоты собственных колебаний

Результаты численных расчетов методом сплайнов при числе отрезков сетки узлов сплайна $M = 2^k$, $k = 4, 5, \dots, 12$ для различных форм собственных колебаний стержня $m = 1, 2, \dots, 10$, различных способах закрепления стержня и различных значениях параметра $\delta = -2, -1, 0, 1, 2$ представлены на рис. 3–7 графиками зависимостей логарифма относительной ошибки $\lg |\delta\omega|$ от десятичного логарифма $\lg M$ числа отрезков сплайна.

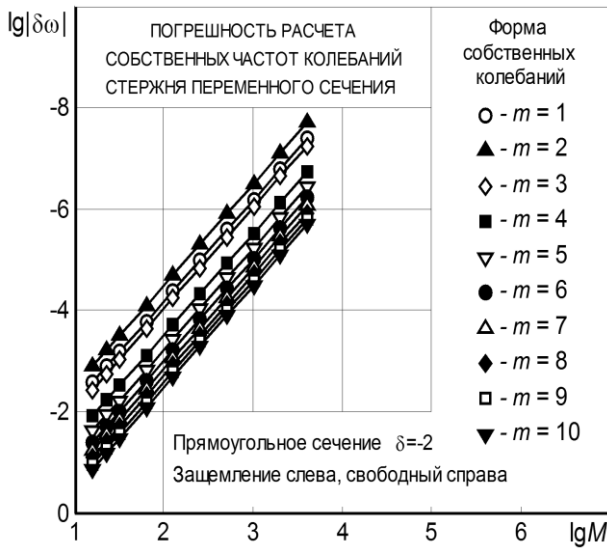


Рис. 3

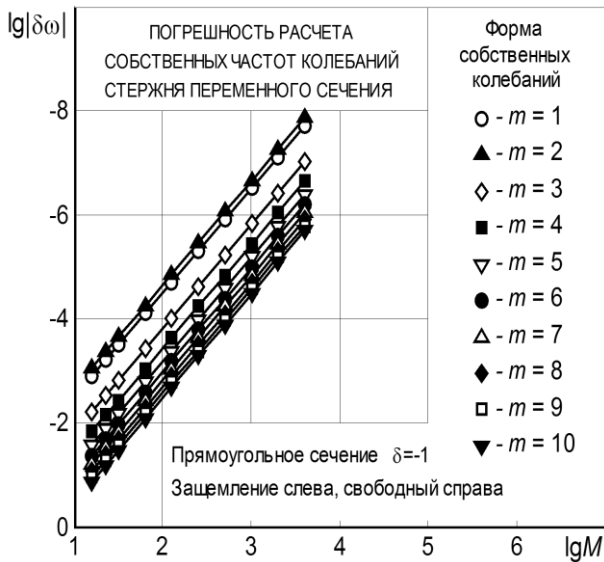


Рис. 4

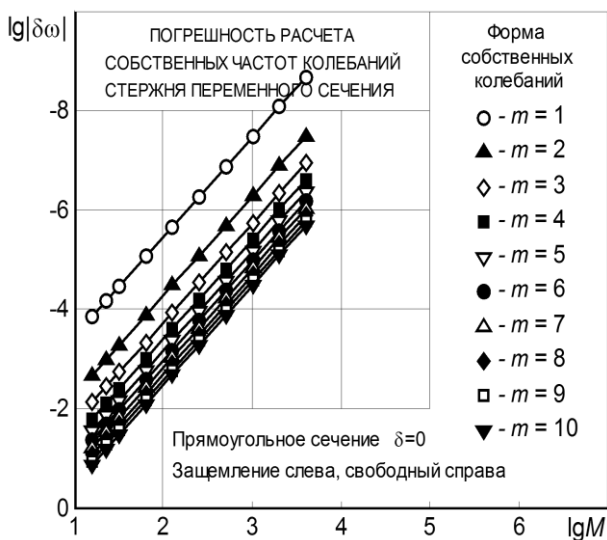


Рис. 5

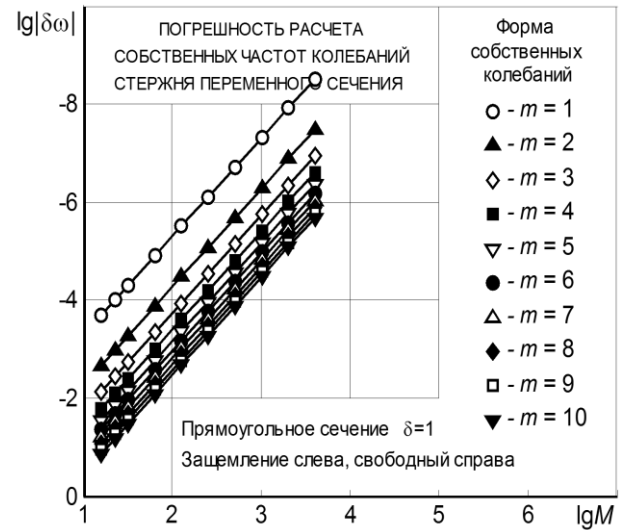


Рис. 6

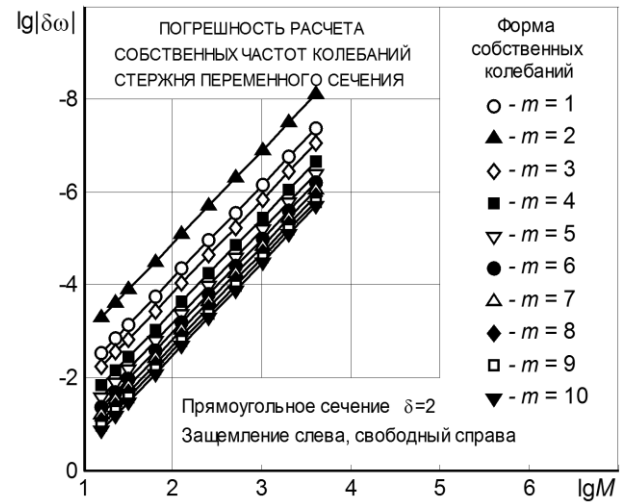


Рис. 7

Вид зависимостей $\lg |\delta\omega| \sim \lg M$ на рис. 3–7 показывает, что реализованный вариант метода сплайнов во всех решениях характеризуется вторым порядком сходимости [6]. При этом из графиков на рис. 3–7 видно, что при числе отрезков сплайна $M = 4096$ для первой форме колебаний ($m = 1$) мы практически выходим на точность 8 значащих цифр. Худший случай наблюдается при десятой форме колебаний ($m = 10$), но и в этом мы практически получаем 6 точных значащих цифр.

Также следует отметить, что графики на рис. 3–7 свидетельствуют о том, что с ростом величины M точность расчетов и дальше должна повышаться, но мы прекратили увеличение числа M из-за большого времени расчетов на нашем компьютере.

При увеличении мощности компьютера исследования при $M > 4096$ продолжаться.

**СТЕРЖЕНЬ, ЗАЩЕМЛЕННЫЙ
НА ЛЕВОМ КОНЦЕ И ШАРНИРНО
ОПЕРТЫЙ НА ПРАВОМ**

Решим задачу 2 и рассмотрим собственные колебания стержня, защемленного на левом конце и шарнирно опертого на правом (см. рис. 2). Для него краевые условия имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad \text{при } \tilde{x} = 0, \\ \tilde{w} = 0, \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} = 0, \quad \text{при } \tilde{x} = 1. \end{aligned} \right. \quad (46)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{w}(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0, \\ \frac{\partial \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\delta}{2}(C_1 + C_2 + C_4) + \\ + (C_1\lambda_1 - C_2\lambda_1 + C_3\lambda_2) = 0, \\ \tilde{w}(1) = C_1e^{\lambda_1} + C_2e^{-\lambda_1} + \\ + C_3 \sin(\lambda_2) + C_4 \cos(\lambda_2) = 0, \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}(1)}{\partial \tilde{x}^2} = \frac{\delta^2}{4} [C_1e^{\lambda_1} + C_2e^{-\lambda_1} + C_3 \sin(\lambda_2) + \\ + C_4 \cos(\lambda_2)] - \delta [C_1\lambda_1e^{\lambda_1} - C_2\lambda_1e^{-\lambda_1} + \\ + C_3\lambda_2 \cos(\lambda_2) - C_4\lambda_2 \sin(\lambda_2)] + \\ + C_1\lambda_1^2e^{\lambda_1} + C_2\lambda_1^2e^{-\lambda_1} - \\ - C_3\lambda_2^2 \sin(\lambda_2) - C_4\lambda_2^2 \cos(\lambda_2) = 0. \end{aligned} \right. \quad (47)$$

При подстановке (37) в уравнения (46) получаем системы из четырех нелинейных уравнений решениями которой при условиях (38) являются значения $\tilde{\omega}_m, m = 1, 2, \dots$ круговых частот собственных колебаний при различных номерах $m = 1, 2, \dots$ форм колебаний.

Для рассматриваемого стержня были вычислены «точные» значения $\tilde{\omega}$ для первых десяти форм колебаний при значениях $\delta = -2, -1, 0, 1$. Полученные «точные значения» круговой частоты собственных колебаний $\tilde{\omega}$ для стержня с краевыми условиями (46) представлены в табл. 7.

Для стержня с краевыми условиями (46) уравнение (36) при значениях $\delta = -2, -1, 0, 1$ было решено методом сплайнов при различных числах отрезков сетки сплайна $M = N - 1$. Результаты численных расчетов методом сплайнов при $M = 2^k, k = 4, 5, \dots, 12$ для различных форм собственных колебаний стержня, различных способах закрепления стержня и различных значениях параметра δ представлены на рис. 8–11 графиками зависимостей логарифма относительной ошибки $\lg |\delta\omega|$ от десятичного логарифма $\lg M$ числа отрезков сплайна.

Вид зависимостей $\lg |\delta\omega| \sim \lg M$ на рис. 8–11 показывает, что реализованный метод сплайнов при всех вариантах задач характеризуется вторым порядком сходимости [5].

Таблица 7

Значения $\tilde{\omega}$ для стержня, защемленного на левом конце и шарнирно закрепленного на правом («точные значения») при $\tilde{w} = d\tilde{w}(0)/d\tilde{x} = \tilde{w} = d^2\tilde{w}(1)/d\tilde{x}^2 = 0$

Форма колебаний, m	$\delta = 0$	$\delta = -1$	$\delta = -2$	$\delta = 1$
1	15,4182057169801	16,5114909272371	17,7202623260975	14,3782881589276
2	49,9648620318002	51,1026312471552	52,5268139228251	49,1062804883803
3	104,247696458861	105,421998550821	106,945996631014	103,421941363034
4	178,269729494609	179,462072318216	181,039313378426	177,462371268906
5	272,030971305025	273,234480470291	274,844899917261	271,234752034214
6	385,531421917553	386,742483178076	388,375471406298	384,742714110094
7	518,771081332259	519,987589129950	521,636901433751	517,987781646738
8	671,749949549145	672,970569701627	674,632228122608	670,970730568635
9	844,468026568208	845,691861008487	847,363179038273	843,691996554590
10	1036,92531238945	1038,15172795659	1039,83080752534	1036,15184330340

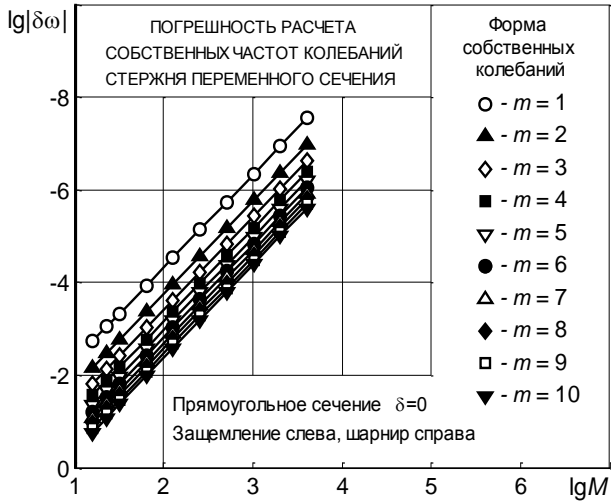


Рис. 8

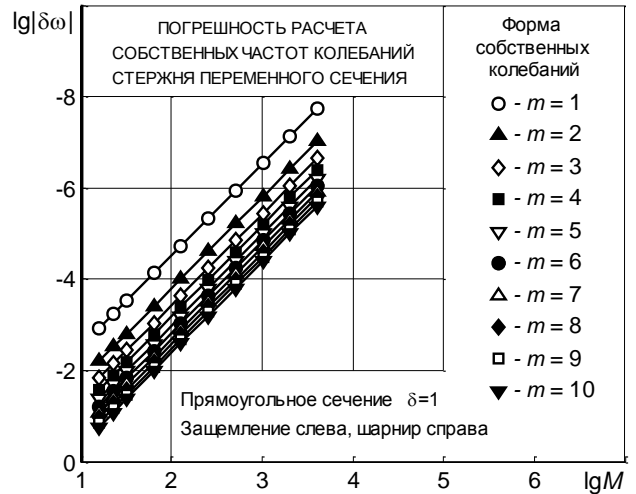


Рис. 11

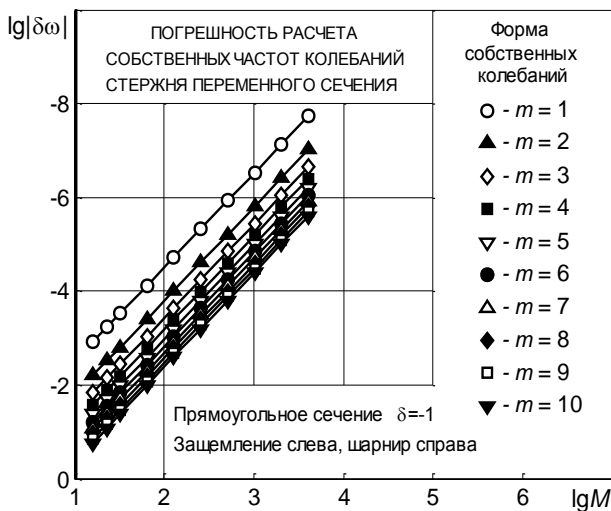


Рис. 9

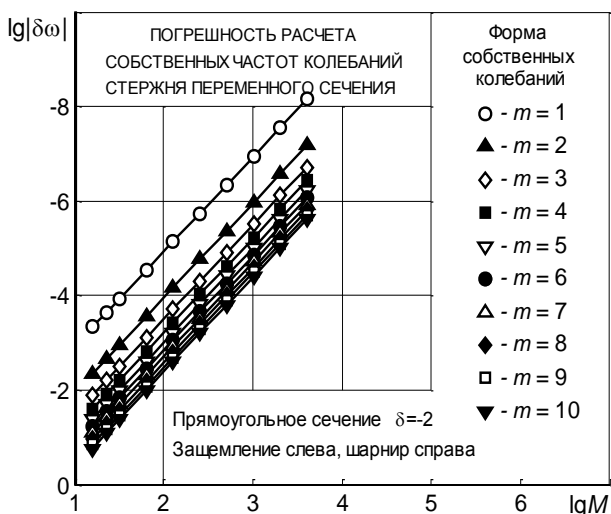


Рис. 10

Из графиков на рис. 8–11 видно, что при числе отрезков сплайна $M = 4096$ для первой форме колебаний ($m = 1$) мы во всех случаях практически выходим на точность, близкую к 8 значащим цифрам. Худший случай наблюдается при десятой форме колебаний ($m = 10$), но и в этом случае мы практически получаем 6 точных значащих цифр.

СТЕРЖЕНЬ, ЗАЩЕМЛЕННЫЙ ПО КОНЦАМ

Решим задачу 3 и рассмотрим поперечные собственные колебания стержня, имеющего переменное поперечное сечение и защемленного на левом и правом концах (рис. 12).

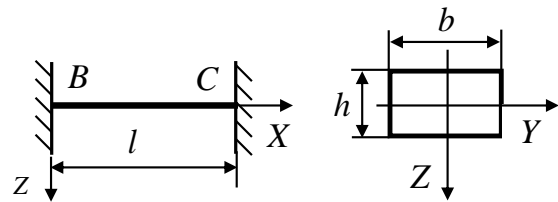


Рис. 12

Для защемленного по концам стержня крайние условия имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{w} = 0, & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} = 0, & \text{при } \tilde{x} = 0, \\ \tilde{w} = 0, & \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{x}} = 0, & \text{при } \tilde{x} = 1. \end{cases} \quad (48)$$

При подстановке (37) в систему уравнений (48) получаем системы из четырех нелинейных уравнений

$$\begin{cases}
 \tilde{w}(0) = C_1 + C_2 + C_4 = 0, \\
 \frac{\partial \tilde{w}(0)}{\partial \tilde{x}} = -\frac{\delta}{2}(C_1 + C_2 + C_4) + \\
 \quad + (C_1\lambda_1 - C_2\lambda_1 + C_3\lambda_2) = 0, \\
 \tilde{w}(1) = C_1e^{\lambda_1} + C_2e^{-\lambda_1} + C_3 \sin(\lambda_2) + \\
 \quad + C_4 \cos(\lambda_2) = 0, \\
 \frac{\partial \tilde{w}(1)}{\partial x} = -\frac{\delta}{2}[C_1e^{\lambda_1} + C_2e^{-\lambda_1} + C_3 \sin(\lambda_2) + \\
 \quad + C_4 \cos(\lambda_2)] + C_1\lambda_1e^{\lambda_1} - C_2\lambda_1e^{-\lambda_1} + \\
 \quad + C_3\lambda_2 \cos(\lambda_2) - C_4\lambda_2 \sin(\lambda_2) = 0,
 \end{cases} \quad (49)$$

решениями которой при условиях (38) являются значения $\tilde{\omega}_m$, $m = 1, 2, \dots$ круговых частот собственных колебаний при различных номерах $m = 1, 2, \dots$ собственных форм колебаний.

Для рассматриваемого стержня были вычислены «точные» значения $\tilde{\omega}$ для первых десяти форм колебаний при значениях $\delta = -2, -1, 0$. Эта же задача была решена методом сплайнов при различных числах отрезков сетки сплайна M . Погрешности численных расчетов для различных форм собственных колебаний стержня, защемленного по концам, представлены графиками $\lg |\delta\omega| \sim \lg M$ на рис. 13–15.

Вид зависимостей $\lg |\delta\omega| \sim \lg M$ на рис. 13–15 показывает, что реализованный метод сплайнов при всех вариантах задачи 3 характеризуется вторым порядком сходимости [5], а достигаемая точность расчетов соответствует 8 значащим цифрам при первой форме колебаний ($m = 1$) и не менее 6 значащих цифр при остальных формах колебаний ($m = 2, \dots, 10$).

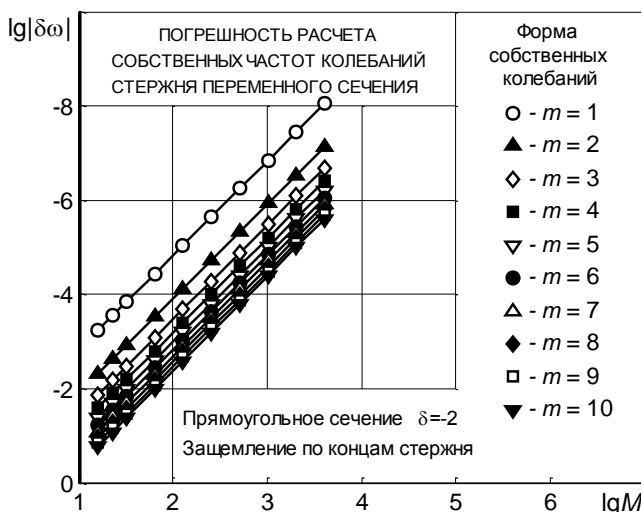


Рис. 13

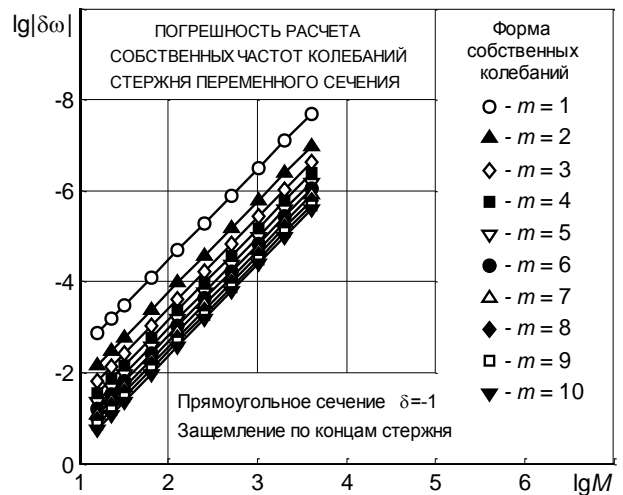


Рис. 14

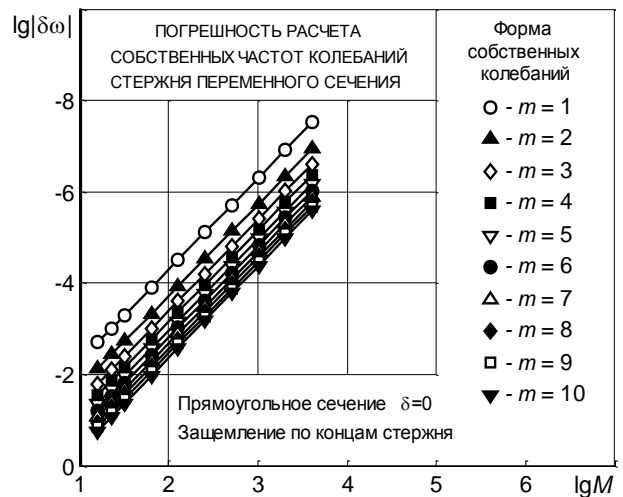


Рис. 15

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлены результаты применения нового метода расчета частот собственных колебаний стержней переменного сечения, базирующегося на сплайнах степени 5 дефекта 1.

Разработанный метод характеризуется вторым порядком сходимости и высокой точностью, ограничением которой являются только возможности современных компьютеров. Это видно из рис. 3–11, 13–15, где с увеличением числа отрезков M сетки узлов сплайна наблюдается монотонное уменьшение вычислительной погрешности $\delta\omega$ на всем рассмотренном диапазоне M . В итоге при числе отрезком сетки $M = 4096$ относительная погрешность $\delta\omega$ расчета частот собственных колебаний по первым десяти формам не превышает $1 \cdot 10^{-6}$. При этом следует отметить, что процесс увеличения величины M был прекращен только из-за ограничения оперативной памяти компьютера и слишком большого времени выполнения расчетов.

Дальнейшие исследования планируется продолжить в направлении изучения возможности разработанного метода сплайнов для определения частот собственных колебаний стержней не прямолинейной формы при переменном поперечном сечении и опорах, обладающих упругостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бабаков И. М.** Теория колебаний. М.: Наука, 1965. 560 с. [I. M. Babakov, *Theory of oscillations*, (in Russian). M.: Nauka, 1965.]
2. **Tong X., Tabarrok B.** Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section // Journal of Sound and Vibration. 1995. № 186(5). P. 821–835. [X. Tong, B. Tabarrok, "Vibration analysis of Timoshenko beams with non-homogeneity and varying cross-section" in Journal of Sound and Vibration. no. 186(5), pp. 821-835, 1995.]
3. **Есе МС., Aydogdu M., Taskin V.** Vibration of a variable cross-section beam. Mechanics Research Communications, 2007. Vol. 34. P. 78–84. [МС. Есе, М. Aydogdu, V. Taskin, "Vibration of a variable cross-section beam", Mechanics Research Communications, vol. 34, pp. 78-84, 2007.]
4. **Cranch E. T., Adler A. A.** Bending vibration of variable section beams // Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers. 1956. №23(1). P. 103–108. [E. T. Cranch, A. A. Adler, "Bending vibration of variable section beams", Journal of Applied Mechanics, American Society of Mechanical Engineers, no. 23(1), pp. 103-108, 1956.]
5. **Павлов В. П.** Анализ спектра частот собственных колебаний стержня методом сплайнов // Вестник УГАТУ. 2016. Т. 20, №4 (74). С. 16–22. [V. P. Pavlov, "Analysis of the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod by the method of splines", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 20, no. 4 (74), pp. 16-22, 2016.]
6. **Павлов В. П.** Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел. Уфа: Уфимск. Гос. Авиац. техн. ун-т, 2003. 197 с. [V. P. Pavlov, *Spline-methods and other numerical methods for solving one-dimensional problems of deformable solids mechanics*, (in Russian). Ufa: UGATU, 2003, 197 p.]
7. **Павлов В. П., Абдрахманова А. А., Абдрахманова Р. П.** Задача расчета стержней одномерным сплайном пятой степени дефекта два // Математические заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, вып. 1. С. 50–59. [V. P. Pavlov, A. A. Abdrahmanova, R. P. Abdrahmanova, "The problem of calculating beams by one-dimensional spline fifth degree of the defect two", (in Russian) // *Matematicheskie zametki JaGU*. Vol. 20, no. 1, pp. 50-59, 2013.]
8. **Абдрахманова А. А., Павлов В. П.** Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния стеклопластикового стержня при различных жесткостях опор // Вестник УГАТУ. 2007. Т. 9, №5 (23). С. 87–92. [A. A. Abdrahmanova, V. P. Pavlov, "Mathematical modeling of the stress-strain state of glass-plastic beam with different stiffnesses of supports", (in Russian), in *Vestnik UGATU*, vol. 9, no. 5(23), pp. 87-92, 2007.]
9. **Kudoyarova V. M., Pavlov V. P.** The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate // Procedia Engineering. 2016. Vol. 150. P. 1419–1426. [V. M. Kudoyarova, V. P. Pavlov, "The Spline Method for the Solution of the Transient Heat Conduction Problem with Nonlinear Initial and Boundary Conditions for a Plate" in *Procedia Engineering*, vol. 150, pp. 1419-1426, 2016.]
10. **Kudoyarova V., Pavlov V.** Refining of numerical solution for nonlinear transient heat conduction in a plate made of polymer composite material // International Journal of Applied Engineering Research. 2015. Vol. 10, № 18. P. 39466–39470. [V. Kudoyarova, V. Pavlov, "Refining of numerical solution for nonlinear transient heat conduction in a plate made of polymer composite material" // *International Journal of Applied Engineering Research*. vol. 10, no. 18, pp. 39466-39470, 2015.]
11. **Уилкинсон Дж. Х.** Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970. 564 с. [Uilkinson Dzh, *Algebraic Eigenvalue Problem*, (in Russian). M.: Nauka, 1970.]

ОБ АВТОРЕ

Павлов Виктор Павлович проф. каф. сопротивления материалов. Дипл. инж. по авиац. двигателям (УАИ, 1973). Д-р техн. наук по динамике и прочности (УГАТУ, 2005). Иссл. в обл. динамики и прочности конструкций из композиционных материалов.

METADATA

Title: Transverse vibrations of a rod with variable cross sections and calculation of its eigenfrequencies by the method of splines

Author: V. P. Pavlov

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: victor.pavlov.51@yandex.ru

Language: Russian.

Source: Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), vol. 21, no. 2 (76), pp. 3-16, 2017. ISSN 2225-2789 (Online), ISSN 1992-6502 (Print).

Abstract: Discusses own transverse vibrations of a straight rod with a cross section of rectangular shape having a constant height and variable width, changing for exponential law. Analytical method the obtained values of natural frequencies for various functions of changes in the cross section of a core and various methods of its fastening. Found that some analytical results are markedly different from those previously obtained by other authors. Also to analyze the spectrum of frequencies of own fluctuations of a rod of variable cross section applied numerical method – method of splines of degree 5 defect 1. A detailed study of the error of the method of splines in comparison with the analytical solution showed that all the considered tasks, this method is characterized by second order of convergence and ensures the accuracy of the calculation changes of oscillations for the first ten natural modes of at least six significant digits. This allows us to consider the proposed method of splines is very effective for the analysis of self-excited transverse vibrations of rods with variable cross sections in cases where the exact analytical solution is not known.

Key words: rods of variable cross-section; Fluctuations; Frequencies of natural oscillations; Splines; math modeling.

About author:

PAVLOV, Victor Pavlovich, Prof., Dept. of Strength of Materials. Dipl. Engineer for Aircraft Engines (Ufa Aviation Inst., 1973). Dr. of Tech. Sci. (UGATU, 2005). Research in the field of dynamics and strength of structures made of composite materials.