

И. С. Елисеев, Н. М. Цирельман

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТЕПЛООБМЕНА ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ОГРАНИЧЕННОЙ ДЛИНЫ

В работе рассмотрено определение параметров граничных условий теплообмена на ограничивающих поверхностях полого цилиндра на основе решения обратной задачи нестационарной теплопроводности. *Теплопроводность; обратная задача; теплообмен; граничные условия; идентификация*

Многие элементы конструкций имеют форму полого цилиндра ограниченной длины. Прежде всего, к ним относятся трубопроводы различного назначения: в частности, топливопроводы и маслопроводы авиационных двигателей, гильзы цилиндров поршневых двигателей и др. Поэтому идентификация граничных условий теплообмена на их внутренней или наружной поверхности для расчета теплового и теплонапряженного состояния представляется весьма актуальной [1–3].

Эффективным методом для этого является использование решения граничной обратной задачи теплопроводности (ОЗТ), включающей в себя:

- уравнение нестационарной теплопроводности

$$\frac{\partial T(\eta, \xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(\eta, \xi, t)}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\xi \frac{\partial T(\eta, \xi, t)}{\partial \xi} \right], \quad (1)$$

$$0 < \eta < l/r_0, \quad \xi_1 < \xi < 1 \quad (\text{или } 1 < \xi < \xi_2), \quad t > 0,$$

$$(\xi_1 = r_1/r_2, \quad \xi_2 = r_2/r_1),$$

- граничные условия на внутренней $r_0 = r_1$ ($\xi_0 = 1$) или на внешней $r_0 = r_2$ ($\xi_0 = 1$) цилиндрической поверхности

$$T(\eta, \xi_0, t) = f(\eta, t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(\eta, \xi_0, t)}{\partial \xi} = \varphi(\eta, t),$$

$$0 < \eta < l/r_0, \quad t > 0. \quad (3)$$

В формулах (1)–(3) обозначены: $T(\eta, \xi, t)$ – искомая температура; $\eta = x / r_0$ и $\xi = r / r_0$, l и r_0 – координаты точки в теле, длина трубы и характерный размер (радиус внутренней ($r_0 = r_1$) или наружной ($r_0 = r_2$) ограничивающих цилиндрических поверхностей); $t = a\tau/r_0^2$ и τ , a – безразмерное и размерное время, коэффициент температуропроводности материала.

На рисунке представлены геометрическая область (а) и экспериментально устанавливаемые функции (б) для задачи (1)–(3).

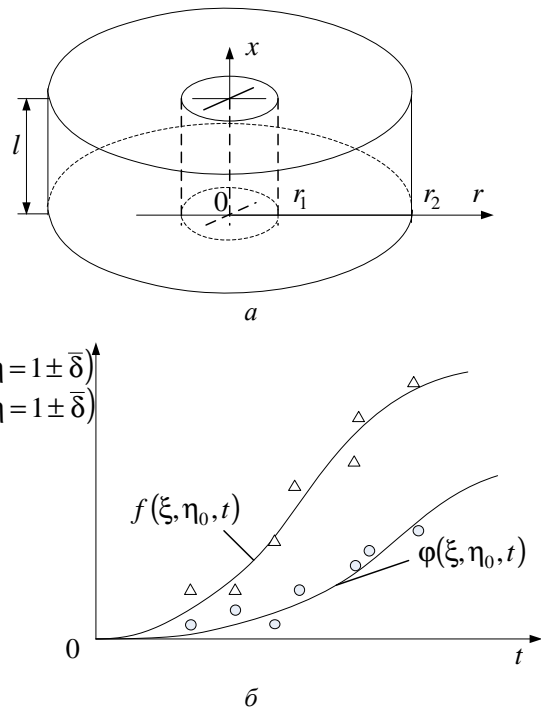


Рис. Графическая интерпретация данных для ОЗТ: а – геометрическая область определения решения; б – экспериментально устанавливаемые функции

Будем искать аналитическое решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$T(\eta, \xi, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(\eta, t)(\xi - 1)^k. \quad (4)$$

Подстановкой (4) в (1) и приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях $(\xi - 1)^k$, $k \geq 0$ в левой и правой частях получившегося равенства имеем

$$(\Phi_n)'_t = (\Phi_n)''_{\eta\eta} + R_{n+2}(\eta, t), \quad n \geq 0, \quad (5)$$

где

$$R_{n+2}(\eta, t) = (n+2)(n+1)\Phi_{n+2} + (n+1)\Phi_{n+1} - n\Phi_n - \dots - (-1)^{n-1}\Phi_2 - (-1)^n\Phi_1. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует

$$(n+2)(n+1)\Phi_{n+2} = \Delta_0\Phi_n - (n+1)\Phi_{n+1} + n\Phi_n - \dots - (-1)^{n-1}2\Phi_2 - (-1)^n\Phi_1, \quad (7)$$

где $\Delta_0\Phi_n = (\Phi_n)'_t - (\Phi_n)''_{\eta\eta}$, так что в частности для $n=0$ и $n=1$ получаем

$$2 \cdot 1 \cdot \Phi_2 = \Delta_0\Phi_0 - \Phi_1, \\ 3 \cdot 2 \cdot \Phi_3 = \Delta_0\Phi_1 - 2\Phi_2 + \Phi_1 \text{ и т. д.}$$

При этом, как нетрудно видеть, для (2) и (3) имеем

$$\Phi_0(\eta, t) = f(\eta, t), \Phi_1(\eta, t) = \varphi(\eta, t), \quad (8)$$

так что рекуррентные формулы (7) при условиях (8) полностью определяют коэффициенты ряда (4) и сам ряд.

Предполагая $f(\eta, t)$ и $\varphi(\eta, t)$ аналитическими по z ($z = \eta + iy$) в круге $|z - z_0| \leq R$, содержащем в себе интервал $(0, l/r_0)$ действительной оси 0 η , где $R \geq \sqrt{2}$, и целыми по t , покажем, что ряд (4) представляет собой аналитическое по η, t и ξ решение в кольце $\xi_1 < \xi < 1$ или $1 < \xi < \xi_2$ при $0 < \xi_1 < 1$ или $1 < \xi_2 < 2$.

Действительно, в силу аналитичности функций $\Phi_0(\eta, t)$ и $\Phi_1(\eta, t)$ при $|z - z_0| \leq R$ и целости их по t из рекуррентных формул (7) и (8) видно, что и при любом $n \geq 0$ функция $\Phi_n(\eta, t)$ — целая по t и аналитическая в $|z - z_0| \leq R_1$ при некотором фиксированном $R_1 > \sqrt{2}$. Тогда, обозначая $M_n(t) = \max_{\substack{|t| \leq \tilde{t} \\ |z - z_0| \leq R_1}} \Phi_n(z, t)$, согласно известным

формулам теории функций комплексного переменного (например, [4]) получаем следующие оценки:

$$(\Phi_n)'_t \leq \frac{M_n}{\tilde{t}} \quad \text{и} \quad (\Phi_n)''_{\eta\eta} \leq \frac{2M_n}{R_1^2}.$$

Рассмотрим такое значение \tilde{t} , при котором выполняются неравенства

$$\frac{1}{\tilde{t}} + \frac{2}{R_1^2} \leq 1, \text{ т. е. } \frac{1}{\tilde{t}} \leq 1 - \frac{2}{R_1^2}, \quad (9)$$

и тогда вследствие того, что

$$\frac{2}{R_1^2} < \frac{2}{(\sqrt{2})^2} = 1, \text{ то } 1 - \frac{2}{R_1^2} > 0,$$

имеем

$$\tilde{t} \geq \left(1 - \frac{2}{R_1^2}\right)^{-1}. \quad (10)$$

При выполнении условия (10) имеем

$$|\Delta_0\Phi_n| = \left| (\Phi_n)'_t - (\Phi_n)''_{\eta\eta} \right| \leq \left| (\Phi_n)'_t \right| + \left| (\Phi_n)''_{\eta\eta} \right| \leq \frac{M_n}{\tilde{t}} + \frac{2M_n}{R_1^2} \leq M_n \cdot 1 = M_n, \quad (11)$$

и с учетом (7) и (11) для $n=0$ получаем:

$$|\Phi_2| = \frac{1}{2} [|\Delta_0\Phi_0| + |\Phi_1|] \leq \frac{1}{2}(M_0 + M_1) \leq \frac{1}{2}(M + M) = M, \quad (12)$$

т. е. $|\Phi_2| \leq M(\tilde{t})$, где $M(\tilde{t}) = \max[M_0, M_1]$, так что $M_2 \leq M$.

При $n=1$ из формулы (7) имеем

$$|\Phi_3| = \frac{1}{3 \cdot 2} [|\Delta_0\Phi_1| + 2|\Phi_2| + |\Phi_1|] = \frac{1}{3 \cdot 2} (M_1 + 2M_1 + M_1) \leq \frac{4M_1}{3 \cdot 2} < M, \quad (13)$$

т. е. $|\Phi_n| \leq M, M_n \leq M, 0 \leq n \leq 3$.

Пусть теперь

$$|\Phi_n| \leq M, M_n \leq M, 0 \leq n \leq m+1. \quad (14)$$

Тогда из совместного рассмотрения (7), (11) и (14) при $m \geq 2$ следует

$$|\Phi_{m+2}| \leq \frac{1}{(m+2) \cdot (m+1)} [|\Delta_0\Phi_m| + (m+1)|\Phi_{m+1}| + \dots + 2|\Phi_2| + |\Phi_1|] \leq \frac{1}{(m+2) \cdot (m+1)} [M_m + (m+1)M + \dots + 2M + M] \leq \frac{1}{(m+2)(m+1)} \left[M + (m+1) \frac{m+1+1}{2} M \right] = M \left[\frac{1}{(m+2)(m+1)} + \frac{1}{2} \right] \leq M \left(\frac{1}{4 \cdot 3} + \frac{1}{2} \right) < M. \quad (15)$$

Таким образом, получаем $|\Phi_n| \leq M$ и при $0 \leq n \leq m+2$, так что методом математической индукции доказано, что имеют место неравенства

$$|\Phi_n(\eta, t)| \leq M(\tilde{t}), \quad n \geq 0. \quad (16)$$

Поэтому с учетом того, что $|\xi - 1| \leq 1 - \xi_1 = l_1$ ($l_1 < 1$) или $|\xi - 1| \leq \xi_2 - 1 = l_2$ ($l_2 < 1$), можем считать, что в рассматриваемом кольце $|\xi - 1| \leq \sigma, \sigma < 1$, и таким образом имеем:

$$|\Phi_n(\eta, t)(\xi - 1)^n| = |\Phi_n| |\xi - 1|^n \leq M\sigma^n, \quad n \geq 0. \quad (17)$$

Тем самым установлено, что ряд (4) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} M\sigma^n = \frac{M}{1-\sigma}$ и вследствие этого он равно-

мерно сходится в области $|t| \leq \tilde{t}$, $|z - z_0| \leq R_1$ для $\xi_1 \leq \xi \leq 2 - \xi_1$ или $2 - \xi_2 \leq \xi \leq \xi_2$.

В итоге приходим к выводу о том, что справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если $f(\eta, t)$ и $\varphi(\eta, t)$ аналитически продолжаются с интервала $\Delta = (0, l/r_0)$ действительной оси $0 \leq \eta$ в некоторый круг $|z - z_0| \leq R$, $R \geq \sqrt{2}$, содержащий Δ по переменной η , и являются целыми по переменной t , то ряд (4) представляет собой единственное аналитическое решение задачи (1)–(3) в заданной области. При этом ряд (4) аналитически продолжается в область $0 \leq \eta \leq l/r_0$, $t \geq 0$, $0 < \xi < 2$.

Как частные случаи получаются

ТЕОРЕМА 2. Если $f(\eta, t)$ и $\varphi(\eta, t)$ представляются степенными рядами, сходящимися по η на интервале, включающем отрезок $[0; l/r_0]$, $l/r_0 \geq 2\sqrt{2}$, и по t на любом отрезке временной оси $t \in (0, +\infty)$, то ряд (4) представляет собой единственное аналитическое решение задачи (1)–(3) в области $0 \leq \eta \leq l/r_0$, $t > 0$, $0 < \xi < 2$.

ТЕОРЕМА 3. Если $f(\eta, t)$ и $\varphi(\eta, t)$ – многочлены степени не выше n по переменным η и t , то ряд (4) является единственным решением задачи (1)–(3), аналитическим при $0 < \eta < 2$ и любых η и t . При этом он имеет полиномиальные коэффициенты $F_n(\eta, t)$ по переменным η и t степени не выше n .

Для практических приложений считаем полезным привести формулы для определения идентифицируемых температур различного приближения к решению поставленной ОЗТ:

- для $n = 2$

$$T_2 = f(\eta, t) + \varphi(\eta, t)(\xi - 1), \quad (18)$$

- для $n = 3$

$$T_3 = f(\eta, t) + \varphi(\eta, t)(\xi - 1) + \frac{1}{2}[\Delta_0 f(\eta, t) - \varphi(\eta, t)](\xi - 1)^2, \quad (19)$$

- для $n = 4$

$$T_4 = f(\eta, t) + \varphi(\eta, t)(\xi - 1) + \frac{1}{2}[\Delta_0 f(\eta, t) - \varphi(\eta, t)](\xi - 1)^2 + \frac{1}{6}[\Delta_0 \varphi(\eta, t) - \Delta_0 f(\eta, t) + 2\varphi(\eta, t)](\xi - 1)^3. \quad (20)$$

В формулах (18)–(20) имеем для $\Delta_0 f(\eta, t)$ и $\Delta_0 \varphi(\eta, t)$ зависимость:

$$\Delta_0 F(\eta, t) = F'_t(\eta, t) - F''_{\eta\eta}(\eta, t).$$

Для получения конкретных решений в форме (18)–(20) функции $f(\eta, t)$ и $\varphi(\eta, t)$ были ап-

проксимированы экспоненциальными и полиномиальными рядами.

В первом случае было принято, что экспериментально определенные $f(\eta, t)$ и $\varphi(\eta, t)$ аппроксимированы «набором» экспонент вида:

$$f(\eta, t) = \Phi_0(\eta, t) = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta), \quad (21)$$

$$\varphi(\eta, t) = \Phi_1(\eta, t) = \sum_{i=1}^{\nu} b_i \exp(p_i t + q_i \eta). \quad (22)$$

Тогда вместо (18)–(20) получаем следующие приближения к решению поставленной задачи (1)–(3) в виде:

$$T_2(\eta, t) = \Phi_0(\eta, t) + \Phi_1(\eta, t)(\xi - 1) = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \exp(p_i t + q_i \eta) \times (\xi - 1), \quad (23)$$

$$T_3(\eta, t) = \Phi_0(\eta, t) + \Phi_1(\eta, t)(\xi - 1) + \Phi_2(\eta, t)(\xi - 1)^2 = T_2(\eta, t) + \Phi_2(\eta, t) \times (\xi - 1)^2 = T_2(\eta, t) + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{\mu} (\alpha_i - \beta_i^2) a_i \times \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) - \sum_{i=1}^{\nu} b_i \exp(p_i t + q_i \eta) \right] \times (\xi - 1)^2 = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \left[1 + \frac{\alpha_i - \beta_i^2}{2} (\xi - 1)^2 \right] \times \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \left[\xi - 1 - \frac{(\xi - 1)^2}{2} \right] \times \exp(p_i t + q_i \eta), \quad (24)$$

$$T_4(\eta, t) = T_3(\eta, t) + \Phi_3(\eta, t)(\xi - 1)^3 = T_3(\eta, t) + \frac{1}{6} \left[\sum_{i=1}^{\nu} (p_i - q_i^2) \exp(p_i t + q_i \eta) (\xi - 1)^2 - \sum_{i=1}^{\mu} (\alpha_i - \beta_i^2) a_i \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) + 2 \sum_{i=1}^{\nu} b_i \exp(p_i t + q_i \eta) (\xi - 1)^3 = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \left[1 + \frac{(\alpha_i - \beta_i^2)(\xi - 1)^2}{2} - (\alpha_i - \beta_i^2) \frac{(\xi - 1)^3}{6} \right] \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \left[\xi - 1 - \frac{(\xi - 1)^2}{2} + (p_i - q_i^2 + 2) \times \frac{(\xi - 1)^3}{6} \right] \exp(p_i t + q_i \eta). \quad (25)$$

Основываясь на формулах (23)–(25), получаем последовательно:

$$T_2(1 \pm \bar{\delta}) = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \exp(p_i t + q_i \eta)(\pm \bar{\delta}), \quad (26)$$

$$(T_2)'_{\xi=1 \pm \bar{\delta}} = \sum_{i=1}^{\nu} b_i \exp(p_i t + q_i \eta), \quad (27)$$

$$T_3(1 \pm \bar{\delta}) = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \left[1 + \frac{\alpha_i - \beta_i^2}{2} \bar{\delta}^2 \right] \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \left[\pm \bar{\delta} - \frac{\bar{\delta}^2}{2} \right] \exp(p_i t + q_i \eta), \quad (28)$$

$$(T_3)'_{\xi=1 \pm \bar{\delta}} = \sum_{i=1}^{\mu} a_i [(\alpha_i - \beta_i^2)(\pm \bar{\delta})] \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) + \sum_{i=1}^{\nu} b_i [1 - (\pm \bar{\delta})] \exp(p_i t + q_i \eta), \quad (29)$$

$$T_4(1 \pm \bar{\delta}) = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \left[1 + \frac{(\alpha_i - \beta_i^2)(\bar{\delta})^2}{2} - (\alpha_i - \beta_i^2) \frac{(\pm \bar{\delta})^3}{6} \right] \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \left[\pm \bar{\delta} - \frac{\bar{\delta}^2}{2} + (p_i - q_i^2 + 2) \frac{(\pm \bar{\delta})^3}{6} \right] \exp(p_i t + q_i \eta), \quad (30)$$

$$(T_4)'_{\xi=1 \pm \bar{\delta}} = \sum_{i=1}^{\mu} a_i \left[(\alpha_i - \beta_i^2)(\pm \bar{\delta}) - (\alpha_i - \beta_i^2) \frac{\bar{\delta}^2}{2} \right] \times \exp(\alpha_i t + \beta_i \eta) + \sum_{i=1}^{\nu} b_i \left[1 - (\pm \bar{\delta}) + \frac{\bar{\delta}^2}{2} (p_i - q_i^2 + 2) \right] \exp(p_i t + q_i \eta), \quad (31)$$

где $\bar{\delta} = (r_2 - r_1) / r_0$ – относительная толщина стенки полого цилиндра.

Пусть теперь экспериментально установленные функции $f(\eta, t)$ и $\varphi(\eta, t)$ являются многочленами, а t^m и η^n – максимальные по входящим в них степени по аргументам t и η . Тогда их можно записать в виде

$$f(\eta, t) = \Phi_0(\eta, t) = \sum_{i,j=0}^{m,n} a_{ij} t^i \eta^j, \quad (32)$$

$$\varphi(\eta, t) = \Phi_1(\eta, t) = \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{ij} t^i \eta^j, \quad (33)$$

где a_{ij} и b_{ij} – некоторые числовые коэффициенты, $i \in [1, m], j \in [1, n]$.

Различные приближения к решению задачи (1)–(3) в этом случае таковы:

$$T_2(\eta, t) = \sum_{i,j=0}^{m,n} a_{ij} t^i \eta^j + \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{ij} t^i \eta^j (\xi - 1) = \quad (34)$$

$$= \sum_{i,j=0}^{m,n} (a_{ij} + b_{ij}(\xi - 1)) t^i \eta^j,$$

$$T_3(\eta, t) = T_2(\eta, t) + \frac{1}{2} [\Delta_0 f(\eta, t) - \varphi(\eta, t)] \times$$

$$\times (1 - \xi)^2 = T_2(\eta, t) + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1,j=0}^{m,n} a_{ij} i t^{i-1} \eta^j - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0,j=2}^{m,n} b_{ij} (j-1) j t^i \eta^{j-2} - \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{ij} t^i \eta^j (1 - \xi)^2 = \right.$$

$$= T_2(\eta, t) + \frac{1}{2} \left[\sum_{s,j=0}^{m-1,n} (a_{s+1,j} (s+1) t^s \eta^j - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0,p=0}^{m,n-2} (a_{i,k+2} (p+2)(p+1) t^i \eta^l - \right.$$

$$\left. - \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{ij} t^i \eta^j \right] (\xi - 1)^2. \quad (35)$$

В (35) произведена замена индексов суммирования по следующему правилу: в первой сумме $s = i - 1, 0 \leq s \leq m - 1$, а во второй сумме $p = j - 2, 0 \leq p \leq n - 2$. Тогда с учетом (34) получаем вместо (35):

$$T_3(\eta, t) = \sum_{i=1,j=0}^{m,n} (a_{ij} + (n-1)b_{ij} - \frac{(\xi-1)^2}{2} b_{ij}) t^i \eta^j + \frac{1}{2} \left[\sum_{i=0,j=2}^{m-1,n-2} (a_{i+1,j} \times \right.$$

$$\times (i+1) - (j+2)(j+1) \times a_{i,j+2}) t^i \eta^j + \sum_{i=0}^{m-1} (a_{i+1,n-1} \eta^{n-1} + a_{i+1,n} \eta^n) (i+1) t^i - \left. - \sum_{j=0}^{n-2} (j+1)(j+2) a_{m,j+2} t^m \eta^j \right] (\xi - 1)^2.$$

Температура и ее градиент на поверхности тела определяются по формулам:

$$T_2|_{\xi=1 \pm \bar{\delta}} = \sum_{i,j=0}^{m,n} (a_{ij} + b_{ij}(\eta \pm \bar{\delta})) t^i \eta^j, \quad (36)$$

$$(T_2|_{\xi=1\pm\bar{\delta}})'_{\xi} = \sum_{i,j=0}^{m,n} b_{ij} t^i \eta^j, \quad (37)$$

$$T_3|_{\xi=1\pm\bar{\delta}} = \sum_{i=1,j=0}^{m,n} \left(a_{ij} \pm b_{ij} \bar{\delta} - b_{ij} \frac{\bar{\delta}^2}{2} \right) t^i \eta^j + \frac{\bar{\delta}^2}{2} \times$$

$$\left[\sum_{i=0,j=0}^{m-1,n-2} (a_{i+1,j} (i+1) - (j+2)(j+1) \times a_{i,j+2}) t^i \eta^j + \right.$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} (a_{i+1,n-1} \eta^{n-1} + a_{i+1,n} \eta^n) (i+1) t^i - \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \times$$

$$\left. \times (j+2) a_{m,j+2} t^m \eta^j \right] \quad (38)$$

$$(T_3|_{\xi=1\pm\bar{\delta}})'_{\xi} = \sum_{i=1,j=0}^{m,n} (b_{ij} (1 \pm \bar{\delta}))^i \eta^j \pm$$

$$\pm \bar{\delta} \left[\sum_{i=0,j=0}^{m-1,n-2} (a_{i+1,j} (i+1) - (j+2)(j+1) \times \right.$$

$$\left. \times a_{i,j+2}) t^i \eta^j + \sum_{i=0}^{m-1} (a_{i+1,n-1} \eta^{n-1} + a_{i+1,n} \eta^n) \times \right.$$

$$\left. \times (i+1) t^i - \sum_{j=0}^{n-2} (j+1)(j+2) a_{m,j+2} t^m \eta^j \right]. \quad (39)$$

Для вычисления плотности теплового потока q_W через ограничивающие поверхности рассматриваемого тела при установленном на них градиенте температуры $T'_{\xi}(\xi=1\pm\bar{\delta})$ и известном коэффициенте теплопроводности материала цилиндра λ используется общеизвестная зависимость

$$q_W = -\lambda T'_{\xi}(\xi=1\pm\bar{\delta}), \quad (40)$$

а при устанавливаемой также температуре на них $T_W = T(1\pm\bar{\delta})$ и известной температуре омывающей среды $T_{f,0}$ определяем и искомые коэффициенты теплоотдачи α по формуле

$$\alpha = \frac{-\lambda T'_{\xi}(\xi=1\pm\bar{\delta})}{T(\xi=1\pm\bar{\delta}) - T_{f,0}}. \quad (41).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алифанов О. М.** Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. 216 с.
2. **Алифанов О. М.** Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
3. **Алифанов О. М., Артюхов Е. А., Румянцев С. В.** Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена. М.: Наука, 1988. 363 с.
4. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории комплексного переменного. М.: Изд-во «Лань», 2002. 749 с.

ОБ АВТОРАХ

Елисеев Игорь Спартакович, доц. каф. математики. Дипл. математик, преподаватель математики. Кандидат физ.-мат. наук по теории функций и функциональному анализу (МГПИ им. Крупской, Москва, 1981). Иссл. в обл. теории функций, функционального анализа, уравнений математической физики.

Цирельман Наум Моисеевич, проф. каф. АТиГ. Дипл. инж.-мех. (ОТИПХАП г. Одесса, 1963). Д-р техн. наук (КГТУ им. Гуполева, 1995). Иссл. в обл. численных аналитических экспериментальных исследований в области ТМО.