Уфа : УГАТУ, 2011 Вестник УГАТУ Т. 15, № 5 (45). С. 113–119

УДК 517.95+517.986.7

Х. Г. Умаров

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛИНЯ–РЕЙССНЕРА–ЦЗЯНА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для линейного дифференциального уравнения в частных производных, моделирующего нестационарные малые возмущения в трансзвуковом пространственном потоке газа, получен явный вид решения задачи Коши и начально-краевых задач в полупространстве и пространственном слое сведением их к решению соответствующих абстрактных задач в банаховом пространстве.

Уравнение Линя–Рейсснера–Цзяна; *сильно непрерывные полугруппы операторов*

Рассмотрим в области $(x, y, z) \in R^3$, $0 < t \le$ $\le T < +\infty$, дифференциальное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами, являющееся линеаризацией уравнения Линя–Рейсснера–Цзяна [1, 2], моделирующего нестационарные малые возмущения в трансзвуковом пространственном потоке газа,

$$u_{xt} + ku_{xx} + au_x = u_{yy} + u_{zz} + f\,, \qquad (1)$$

в котором k, a – числовые параметры; искомая функция $u = u(x, y, z, t)$ – потенциал поля скоростей, а заданная функция $f = f(x, y, z, t)$ – представляет внешние массовые силы.

Наша цель – получить для уравнения (1) явный вид решения задачи Коши и начально-краевых задач в полупространстве $z \ge 0$ и пространственном слое $0 \le z \le l < +\infty$.

1. ЗАДАЧА КОШИ

Будем предполагать, что начальное данное φ:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z)\,, \qquad (2)$$

искомое классическое решение u и свободный член f уравнения (1), для всех значений «параметров» – $(y, z, t) \in R^3 \times [0, T]$, по «пространственной» переменной $x \in R^1$ принадлежат банахову пространству $C[-\infty, +\infty]$ непрерывных функций $\psi = \psi(x)$, для которых существуют пределы при $x \to \pm\infty$ и норма которого определяется по формуле

$$\|\psi(x)\|_{C[-\infty,+\infty]} = \sup_{x\in R^1} |\psi(x)| \equiv \|\psi(x)\|_C\,.$$

В пространстве $C[-\infty, +\infty]$ дифференциальный оператор $-d/dx$ с областью определения $D(d/dx) = \{\psi(x) \in C[-\infty,+\infty]:\ \psi'(x) \in C[-\infty,+\infty]\}$ является ([3], с. 670) производящим оператором сжимающей сильно непрерывной полугруппы $U(t; -d/dx)$ класса C_0 правых сдвигов

$$U(t;-d/dx)\psi(x) = \psi(x-t)\,. \qquad (3)$$

Представим уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + k\frac{\partial u}{\partial x} + au\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f\,. \qquad (4)$$

Введем в рассмотрение два линейных замкнутых оператора: $A = aI + kd/dx$, где I – тождественный оператор, и $B = d/dx$, с областями определения $D(A) = D(B) = D(d/dx)$. Тогда уравнение (4) запишется в пространстве $C[-\infty, +\infty]$ в виде абстрактного дифференциального уравнения

$$B(\tilde{u}_t + A\tilde{u}) = \tilde{u}_{yy} + \tilde{u}_{zz} + \tilde{f}\,, \qquad (5)$$

где $\tilde{u}: (y,z,t) \to u(x,y,z,t)$ – искомая, а $\tilde{f}: (y,z,t) \to f(x,y,z,t)$ – заданная функции, определенные в области $(y, z, t) \in R^2 \times [0, T]$ и со значениями в $C[-\infty, +\infty]$. Для уравнения (5) начальное условие (2) перепишется в виде

$$\tilde{u}\big|_{t=0} = \tilde{\varphi}(y,z)\,, \qquad (6)$$

здесь $\tilde{\varphi}: (y,z) \to \varphi(x,y,z)$ – заданная функция, определенная для $(y, z) \in R^2$ и со значениями в пространстве $C[-\infty, +\infty]$.

Оператор $-B$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t; -B)$ класса C_0 с нулевым типом ([4], с. 58): $\|U(t; -B)\| = \|U(t; -d/dx)\| = 1$, $t \ge 0$, а оператор $-A$ порождает сильно непрерывную полугруппу

$$U(t;-A)\psi(x) = e^{-at}\psi(x-kt) \qquad (7)$$

класса C_0, для нормы которой справедлива оценка $\|U(t; -A)\| \le e^{-at}$, $t \ge 0$. Очевидно, что полугруппы $U(t; -A)$ и $U(t; -B)$ коммутируют между собой.

Решение в банаховом пространстве E абстрактной задачи Коши (5), (6), в которой опера-

Контактная информация: umarov50@mail.ru

торы $-B$, $-A$ являются производящими операторами коммутирующих сильно непрерывных полугрупп класса C_0, типы которых соответственно равны $-\beta \le 0$, α и, значит, для норм справедливы оценки $\|U(t;-B)\| \le Me^{-\beta t}$, $\|U(t;-A)\| \le Ne^{\alpha t}$, где M, N – некоторые положительные постоянные, найденные в [5].

Чтобы упростить формулировку условий разрешимости рассматриваемых в статье абстрактных задач, обозначим через E_ν, $\nu > 0$, подмножество банахова пространства E, для элементов e которого справедлива оценка

$$\|U(\tau;-B)e\|_E \le \omega_e(\tau),\ e \in E_\nu,\ \nu > 0,\ \tau \ge 0,$$

где непрерывная функция – мажоранта $\omega_e(\tau)$ принадлежит* $L_{1,\nu-1}$. Введем еще одно обозначение: для функции $\psi(s, t)$ со значениями в банаховом пространстве E будем писать $\psi(s, t) \in CE_\nu$, если $\psi(s, t)$ непрерывна в области задания и удовлетворяет оценке

$$\sup_s \|U(\tau;-B)\psi(s,t)\|_E \le \vartheta(t)\sigma(\tau),$$

где $\vartheta(t)$, $\sigma(\tau)$ – непрерывные функции, причем $\sigma(\tau) \in L_{1,\nu-1}$. Если $\psi(s, t)$ не зависит от переменной t, то полагаем $\vartheta(t) \equiv 1$. Если функция $\psi(s, t)$ постоянная, т. е. $\psi(s, t)$, то принадлежность ее CE_ν означает, что $e \in E_\nu$.

Возвращаясь к рассмотрению абстрактной задачи Коши (5), (6), имеем: если начальное данное $\tilde\varphi(y,z)$ и свободный член $\tilde f(y,z,t)$ удовлетворяют условиям

($а_1$) значения функции $\tilde\varphi$ принадлежат множеству $\tilde E = D(A) \cap D(BA) \cap D(B^3)$, значения функции $\tilde f$ – множеству $D(A) \cap D(B)$, а значения частных производных $\tilde f_y$, $\tilde f_z$ – множеству $D(B)$;

($б_1$) справедливы соотношения $\tilde\varphi$, $B\tilde\varphi$, $AB\tilde\varphi \in CE_1$; $B^2\tilde\varphi$, $B^3\tilde\varphi \in CE_2$; $\tilde f$, $A\tilde f \in CE_1$; $B\tilde f$, $\tilde f_y$, $\tilde f_z$, $B\tilde f_y$, $B\tilde f_z \in CE_{3/2}$;

то, согласно [5], решение задачи Коши (5), (6) дается формулой

$$\begin{aligned}\tilde u(y,z,t) &= \frac{1}{4\pi t}U(t;-A)\times\\ &\times \iint_{R^2} U\left(\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t};-B\right)B\tilde\varphi(\eta,\zeta)\,d\eta\, d\zeta +\\ &+\frac{1}{4\pi}\int_0^t U(t-\tau;-A)\frac{d\tau}{t-\tau}\times\\ &\times \iint_{R^2} U\left(\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\tilde f(\eta,\zeta,\tau)\,d\eta\, d\zeta\end{aligned} \tag{8}$$

и для него справедлива оценка нормы

$$\|\tilde u(y,z,t)\|_E \le \le N\left[\|\omega\|_0 + \|\lambda\|_0 \int_0^t \gamma(\tau)e^{-\alpha\tau}d\tau\right]e^{\alpha t}, \tag{9}$$

в которой функции $\omega = \omega(\tau)$, $\lambda = \lambda(\tau)$, $\tau \ge 0$; $\gamma = \gamma(t)$, $t \ge 0$, определяются из неравенств

$$\sup_{(y,z)\in R^2} \|U(\tau;-B)B\tilde\varphi(y,z)\|_E \le \omega(\tau);$$

$$\sup_{(y,z)\in R^2} \|U(\tau;-B)\tilde f(y,z,t)\|_E \le \gamma(t)\lambda(\tau).$$

Ставя цель переформулировать это утверждение для задачи Коши (1), (2), заметим, что

типы полугрупп, порождаемых операторами $-A$, $-B$, удовлетворяют равенствам $\alpha = -a$, $\beta = 0$, причем для постоянных N, M из оценок этих полугрупп выполняются равенства $N = M = 1$;

для выполнения условий ($а_1$) достаточно, чтобы начальное данное φ имело непрерывные частные производные по переменной x до третьего порядка включительно, а свободный член f – непрерывные частные производные по переменным x, y, z и непрерывные смешанные частные производные по переменным x, y и x, z, принадлежащие пространству $C[-\infty; +\infty]$;

для выполнения условий ($б_1$) достаточно, чтобы выполнялись оценки

$$\begin{aligned}&\sup_{(y,z)\in R^2}\left\{\|\varphi(x-\tau,y,z)\|_C,\ \|\varphi_x(x-\tau,y,z)\|_C\right\} \le \omega(\tau);\\ &\sup_{(y,z)\in R^2}\left\{\|\varphi_{xx}(x-\tau,y,z)\|_C,\ \|\varphi_{xxx}(x-\tau,y,z)\|_C\right\} \le \Omega(\tau);\end{aligned} \tag{10}$$

где непрерывные функции $\omega(\tau)$, $\Omega(\tau)$ из пространств $L_{1,0}$, $L_{1,1}$ соответственно; и

---

* $L_{1,\rho}$ – пространство функций, абсолютно интегрируемых на полуоси $\overline{R}^1_+ = [0,+\infty[$ с весом τ^ρ: $\|\omega_e\|_\rho = \int_0^{+\infty} \tau^\rho |\omega_e(\tau)d\tau| < +\infty$.

$$\sup_{(y,z)\in R^2}\left\{\|f(x-\tau,y,z,t)\|_C\right\}\leq\gamma(t)\lambda(\tau);$$
$$\sup_{(y,z)\in R^2}\left\{\|f_x(x-\tau,y,z,t)\|_C,\right.$$
$$\|f_y(x-\tau,y,z,t)\|_C,\|f_z(x-\tau,y,z,t)\|_C, \qquad (11)$$
$$\|f_{xy}(x-\tau,y,z,t)\|_C,$$
$$\leq\gamma(t)\Lambda(\tau)\left.\|f_{xz}(x-\tau,y,z,t)\|_C\right\}\leq$$
$$\leq\gamma(t)\Lambda(\tau);$$

в которых $\gamma(t)$, $t\in[0,T]$; $\lambda(\tau)\in L_{1,0}$, $\Lambda(\tau)\in L_{1,1/2}$, $\tau\geq 0$ – непрерывные функции.

С учетом формул (3), (7), решение (8) задачи Коши (5), (6) в пространстве $C[-\infty,+\infty]$ запишется в явном виде

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi t}e^{-at}\iint_{R^2}\varphi_x\Big(x-kt-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t},\eta,\zeta\Big)d\eta d\zeta+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t e^{-a\tau}\frac{d\tau}{\tau}\iint_{R^2}f\Big(x-kt-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4\tau},\eta,\zeta,t-\tau\Big)d\eta d\zeta. \qquad (12)$$

Для решения (12), используя неравенство (9) и значения α, N, выводим оценку

$$\sup_{(x,y,z)\in R^3}|u(x,y,z,t)|\leq$$
$$\leq\left[\|\omega\|_0+\|\lambda\|_0\int_0^t\gamma(\tau)e^{a\tau}d\tau\right]e^{-at}. \qquad (13)$$

Таким образом, имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть в задаче Коши (1), (2) начальное данное $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет условиям (10), а свободный член $f(x, y, z, t)$ – условиям (11), тогда единственное решение этой задачи в пространстве $C[-\infty; +\infty]$ дается формулой (12) и для него справедлива оценка (13).*

2. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим трансзвуковой поток газа вблизи одной из горизонтальных границ среды – плоскости $z = 0$, полагая, что влияние других границ еще не сказалось или же несущественно, т.е. для уравнения в частных производных (1), которое рассматривается в этом случае в области $(x,y,z,t)\in R_+^3\times]0,T]$, $R_+^3=R^2\times R_+^1$, $R_+^1=]0,+\infty[$, кроме начального данного (2), определенного в области $(x,y,z)\in\overline{R}_+^3=R^2\times\overline{R}_+^1$, задано и краевое условие

$$u\big|_{z=0}=\mu(x,y,t),\ (x,y,t)\in R^2\times[0,T], \qquad (14)$$

для которых выполняется естественное условие согласования

$$\varphi(x,y,0)=\mu(x,y,0),\ (x,y)\in R^2.$$

Предположим, что начальное данное φ, граничное значение μ, свободный член f уравнения (1) и классическое решение u начально-краевой задачи (1), (2), (14) для всех точек $(y,z,t)\in\overline{R}_+^2\times[0,T]$, $\overline{R}_+^2=R^1\times\overline{R}_+^1$, по переменной $x\in R^1$ принадлежат пространству $C[-\infty, +\infty]$.

Начально-краевая задача (1), (2), (14) является частным случаем абстрактной смешанной задачи в банаховом пространстве E для уравнения (5) в области $(y,z,t)\in R_+^2\times]0,T]$, $R_+^2=R^1\times R_+^1$. Для этого уравнения в банаховом пространстве E задаются начальное данное (6) в области $(y,z)\in\overline{R}_+^2$ и краевое условие

$$\tilde{u}\big|_{z=0}=\tilde{\mu}(y,t),\ (y,t)\in R^1\times[0,T], \qquad (15)$$

где $\tilde{\mu}:(y,t)\to\mu(x,y,t)$ – заданная функция, определенная в области $(y, t)\in R^1\times[0, T]$ и со значениями в $C[-\infty, +\infty]$, для которых выполняется условие согласования $\tilde{\varphi}(y,0)=\tilde{\mu}(y,0)$.

Пусть начальное данное $\tilde{\varphi}(y,z)$, $(y,z)\in\overline{R}_+^2$, краевое условие $\tilde{\mu}(y,t)$, $(y, t)\in R^1\times[0, T]$, и свободный член $\tilde{f}(y,z,t)$ удовлетворяют следующим требованиям:

($а_2$) значения функций $\tilde{\varphi}$, $\tilde{f}$ – такие же, как и в условии ($а_1$), а значения $\tilde{\mu}$ принадлежат множеству $\tilde{E}$;

($б_2$) справедливы соотношения $\tilde{\varphi}$, $AB\tilde{\varphi}\in CE_1$; $B^2\tilde{\varphi}$, $B^3\tilde{\varphi}\in CE_2$; $\tilde{\mu}$, $AB\tilde{\mu}\in CE_1$; $B\tilde{\mu}\in CE_5$; $B^2\tilde{\mu}$, $B^3\tilde{\mu}\in CE_3$; $\tilde{f}$, $A\tilde{f}\in CE_1$; $B\tilde{f}$, $\tilde{f}_y$, $\tilde{f}_z$, $B\tilde{f}_y$, $B\tilde{f}_z\in CE_{3/2}$;

тогда, согласно [6], единственное решение смешанной задачи (5), (6), (15) дается формулой

$$\tilde{u}(y,z,t)=\frac{1}{4\pi t}U(t;-A)B\times$$
$$\times\iint_{\overline{R}_+^2}\left[U\left(\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t};-B\right)-\right.$$

$$-U\left(\frac{(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4t};-B\right)\Bigg]\tilde{\varphi}(\eta,\zeta)d\eta d\zeta+$$
$$+\frac{z}{4\pi}B\int_0^t U(t-\tau;-A)\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}U\left(\frac{(y-\eta)^2+z^2}{4(t-\tau)};-B\right)\tilde{\mu}(\eta,\tau)d\eta+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t U(t-\tau;-A)\frac{d\tau}{t-\tau}\times \tag{16}$$
$$\times\iint_{\bar{R}_+^2}\left[U\left(\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)-\right.$$
$$\left.-U\left(\frac{(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\right]\tilde{f}(\eta,\zeta,\tau)d\eta d\zeta$$

и для его нормы справедлива оценка

$$\|\tilde{u}(y,z,t)\|_E\le(1+M)N\max\{1,e^{\alpha t}\}\times$$
$$\times\left[\|\omega\|_0+\frac{\|\rho\|_0}{1+M}\max_{\tau\in[0,t]}\chi(\tau)+\right. \tag{17}$$
$$\left.+\|\lambda\|_0\int_0^t\gamma(\tau)e^{-\alpha\tau}d\tau\right],$$

в которой функции $\omega=\omega(\tau)$, $\rho=\rho(\tau)$, $\lambda=\lambda(\tau)$, $\tau\ge 0$; $\chi=\chi(t)$, $\gamma=\gamma(t)$, $t\ge 0$, определяются из неравенств

$$\sup_{(y,z)\in\bar{R}_+^2}\|U(\tau;-B)B\tilde{\varphi}(y,z)\|_E\le\omega(\tau);$$
$$\sup_{(y,z)\in\bar{R}_+^2}\|U(\tau;-B)B\tilde{\mu}(y,t)\|_E\le\chi(t)\rho(\tau);$$
$$\sup_{(y,z)\in\bar{R}_+^2}\|U(\tau;-B)\tilde{f}(y,z,t)\|_E\le\gamma(t)\lambda(\tau).$$

Для выполнения в пространстве $C[-\infty,+\infty]$ условия ($а_2$) достаточно, чтобы начальное данное φ и граничное условие μ имели непрерывные частные производные по переменной x до третьего порядка включительно, а свободный член f – непрерывные частные производные по переменным x, y, z и непрерывные смешанные частные производные по переменным x, y и x, z, принадлежащие пространству $C[-\infty,+\infty]$.

Для выполнения условий ($б_2$) достаточно, чтобы выполнялись оценки

$$\sup_{(y,z)\in\bar{R}_+^2}\{\|\varphi(x-\tau,y,z)\|_C;$$
$$\|\varphi_x(x-\tau,y,z)\|_C\}\le\omega(\tau);$$
$$\sup_{(y,z)\in\bar{R}_+^2}\{\|\varphi_{xx}(x-\tau,y,z)\|_C \tag{18}$$
$$\|\varphi_{xxx}(x-\tau,y,z)\|_C\}\le\Omega(\tau);$$

где непрерывные функции $\omega(\tau)$, $\Omega(\tau)$ из пространств $L_{1,0}$, $L_{1,1}$ соответственно;

$$\sup_{y\in R^1}\|\mu(x-\tau,y,t)\|_C\le\chi(t)\rho(\tau);$$
$$\sup_{y\in R^1}\|\mu_x(x-\tau,y,t)\|_C\le\chi(t)\bar{\rho}(\tau);$$
$$\sup_{y\in R^1}\|\mu_{xx}(x-\tau,y,t)\|_C, \tag{19}$$
$$\|\mu_{xxx}(x-\tau,y,t)\|_C\le\chi(t)P(\tau);$$

здесь непрерывные функции $\rho(\tau)$, $\bar{\rho}(\tau)$, $P(\tau)$ из пространств $L_{1,0}$, $L_{1,4}$, $L_{1,2}$ соответственно;

$$\sup_{(y,z)\in\bar{R}_+^2}\|f(x-\tau,y,z,t)\|_C\le\gamma(t)\lambda(\tau);$$
$$\sup_{(y,z)\in\bar{R}_+^2}\{\|f_x(x-\tau,y,z,t)\|_C,$$
$$\|f_y(x-\tau,y,z,t)\|_C,\|f_z(x-\tau,y,z,t)\|_C, \tag{20}$$
$$\|f_{xy}(x-\tau,y,z,t)\|_C,$$
$$\|f_{xz}(x-\tau,y,z,t)\|_C\}\le\gamma(t)\Lambda(\tau);$$

в которых $\gamma(t)$, $t\in[0,T]$; $\lambda(\tau)\in L_{1,0}$, $\Lambda(\tau)\in L_{1,1/2}$, $\tau\ge 0$; – непрерывные функции.

Теперь решение (16) смешанной задачи (5), (6), (15) запишется, в силу представлений полугрупп (3), (7), в пространстве $C[-\infty,+\infty]$ в явном виде

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi t}e^{-at}\times$$
$$\times\iint_{R_+^2}\left[\varphi_x\left(x-kt-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t},\eta,\zeta\right)-\right.$$
$$\left.-\varphi_x\left(x-kt-\frac{(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4t},\eta,\zeta\right)\right]d\eta d\zeta+$$
$$+\frac{z}{4\pi}\int_0^t e^{-a\tau}\frac{d\tau}{\tau^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu_x\times\left(x-k\tau-\frac{(y-\eta)^2+z^2}{4\tau},\eta,t-\tau\right)d\eta+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t e^{-a\tau}\frac{d\tau}{\tau}\iint_{R_+^2}\left[f(x-kt-\right.$$
$$-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4\tau},\eta,\zeta,t-\tau)-$$
$$\left.-f(x-k\tau-\frac{(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2}{4\tau},\eta,\zeta,t-\tau)\right]d\eta d\zeta. \tag{21}$$

Для решения (21), используя неравенство (17) и значения α, N, M, выводим оценку

$$\sup_{(x,y,z)\in \overline{R}_+^3} |u(x,y,z,t)| \le 2\max\{1, e^{-at}\}[\|\omega\|_0 + + \frac{1}{2}\|\overline{\rho}\|_0 \max_{\tau\in[0,t]} \chi(\tau) + \|\lambda\|_0 \int_0^t \gamma(\tau)e^{a\tau}d\tau]. \quad (22)$$

Таким образом, имеет место теорема.

Теорема 2. *Пусть в начально-краевой задаче (1), (2), (14) начальное данное φ(x, y, z), краевое условие μ(x, y, t) и свободный член f(x, y, z, t) удовлетворяют соответственно условиям (18)–(20), тогда единственное решение этой задачи в пространстве C[–∞, +∞] дается формулой (21) и для него справедлива оценка (22).*

3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПРОСТРАНСТВЕННОМ СЛОЕ

Рассмотрим трансзвуковой поток газа в пространственном слое, границами которого являются две горизонтальные плоскости, удаленные друг от друга на расстояние l.

Пусть задан потенциал поля скоростей $\mu_0(x, y, t)$ и $\mu_l(x, y, t)$ на этих плоскостях $z = 0$ и $z = 1$ соответственно, т.е. для уравнения в частных производных (1), которое рассматривается в этом случае в области $(x, y, z, t) \in R^2 \times]0,l[\times]0,T]$, кроме начального данного (2), определенного в области $(x, y, z) \in R^2\times[0, l]$ заданы и краевые условия

$$u\big|_{z=0} = \mu_0(x,y,t), u\big|_{z=l} = \mu_l(x,y,t), \quad (x,y,t)\in R^2\times[0,T], \quad (23)$$

подчиняющиеся требованиям согласования

$$\varphi(x,y,0) = \mu_0(x,y,0),$$

$$\varphi(x,y,l) = \mu_l(x,y,0), \ (x,y)\in R^2.$$

Будем предполагать, что начальное данное φ, краевые значения μ_0, μ_l, свободный член f и классическое решение u уравнения (1) в этом случае, для всех $(y, z, t) \in R^1 \times [0, l]\times]0,T]$ по переменной $x \in R$ принадлежат банахову пространству $C[-\infty, +\infty]$.

В [7] найдено решение смешанной задачи в банаховом пространстве E для абстрактного уравнения (5) в области $(y, z, t) \in R^1 \times]0, l[\times]0,T]$. Для этого уравнения в пространстве E задаются начальное данное (6) в области $(y, z) \in R^1 \times [0, l]$ и краевые условия

$$\tilde{u}\big|_{z=0} = \tilde{\mu}_0(y,t), \tilde{u}\big|_{z=l} = \tilde{\mu}_l(y,t), \quad (y,t)\in R^1\times[0,T], \quad (24)$$

где $\tilde{\mu}_0 : (y,t) \to \mu_0(x,y,t)$, $\tilde{\mu}_l : (y,t) \to \mu_l(x,y,t)$ – заданные функции, определенные в области $(y, t) \in R^1 \times [0, T]$ и со значениями в $C[-\infty, +\infty]$, для которых справедливы требования согласования

$$\tilde{\varphi}(y,0) = \tilde{\mu}_0(y,0), \ \tilde{\varphi}(y,l) = \tilde{\mu}_l(y,0), \ y\in R^1.$$

Пусть начальное данное $\tilde{\varphi}(y,z)$, $(y,z)\in R^1\times[0,l]$, граничные условия $\tilde{\mu}_0(y,t)$, $\tilde{\mu}_l(y,t)$, $(y,t)\in R^1\times[0,T]$, и свободный член $\tilde{f}(y,z,t)$, $(y,z,t)\in R^1\times[0,l]\times[0,T]$, удовлетворяют следующим требованиям:

($а_3$) значения функций $\tilde{\varphi}$, $\tilde{f}$ – такие же, как и в условии ($а_1$), а значения $\tilde{\mu}_0$, $\tilde{\mu}_l$ принадлежат множеству $\tilde{E}$;

($б_3$) справедливы соотношения $\tilde{\varphi}$, $AB\tilde{\varphi}\in CE_1$; $B^2\tilde{\varphi}$, $B^3\tilde{\varphi}\in CE_2$; $\tilde{\mu}_i$, $AB\tilde{\mu}_i \in CE_{3/2}$; $B\tilde{\mu}_i \in CE_5$; $B^2\tilde{\mu}_i$, $B^3\tilde{\mu}_i \in CE_3$; $i = 0, l$; $\tilde{f}$, $A\tilde{f} \in CE_1$; $\tilde{f}$, $B\tilde{f}$, $\tilde{f}_y$, $\tilde{f}_z$, $B\tilde{f}_y$, $B\tilde{f}_z \in CE_{3/2}$;

тогда, согласно [7], единственное решение смешанной задачи (5), (6), (24) дается формулой

$$\tilde{u}(y,z,t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi t}U(t;-A)B\int_{-\infty}^{+\infty} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4t};-B\right)d\eta\times$$

$$\times\int_0^l \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[U\left(\frac{(z-\zeta+2lk)^2}{4t};-B\right)-\right.$$

$$\left.-U\left(\frac{(z+\zeta+2lk)^2}{4t};-B\right)\right]\tilde{\varphi}(\eta,\zeta)d\zeta+$$

$$+\frac{1}{4\pi}B\int_0^t U(t-\tau;-A)\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\times\int_{-\infty}^{+\infty} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[(z+2lk)U\left(\frac{(z+2lk)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\tilde{\mu}_0(\eta,\tau)+\right.$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t U(t-\tau;-A)\frac{d\tau}{t-\tau}\times\int_{-\infty}^{+\infty} U\left(\frac{(y-\eta)^2}{4(t-\tau)};-B\right)d\eta\times$$

$$\times\int_0^l \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[U\left(\frac{(z-\zeta+2lk)^2}{4(t-\tau)};-B\right)-\right.$$

$$\left.-U\left(\frac{(z+\zeta+2lk)^2}{4(t-\tau)};-B\right)\right]\tilde{f}(\eta,\zeta,\tau)d\zeta \quad (25)$$

и для его нормы справедлива оценка

$$\|\tilde{u}(y,z,t)\|_E \le (1+M)N\max\{1,e^{\alpha t}\}\times$$
$$\times\left\{\|\omega\|_0+\frac{1}{1+M}\max_{\tau\in[0,t]}\chi(\tau)\Big[\|\rho\|_0+ \qquad (26)$$
$$+\frac{4\sqrt{t}}{l}\|\rho\|_{1/2}\Big]+\|\lambda\|_0\int_0^t\gamma(\tau)e^{-\alpha\tau}d\tau\right\},$$

в которой функции $\omega=\omega(\tau)$, $\rho=\rho(\tau)$, $\lambda=\lambda(\tau)$, $\tau\ge 0$; $\chi=\chi(t)$, $\gamma=\gamma(t)$, $t\ge 0$, определяются из неравенств

$$\sup_{(y,z)\in R^1\times[0,l]}\|U(\tau;-B)B\tilde{\varphi}(y,z)\|_E\le\omega(\tau);$$
$$\sup_{(y,z)\in R^1\times[0,l]}\|U(\tau;-B)B\tilde{\mu}_i(y,z)\|_E\le\chi(t)\rho(\tau),\ i=0,l;$$
$$\sup_{(y,z)\in R^1\times[0,l]}\|U(\tau;-B)\tilde{f}(y,z,t)\|_E\le\gamma(t)\lambda(\tau).$$

Для выполнения в пространстве $C[-\infty,+\infty]$ условия ($а_3$) достаточно, чтобы начальное данное φ и граничные условия μ_i, $i=0,\ l$, имели непрерывные частные производные по переменной x до третьего порядка включительно, а свободный член f – непрерывные частные производные по переменным x, y, z и непрерывные смешанные частные производные по переменным x, y и x, z, принадлежащие пространству $C[-\infty,+\infty]$.

Для выполнения условий ($б_3$) достаточно, чтобы выполнялись оценки

$$\sup_{(y,z)\in R^1\times[0,l]}\Big\{\|\varphi(x-\tau,y,z)\|_C,$$
$$\|\varphi_x(x-\tau,y,z)\|_C\le\omega(\tau);$$
$$\sup_{(y,z)\in R^1\times[0,l]}\|\varphi_{xx}(x-\tau,y,z)\|_C, \qquad (27)$$
$$\|\varphi_{xxx}(x-\tau,y,z)\|_C\Big\}\le\Omega(\tau);$$

где непрерывные функции $\omega(\tau)$, $\Omega(\tau)$ из пространств $L_{1,0}$, $L_{1,1}$ соответственно;

$$\sup_{y\in R^1}\|\mu_i(x-\tau,y,t)\|_C\le\chi(t)\rho(\tau);$$
$$\sup_{y\in R^1}\|(\mu_i)_x(x-\tau,y,t)\|_C\le\chi(t)\bar{\rho}(\tau);$$
$$\sup_{y\in R^1}\|(\mu_i)_{xx}(x-\tau,y,t)\|_C, \qquad (28)$$
$$\|(\mu_i)_{xxx}(x-\tau,y,t)\|_C\Big\}\le\chi(t)P(\tau),\ i=0,l,$$

здесь непрерывные функции $\rho(\tau)$, $\bar{\rho}(\tau)$, $P(\tau)$, из пространств $L_{1,1/2}$, $L_{1,4}$, $L_{1,2}$ соответственно;

$$\sup_{(y,z)\in R^1\times[0,l]}\Big\{\|f(x-\tau,y,z,t)\|_C,$$
$$\|f_x(x-\tau,y,z,t)\|_C,\ \|f_y(x-\tau,y,z,t)\|_C, \qquad (29)$$
$$\|f_z(x-\tau,y,z,t)\|_C,\ \|f_{xy}(x-\tau,y,z,t)\|_C,$$
$$\|f_{xz}(x-\tau,y,z,t)\|_C\Big\}\le\gamma(t)\lambda(\tau);$$

в которых $\gamma(t)$, $t\in[0,T]$; $\lambda(\tau)\in L_{1,1/2}$, $\tau\ge 0$ – непрерывные функции.

Теперь решение (25) смешанной задачи (5), (6), (24) запишется, в силу представлений полугрупп (3), (7), в пространстве $C[-\infty,+\infty]$, в явном виде

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi t}e^{-at}\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\times\int_0^l\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big[\varphi_x(x-kt-$$
$$-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta+2lk)^2}{4t},\eta,\zeta)-$$
$$-\varphi_x\left(x-kt-\frac{(y-\eta)^2+(z+\zeta+2lk)^2}{4t},\eta,\zeta\right)\Big]d\zeta+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t e^{-a\tau}\frac{d\tau}{\tau^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big[(z+2lk)\times$$
$$\times(\mu_0)_x\left(x-k\tau-\frac{(y-\eta)^2+(z+2lk)^2}{4\tau},\eta,t-\tau\right)+$$
$$+(2lk+l-z)(\mu_l)_x(x-k\tau-$$
$$-\frac{(y-\eta)^2+(2lk+l-z)^2}{4\tau},\eta,t-\tau)\Big]d\eta+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t e^{-a\tau}\frac{d\tau}{\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}d\eta\int_0^l\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Big[f(x-k\tau-$$
$$-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta+2lk)^2}{4\tau},\eta,\zeta,t-\tau)-$$
$$-f(x-k\tau-\frac{(y-\eta)^2+(z+\zeta+2lk)^2}{4\tau},\eta,\zeta,t-\tau)\Big]d\zeta. \qquad (30)$$

Для решения (30), используя неравенство (26) и значения α, N, M, выводим оценку

$$\sup_{(x,y,z)\in R^2\times[0,l]}|u(x,y,z,t)|\le 2\max\{1,e^{-at}\}\times$$
$$\times\left\{\|\omega\|_0+\frac{1}{2}\max_{\tau\in[0,t]}\chi(\tau)\left[\|\bar{\rho}\|_0+\frac{4\sqrt{t}}{l}\|\bar{\rho}\|_{1/2}\right]+\right. \qquad (31)$$
$$\left.+\|\Lambda\|_0\int_0^t\gamma(\tau)e^{a\tau}d\tau\right\}.$$

Таким образом, имеет место теорема.

Теорема 3. *Пусть в начально-краевой задаче (1), (2), (23) начальное данное $\varphi(x, y, z)$, граничные условия $\mu_i(x, y, t)$, $i = 0, l$, и свободный член $f(x, y, z, t)$ удовлетворяют соответственно условиям (27)–(29), тогда единственное решение этой задачи в пространстве $C[-\infty, +\infty]$ дается формулой (30) и для него справедлива оценка (31).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Глазатов С. Н.** Задача с данными на характеристике для линеаризованного уравнения трансзвуковой газовой динамики // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1019–1029.

2. **Глазатов С. Н.** О разрешимости пространственно-периодической задачи для уравнения Линя-Рейсснера-Цзяна трансзвуковой газовой динамики // Матем. заметки. 2010. Т. 87, № 1. С. 137–140.

3. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.

4. **Крейн С. Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

5. **Умаров Х. Г.** Задача Коши в банаховом пространстве для аналога уравнения диффузии, не разрешенного относительно производной по времени // ДАН СССР, 1990. Т. 314, № 6. С. 1352–1356.

6. **Умаров Х.Г.** Смешанная задача в банаховом пространстве для аналога уравнения диффузии, не разрешённого относительно производной по времени // Известия вузов. Математика. № 4. 1992. С. 100–103.

7. **Умаров Х.Г.** Смешанная задача в банаховом пространстве для аналога уравнения диффузии, не разрешенного относительно производной по времени. 2 // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2010. Т. 12, № 1. С. 79–84.

ОБ АВТОРЕ

Умаров Хасан Галсанович, доц. каф. диф. ур-ий Чеченск. гос. ун-та. Дипл. математик (Ростовск. гос. ун-т, 1973). Канд. физ.-мат. наук по дифференц. уравнениям и уравнениям матем. физики (Ростовск. гос. ун-т, 1982).