

М. Н. ДАВЫДОВ, Г. К. АГЕЕВ, Е. А. МОГИЛЬНИЦКИЙ

ОПТИМИЗАЦИЯ МОМЕНТОВ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГТД
ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ЕГО СОСТОЯНИЯ

Решается задача повышения эффективности прогнозирования параметров, характеризующих надежность и ресурс двигателей. Прогнозирование проводится как по наработке, так и по режимам нагружения двигателя. Моменты измерения параметров двигателя и режимы его функционирования определяются на основе теории планирования эксперимента. *Двигатель; прогнозирование; эффективность; планирование эксперимента*

Задача прогнозирования надежности и ресурса двигателя с применением планирования эксперимента состоит в выборе количества и условий проведения экспериментов (замеров), обеспечивающих получение наилучшего (оптимального) в смысле точности прогнозирования состояния двигателя. При этом практически оправдано применение точных планов эксперимента, которые являются оптимальными для дискретно заданного числа наблюдений N . При этом требуется определить такое расположение N точек $\tau_i (i = \overline{1, N})$ в пространстве планирования G_x (включает как интервал длительности G_τ , так и вектор параметров режима нагружения Ω_x ($\Omega_x \approx \Omega_\tau \cap \Omega_x$)), при котором выполняются требования соответствующего критерия оптимальности [1–4].

В теории планирования эксперимента все критерии требуют минимизации отклонения оценки регрессионной функции от истинной и предъявляют определенные требования к виду информационной матрицы M , не зависящей от вектора наблюдений, поэтому свойства матрицы могут быть исследованы до проведения эксперимента (т. е. возможен выбор плана, удовлетворяющего определенным требованиям, до начала эксперимента):

$$M = F^T F,$$

$$\text{где } F = \begin{bmatrix} f_0(x_1) & \dots & f_k(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_0(x_N) & \dots & f_k(x_N) \end{bmatrix} \text{ – матрица размера}$$

$(k+1) \cdot (k+1)$; $f_0(x), \dots, f_k(x)$ – функции.

Критерий G -оптимальности K_G при прогнозировании по наработке требует такого расположения точек в области планирования Ω_x , при

котором достигается наименьшая величина максимальной дисперсии прогнозируемого параметра состояния двигателя:

$$K_G = \min_{\tau \in \Omega_\tau} \max_{\varepsilon} d(\tau_0, \varepsilon) = \min_{\tau \in \Omega_\tau} \max_{\varepsilon} f^T(\tau) M^{-1} f(\tau),$$

где $d(\tau_0, \varepsilon)$ – дисперсия прогнозируемого параметра двигателя на момент времени τ_0 для плана эксперимента ε .

G -оптимальный план даёт экспериментатору гарантию, что в области прогнозирования не окажется точек, в которых точность оценки прогнозируемого параметра (поверхности отклика) слишком низкая.

Критерий Q -оптимальности K_Q требует от плана минимизации не максимальной дисперсии, а средней по всевозможным функциям дисперсии прогнозируемого параметра двигателя:

$$K_Q = \min_{\tau \in \Omega_\tau} \sum_{i=1}^n f^T(\tau_i) M^{-1} f(\tau_i) = \min_{\tau \in \Omega_\tau} \sum_{i=1}^n d(\tau_i, \varepsilon_i).$$

Следовательно, в качестве показателя эффективности плана эксперимента ε , характеризующего точность прогнозной оценки выходного параметра регрессионной модели, можно рассматривать дисперсию оценки прогнозируемого параметра двигателя: в точке (τ); интервале ($\Delta\tau$); пространстве (G_Σ), включающем независимые аргументы – длительность наработки τ и вектор режимов нагружения \bar{R} :

$$\Pi_T = d(\tau, \varepsilon); \Pi_T = d(\Delta \tau, \varepsilon); \Pi_T = d(G_\Sigma, \varepsilon).$$

Критерием эффективности плана эксперимента, т. е. условием, которому должны удовлетворять значения показателя эффективности, является минимизация дисперсии оценки параметров:

$$K_T = \min \Pi_T = \min d(\tau, \varepsilon);$$

$$K_T = \min \Pi_T = \min d(\Delta \tau, \varepsilon);$$

$$K_T = \min \Pi_T = \min d(G_\Sigma, \varepsilon).$$

Для оценки дисперсии выходного параметра исследуемого двигателя будем рассматривать

Контактная информация: ad@mail.rb.ru

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

задачу оценки вида и параметров одной из функций:

$$y = \phi(T, \bar{R}) \text{ или } y = f(\tau, \bar{R}) + e,$$

где y – выходная величина; τ – входные управляемые переменные $T = (\tau_1, \dots, \tau_m)$; $Z = (z_1, \dots, z_s)$ – контролируемые, но не управляемые параметры; e – аддитивный шум.

Для процесса, характеризуемого одним входным параметром и постоянным режимом функционирования $\bar{R} = idem$, уравнение связи имеет вид:

$$y = \eta(\tau) + e.$$

Для сложных технических объектов типа авиационных и ракетных двигателей информация об уравнениях связи и характере возмущающих воздействий, как правило, является неполной. Если вид закона распределения ошибки известен, то его характеристики могут быть получены на основании экспериментальных данных. Однако сведения относительно закона распределения ошибки не предопределяют успешного решения задачи поиска математической модели процесса, поскольку остается открытым вопрос о виде функции $\eta(\tau)$, которая зависит от неизвестных параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$.

На практике степень информированности исследователя относительно функции $\eta(\tau) = \eta(\tau, \Theta)$ характеризуется тремя основными вариантами:

- вид функции $\eta(\tau, \Theta)$ известен;
- известно, что функция $\eta(\tau, \Theta)$ совпадает с одной из функций: $\eta_1(\tau, \Theta_1), \dots, \eta_v(\tau, \Theta_v)$. Требуется определить, какая из функций является истинной, и найти неизвестные параметры;
- вид функции $\eta(\tau, \Theta)$ неизвестен.

Очевидно, что наиболее благоприятным для исследователя является случай, когда имеется априорная информация о процессе, соответствующая первому уровню.

Менее развиты методы планирования эксперимента по выявлению истинной модели из совокупности функций, а планирование эксперимента при полном отсутствии априорной информации вообще невозможно. В этом случае планирование сводится к некоторой последовательной процедуре, заключающейся в выдвижении нескольких гипотез о виде функции $\eta(\tau)$ и проведении дискриминации между ними.

Будем полагать, что задача определения вида функции связи $\eta(\tau)$ решена, и она линейна относительно неизвестных коэффициентов:

$$\eta(\tau) = \sum_{j=0}^k \theta_j f_j(\tau),$$

где θ_j – искомые коэффициенты регрессии; $(k+1)$ – число членов уравнения регрессии; $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$ – вектор входных переменных; $f_j(\tau)$ – известные функции входных переменных.

В результате действия случайных возмущений в эксперименте наблюдается величина:

$$y_i - \eta(\tau_i) + e_i = \sum_{j=0}^k \theta_j f_{ij}(\tau_i) + e_i; \quad i = \overline{1, N},$$

где N – число проведенных наблюдений.

Задачу оценки неизвестных коэффициентов θ можно рассматривать как задачу оценки регрессионной функции. Мерой отклонения оценки регрессионной функции от истинной зависимости является дисперсия предсказанных по уравнению регрессии значений выходного параметра модели исследуемого процесса и характеристики объекта [1, 3]:

$$\begin{aligned} d(x) &= E\left[\sum_{j=0}^k f_j(\tau)\hat{\theta}_j - \sum_{j=0}^k f_j(\tau)\theta_j\right]^2 = \\ &= E\left[\sum_{j=0}^k f_j(\tau)(\hat{\theta}_j - \theta_j)\right]^2 = \\ &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k f_i(\tau)f_j(\tau)E[(\hat{\theta}_i - \theta_i)(\hat{\theta}_j - \theta_j)] = \\ &= \sigma^2 f^T(\tau)(F^T F)^{-1} f(\tau) = \sigma^2 f^T(\tau)Cf(\tau) = \\ &= \sigma^2 f^T(\tau)M^{-1}f(\tau), \end{aligned}$$

где σ^2 – дисперсия погрешности контроля функции выходного параметра двигателя в эксперименте.

Тогда оптимальным является тот план ε^* , который минимизирует на множестве всех возможных планов величину дисперсии предсказания в заданный момент времени τ_0 :

$$K_T = d(\tau_0, \varepsilon^*) = \min \Pi_T = \min d(\tau_0, \varepsilon).$$

Матрица $M = \frac{1}{N} F^T F$ представляет собой

нормированную информационную матрицу (Фишера), не зависящую от числа точек плана N , но зависящую от их расположения. Нормированная дисперсия функции регрессии $d(\tau)$ не зависит от числа точек измерений, но зависит от их расположения.

Доверительный интервал функции регрессии вычисляется по известной формуле [2, 3]:

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= f(\tau)^T (T^T N) f(\tau) \sigma^2 = \\ &= \frac{1}{N} f(\tau)^T M^{-1} f(\tau) \sigma^2. \end{aligned} \tag{1}$$

В случае если дисперсия σ^2 неизвестна, то используется оценка, вычисленная по экспериментальным данным.

Исследование распределения нормированной дисперсии:

$$\Pi_T = d(\tau) = f(\tau)^T M^{-1} f(\tau) = N(\sigma_y^2 / \sigma^2)$$

в предположении $\sigma^2 = 1$ при $q = 3$ (q – степень аппроксимирующего полинома) для равномерного размещения точек на интервале $[0, 1]$ показало, что при равномерном размещении точек наибольшие значения дисперсии расположены на краях диапазона измерений.

Другим является размещение точек при применении G -оптимального плана, в котором точки подобраны из условия:

$$K_T = \min_T \sigma_{y,\max}^2 = \min_T \max_T \sigma_y^2(\tau). \quad (2)$$

Вместо (1) можно записать:

$$\min_T \max_\tau \sigma_y^2 = \min_T \max_\tau f(\tau)^T M^{-1} f(\tau) (\sigma^2 / N).$$

Результаты исследования зависимости максимального значения нормированной дисперсии $d(\tau)$ от количества опытов в плане эксперимента для полинома степени q $y = b_0 + b_1\tau + b_2\tau^2 + \dots + b_q\tau^q$ приведены на рисунке.

Важная особенность G -оптимальных планов сводится к следующему: расположение точек измерения не зависит от значений коэффициентов модели (зависит от вида модели, т. е. для полинома – от его степени), ввиду чего план может быть определен заранее и будет являться универсальным для данной модели.

Распределение дисперсии погрешности оценки для $q = 3$ показывает, что по сравнению с традиционным равномерным размещением точек при G -оптимальном плане дисперсия на краях диапазона измерений уменьшается, а в центральной части диапазона увеличивается. Максимального значения дисперсия достигает в нескольких точках.

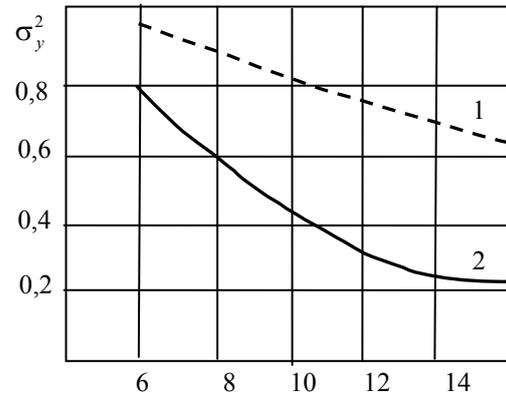
При этом дисперсия $d(\tau)_{\max}$ почти не зависит от числа точек, зато для равномерного расположения точек дисперсия возрастает.

Зависимость дисперсии погрешности оценки от числа измерений проявляется в обоих сомножителях формулы (1), т.е. в $d(\tau) = f(\tau)^T M^{-1} f(\tau)$ и в σ^2/N . Второй сомножитель скрывает зависимость более сложную, чем та, что выражена непосредственно формулой. В G -оптимальных планах некоторые точки повторяются n_j раз, поэтому

$$N_\Sigma = \sum_{j=1}^N n_j \geq N.$$

Равенство $N_\Sigma = N$ имеет место, когда каждая точка в эксперименте реализуется однократно.

По мере увеличения числа точек в плане эксперимента дисперсия погрешности оценки уменьшается пропорционально числу этих точек. Зависимости σ_y^2 от числа точек плана эксперимента приведены на рисунке для равномерного расположения точек и для G -оптимального плана.



Зависимость максимальной дисперсии погрешности оценки y от расположения точек плана эксперимента при моделировании динамики изменения параметров двигателя моделью регрессии 3-го порядка:

- 1 – при равномерном расположении точек;
- 2 – по G -оптимальному плану

Таким образом, применение G -оптимальных планов значительно уменьшает количество опытов, обеспечивая такое же значение максимальной дисперсии погрешности прогнозной оценки выходного параметра исследуемого процесса.

Возможные варианты прогнозирования параметров двигателя сводятся к следующему.

1. Сокращение длительности наработки при прогнозировании возможно за счет оптимального размещения опытов на временной оси.

Проведение эксперимента по плану ε_2 позволяет обеспечить такое же значение дисперсии прогнозируемого значения “ y ” при неизменном объеме эксперимента ($N_Y = N_H$), но за более короткое время τ_H :

$$\sigma^2(\varepsilon_1, \tau_H) = \sigma^2(\varepsilon_2, \tau_Y); \quad N_Y = N_H,$$

где $\Delta\tau_1$ – эффект ПЭ по длительности; $\sigma^2(\varepsilon, \tau)$ – дисперсия прогнозируемого параметра при реализации эксперимента по плану ε , для которого верхняя граница по длительности равна τ . Обла-

стью определения τ является интервал $0 \dots \tau_H$. Для случая, когда все измерения значений y_i проводятся на одном изделии, критерий эффективности плана имеет вид:

$$K_\tau = \min \Pi_\tau = \min[\max_j \tau_j]; \quad (3)$$

$$\sigma^2(\varepsilon_1, \tau_H) = \sigma^2(\varepsilon_2, \tau_Y); \quad j = \overline{1, N_Y}; \quad N_Y = N_H.$$

2. Очевидно, что больший эффект может быть достигнут за счет увеличения количества повторных измерений в плане эксперимента на интервале $0 \dots \tau_Y$:

$$K_\tau = \min \Pi_\tau = \min[\max_j \tau_j]; \quad (4)$$

$$\sigma^2(\varepsilon_H, \tau_H) = \sigma^2(\varepsilon_Y, \tau_Y); \quad j = \overline{1, N_Y}; \quad N_Y > N_H.$$

Из (3) и (4) следует, что минимизация показателя Π_τ может проводиться за счет варьирования как спектром плана (координатами размещения точек эксперимента на временной оси (наработки $0 \dots \tau_H$)), так и количеством опытов $N_Y (N_Y \in 1 \dots \infty)$:

$$K_\tau = \min \Pi_\tau = \min \sum_{j=1}^{N_Y} \tau_j;$$

$$\sigma^2(\varepsilon_H, \tau_H) = \sigma^2(\varepsilon_Y, \tau_Y); \quad N_Y \in 1 \dots \infty.$$

Определение планов оптимального прогнозирования по критерию $K_T = \min d(x, \varepsilon)$ проводится численным (итерационным) методом.

Пример. Длительная прочность детали двигателя (материал – жаростойкий сплав ЖС6-К) описывается уравнением:

$$\sigma = A - B \cdot T(20 + \lg \tau), \quad (5)$$

где σ – предел длительной прочности, кг/мм²; T – температура, К; τ – длительность работы, час; A и B – коэффициенты.

Требуется оценить долговечность материала в прогнозной области при напряжении 3,5 МПа и температуре 2000 К, если известно, что модель прочности в данной области остается неизменной, а используемое оборудование позволяет проводить испытания образцов материала только в интервале нагрузок от 2,0 до 3,0 МПа и от 970 до 1120 К.

На испытания выделено 12 образцов.

Время до разрушения материала определяется согласно (5):

$$\tau^* = \exp[(A - \sigma_p) / B \cdot T - 20], \quad (6)$$

где σ_p – напряжение лопатки, кг/мм².

Для выбора плана эксперимента задаемся начальными значениями коэффициентов в уравнении (6) – $A = 231,5$ и $B = 7,709 \cdot 10^{-3}$.

Выбор плана оптимизации по критерию G -оптимальности показывает, что необходимо провести: 3 опыта при $\sigma_p = 2$ МПа и $T = 973$ К и 9 опытов при $\sigma_p = 3,0$ МПа и $T = 1120$ К.

При этом прогнозная оценка имеет дисперсию в 17 раз меньшую, чем при прогнозировании прочности по модели, полученной по результатам равномерно спланированного эксперимента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гишваров А. С.** Повышение эффективности планирования многофакторного эксперимента. Уфа: Гилем, 2010. 250 с.
2. **Гишваров А. С.** Многокритериальное планирование эксперимента при исследовании технических систем. Уфа: Гилем, 2006. 236 с.
3. **Хартман К. и др.** Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов. М.: Мир, 1977. 553 с.
4. **Круг Г. К., Сосулин Ю. А., Фатуев В. А.** Планирование эксперимента в задачах идентификации и экстраполяции. М.: Наука, 1997. 209 с.

ОБ АВТОРАХ

Давыдов Марсель Николаевич, доц. каф. авиац. двигателей, инженер-механик по авиац. двигателям (УГАТУ, 2002), кандидат техн. наук, специальность «Тепловые и электроракетные двигатели летательных аппаратов» (УГАТУ, 2006).

Агеев Георгий Константинович, ассистент той же каф., инженер-механик по авиац. двигателям (УГАТУ, 2007).

Могильницкий Евгений Анатольевич, аспирант той же кафедры, инженер-механик по авиац. двигателям (УГАТУ, 2007).