Уфа : УГАТУ, 2011 Вестник УГАТУ Т. 15, № 2 (42). С. 59–67

УДК 519.2

Е. В. Гапечкина

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ С ШУМОМ, СКОНЦЕНТРИРОВАННЫМ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ

В работе рассматривается класс дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с внешним воздействием в виде пространственно-временного шума, сконцентрированного на гиперплоскости и содержащего формальные производные симметричных интегралов. Показано, что нахождение потраекторных решений задачи с начальными условиями и первой краевой задачи в классе обобщенных функций сводится к нахождению решений задач того же типа, но без детерминированных аналогов стохастических интегралов в правой части, которые решаются уже классическими, а не стохастическими, численно-аналитическими методами. Приводится пример численно-аналитического решения первой краевой задачи в случае, когда шум, сконцентрированный на гиперплоскости, является только временным, а остальные компоненты правой части дифференциального уравнения достаточно гладкие. *Симметричный интеграл*; *уравнения с симметричным интегралом*; *стохастическое дифференциальное уравнение*; *пространственно-временной шум*; *обобщенные функции*; *первая краевая задача*

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $(\Omega,\ F,\ (F_t),\ P)$ – вероятностное пространство с фильтрацией (F_t), на котором задан стандартный винеровский процесс $W(t)$. Рассмотрим задачу с начальными условиями для стохастического волнового уравнения:

$$u''_{tt}(t,x)-u''_{xx}(t,x)=g(t,x,W(t))+f(t,x,W_t)*W'(t)$$
$$u\big|_{t=0}=u_0(x),\ u'_{t|t=0}=\upsilon_0(x),\ x\in R, \tag{1}$$

где функции $g(t, x, \upsilon)$, $f(t, x, \upsilon)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка по каждому аргументу, формальная производная винеровского процесса $W'(t)$ понимается в смысле Стратоновича [10] и называется белым шумом [2]. Задачи такого типа рассматривались, например, в работе [6], где приводились потраекторные решения. Пусть $F(t,x,\upsilon)=\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} f(t,x,u)du$, тогда, согласно [6], решение задачи (1) дает аналог формулы Даламбера:

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\frac{1}{2}\left(u_0(x+t)+u_0(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\upsilon_0(\xi)d\xi+\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}g(\tau,\xi,W_\tau)d\xi d\tau+\int_0^t F(s,x,W(s))ds-\\&-\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}F(0,\xi,W(0))d\xi+\\&+\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}\int_0^\tau F''_{\xi\xi}(s,\xi,W_s)dsd\xi d\tau-\\&-\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}F'_\tau(\tau,\xi,W_\tau)d\xi d\tau.\end{aligned} \tag{2}$$

При $f(t, x, W(t)) \equiv 0$ последняя формула совпадает с классической формулой Даламбера. Если при этом в правой части уравнения функция $g(t, x, W(t)) = W'(t)$, решение задачи (1) имеет вид:

$$\begin{aligned}u(t,x)&=\frac{1}{2}\left(u_0(x+t)+u_0(x-t)\right)+\\&+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\upsilon_0(\xi)d\xi-tW(0)+\int_0^t W(s)ds.\end{aligned} \tag{3}$$

В данной работе речь пойдет о стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных гиперболичекого типа, у которых в правой части присутствует белый шум, сконцентрированный на гиперплоскости, что приводит нас к поиску решения в классе обобщенных функций [3, 4, 14].

Настоящее исследование находится на стыке теории обобщенных функций и теории стохастических дифференциальных уравнений и их детерминированных аналогов. Автор впервые вводит понятие симметричного интеграла от обобщенных функций. Таким образом, данную работу можно считать развитием результатов О. В. Захаровой [7] в классе задач, обозначенных в работе Р. Даланга [14].

Пусть $S(R^d)$ – пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на R^d, $S'(R^d)$ – двойственное к нему пространство медленно растущих обобщенных функций на R^d. Обозначим $R_+=[0;+\infty)$, $C_0^\infty(R^d)$– пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на R^d, символом $<z,\ \phi>$ – значение функционала $z \in S'(R^d)$ на произвольной пробной функции $\phi \in S(R^d)$.

Контактная информация: gap_kate@mail.ru

Из обобщенной теоремы Колмогорова [21, теор. 3.4] следует, что существует вероятностное пространство (Ω, F, P) с фильтрацией F_t и обобщенный центрированный гауссовский процесс $F = \{F_t(\phi),\ t \in R_+,\ \phi \in S(R^d)\}$, определенный на этом пространстве и связанный с шумом $F(t, x) = F(t, x_1, x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in R^{d-1}\times R$, по формуле:

$$F_t(\phi) = \int_0^t ds \int_{R^d} dx \dot{F}(s,x)\phi(x) \in S'(R^d),\quad t \in R_+, \phi \in S(R^d). \tag{4}$$

Ковариации гауссовского процесса $F_t(\phi)$ и шума $\dot{F}(t,x)$ задаются следующими выражениями для любых $t,\ s \in R_+$, $x,\ y \in R^d$, $\phi,\ \psi \in S(R^d)$:

$$E\left(F_t(\phi), \overline{F_s(\psi)}\right) = (t \wedge s)\int_{R^d\times R^d} \Gamma(dx, dy)\phi(x)\overline{\psi(y)}, \tag{5}$$

$$E\left(\dot{F}(t,x), \dot{F}(s,y)\right) = \delta_0(t-s)\Gamma(x,y), \tag{6}$$

где функция $\Gamma(x, y)$: $R^d \times R^d \to R_+$ в общем случае ограничена либо на нее налагаются более слабые требования [13, 18]. Если шум является однородным по пространственным координатам, его ковариационная функция имеет вид: $\Gamma(x, y) = \Gamma(x-y)$, $x, y \in R^d$.

Рассмотрим задачу с начальными условиями для стохастического дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа, приведенного в работе [14], положив здесь и далее $u = u(t, x) = u(t, x_1, x_2)$, $\phi = \phi(x) = \phi(x_1, x_2)$, $x = (x_1, x_2) \in R^{d-1} \times R$:

$$u''_{tt}(t,x) + 2au'_t(t,x) + bu(t,x) - \Delta u(t,x) = \left[g(u(t,x_1 0)) + h(u(t,x_1 0))\dot{F}(t,x_1 0)\right]\delta_0(x_2), \tag{7}$$

$$u(0,x) = u_0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \upsilon_0,\ x \in R^d, \tag{8}$$

где $t \in R_+$, $x = (x_1, x_2) \in R^{d-1} \times R$, $\forall\ a, b \in R$, g и h – действительные функции, переменная x_1 представляет собой координаты в гиперплоскости $R^{d-1} \times \{0\}$, на которой сконцентрирован шум, x_2 – координата на прямом перпендикуляре к этой гиперплоскости, $\delta_0(x_2)$ – дельта-функция Дирака [3], $\dot{F}$ – гауссовский шум, белый по времени и пространственно однородный на гиперплоскости. В этом случае $\Gamma(x, y) = \Gamma_1(x_1 - y_1)\ \delta_0(x_2)\ \delta_0(y_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x_1, y_1 \in R^{d-1}$, $x_2, y_2 \in R$.

Можно привести как минимум 3 интересных частных случая уравнения вида (7). Когда $a = b = 0$ – это волновое уравнение. Когда $a > 0$ и $b = 0$ – это волновое уравнение со скачками, называемое при $d = 1$ телеграфным. И, наконец, когда $a = 0$ и $b \neq 0$, – это уравнение Клейна-Гордона.

Уравнение (7) может быть получено при моделировании следующего явления [14]. Дождь капает на поверхность озера, порождая звуковые волны, которые распространяются над водой. Этот шум складывается из большого количества падений маленьких капелек дождя. После проведения соответствующего масштабирования шум, распространяющийся в трехмерной среде, можно считать пространственно однородным у поверхности озера. Следовательно, шум действует на 2-мерной границе 3-мерной области. В двумерном случае можно представить себе границу некоего плоского объекта (либо натянутую нитку или струну), которая испытывает случайное воздействие в перпендикулярном направлении. В этом случае шум действует на 1-мерной границе 2-мерной области. Таким образом, в этой модели в качестве внешнего воздействия присутствует шум, сконцентрированный на гиперплоскости и действующий вдоль прямого перпендикуляра к ней.

Существует несколько подходов к изучению дифференциальных уравнений, возмущаемых шумом, сконцентрированным на многообразиях. Одномерные случаи, когда шум на границе является точечным, исследованы в работах [11, 16, 17]. В пространствах с большей размерностью параболические уравнения с шумом изучались Dawson и Salehi [15], в гиперболическом случае для волновых уравнений – Mueller [20], Dalang, Frangos [13], Dalang [12], Millet, Sanz-Sole [18, 19], Peszat [22] и Peszat, Zabczyk [23]. В упомянутых работах показано, что для существования и единственности решений такого рода задач должны быть наложены ограничения на шум в правой части, а именно – на его ковариацию.

Одним из ключевых моментов в работе Даланга и Левекью [14] является характеризация тех ковариаций, для которых уравнения вида (7) с функциями g, h = const в правой части имеют действительно-значные решения в пространствах $d \geq 2$. Уравнение (7) с такой правой частью будет линейным относительно u. В пространствах размерности 2 и 3 при условии существования решения для линейного уравнения (7) доказывается существование и единственность решения нелинейного уравнения вида (7) при тех же условиях на ковариацию, что были потребованы в линейном случае.

Шум в уравнении (7) понимается в обобщенном смысле, поэтому важно придать строгий смысл этому уравнению. В работе [14] это делается с помощью теории мартингальных мер Уолша [24] и соответствующих обобщений стохастического интеграла Уолша [12]. В пространстве $d = 1$ уравнение (7) имеет действительно-значное решение для всех ковариаций при любых Γ. В пространствах более высокой размерности в общем случае решение существует только в пространстве медленно растущих функционалов Шварца [3].

Рассмотрим задачу для частного случая уравнения (7):

$$\begin{aligned} &u''_{tt}(t,x)+2au'_t(t,x)+bu(t,x)-\\ &-\Delta u(t,x)=\dot F(t,x_1,0)\delta_0(x_2),\\ &t\in R_+,\, x=(x_1,x_2)\in R^{d-1}\times R, \forall a,b\in R,\\ &u(0,x)=0,\, \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0,\, x\in R^d, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\dot F(t,x)=\dot F(t,x_1,x_2)$, $x=(x_1,x_2)\in R^{d-1}\times R$, – обобщенный гауссовский шум (4), сконцентрированный на гиперплоскости и действующий перпендикулярно ей. Существует несколько определений решения задач типа (9) [14].

Определение 1. Слабым решением задачи (9) называется адаптированный обобщенный процесс $u(t, x)$, $t \geq 0$, $x \in R^d$, со значениями в пространстве $S'(R^d)$ при каждом $t > 0$ такой, что для всех $t > 0$ и $\phi(x)\in C_0^\infty(R^d)$, $x = (x_1, x_2) \in \in R^d \times \times R$, справедливо

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)+2a\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)+bu(t,x)-\Delta u(t,x),\phi(x)\right\rangle=$$
$$=\left\langle \dot F(t,x_1,0),\phi(x_1,0)\right\rangle,\ P-\text{п.н.}$$

Известно [25], что единственное слабое решение задачи (9) дается формулой

$$\begin{aligned} &\langle u(t,x),\phi(x)\rangle=\int_{[0,t]\times R^{d-1}} M(ds,dx_1,0)\times\\ &\times(G(t-s)\phi)(x_1,0),\, t\in R_+,\phi\in S(R^d) \end{aligned} \tag{10}$$

где звездочкой обозначена операция свертки

$$(\phi*\psi)(x)=\int_{R^d}\phi(x-y)\psi(y)dy,$$
$$\phi,\psi\in S(R^d),\, x\in R^d,$$

Функция $G = G(t, x) = G(t, x_1, x_2)$, $t \geq 0$, $x = (x_1, x_2) \in R^{d-1} \times R$, является решением однородной задачи

$$G''_{tt}+2aG'_t+bG-\Delta G=0,$$
$$G(0,0)=0,\, G'_t(0,0)=\delta_0(0),$$

и называется ядром Грина уравнения (9), $M(ds, dx_1, 0)$ – специальным образом построенная по гауссовскому процессу из правой части уравнения (9) мартингальная мера [12, 13]. Схематически это можно представить следующим образом. Сначала функция $\phi \to F(\phi)$ обобщается до σ-конечной L^2-значной меры $A \to F(A)$, определенной для ограниченных борелевских множеств $A \subset R_+ \times R^d$. Затем для $M_t(B) = F([0, t] \times \times B)$, $B \in B_b(R^d)$, где $B_b(R^d)$ – множество ограниченных борелевских подмножеств R^d, определяется фильтрация

$$F_t^0=\sigma\left(M_s(B), s\le t, B\in B_b(R^d)\right),$$
$$F_t=F_t^0\vee N,$$

где N состоит из P-нулевых множеств. Мартингальная мера $(M_t(B), F, t \geq 0, B \in B_b(R^d))$ и есть соответствующая процессу F мартингальная мера с ковариацией

$$Q([0,t]\times A\times B)=\langle M(A),M(B)\rangle_t=$$
$$=t\int_{R^d}dx\int_{R^d}dy 1_A(x)\Gamma(x,y)1_B(y),$$

где $\Gamma(x, y)$, $x, y \in R^d$ – ограниченная неотрицательная функция. Показано [14], что $t \to \to M_t(B)$ – непрерывный мартингал, $F(\phi) = =\int_{R_+}\int_{R^d}\phi(t,x)M(dt,dx)$. Последний интеграл сужается на гиперплоскость $x_2 = 0$:

$$F(\phi(t,x_1,0))=\int_{R_+}\int_{R^{d-1}}\phi(s,x_1,0)M(ds,dx_1,0).$$

Кроме слабого решения, существует также понятие сильного решения задачи (9), приведенное в [14]. Пусть $L^2_{\text{loc}}(R^d)$ – пространство обобщенных функций, интегрируемых с квадратом на любом ограниченном множестве.

Определение 2. Функционально-значным (сильным) решением задачи (9) называется адаптированный обобщенный процесс $u(t, x)$, $t \geq \geq 0$, $x \in R^d$, со значениями в $L^2_{\text{loc}}(R^d)$, такой, что функционал $\phi\to\int_{R^d}dx\,u(t,x)\phi(x)$, $\phi\in C_0^\infty(R^d)$, $t \geq 0$, совпадает со слабым решением (10) задачи (9).

В работе [14] доказываются необходимые и достаточные условия существования сильных решений задачи (9). Пусть $\Gamma(x, y)$, $x, y \in R^d$, – неотрицательная ограниченная функция. Рассмотрим ситуацию, когда шум сконцентрирован на гиперплоскости $R^{d-1} \times \{x_2\}$ и является пространственно однородным вне этой плоскости. Тогда можно представить функцию Γ в виде $\Gamma(x, y) = \Gamma_1(x_1 - y_1)\delta_0(x_2)\delta_0(y_2)$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $x_1, y_1 \in R^{d-1}$, $x_2, y_2 \in R$.

Теорема [14]. Функционально-значное решение $u(t, x)$, $t \geq o$, задачи (9) существует тогда и только тогда, когда выполняется условие: $\int_{R^{d-1}}\frac{\nu(d\xi)}{\sqrt{1+|\xi|^2}}<\infty$, где ν – борелевская мера, чье преобразование Фурье по пространственной координате x_1 дает функцию Γ_1. В этом случае решение $u = u(t, x_1, x_2)$, $x_2 \neq 0$, $x_1 \in R^{d-1}$, находится по формуле:

$$u(t,x_1,x_2)= = \int_{[0,t]\times R^{d-1}} M(ds,dy_1,x_2) G_1(t-s,x_1-y_1,x_2), \tag{11}$$

где $G_1(t,\cdot,x_2)$ – сужение $G(t,\cdot)$ на гиперплоскость $R^{d-1}\times\{x_2\}$.

1. СИММЕТРИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Пусть $X(s)$, $s \in R_+$, – произвольная непрерывная функция, $f(s, \upsilon)$, $s \in R_+$, $\upsilon \in R$, – детерминированная функция, измеримая по s и υ. Рассмотрим разбиения T_n, $n \in N$, отрезка $[0, t]$: $\mathrm{T}_n=\{t_k^{(n)}\}$, $0=t_0^{(n)}\le t_1^{(n)}\le\ldots\le t_k^{(n)}\le\ldots\le t_{m_n}^{(n)}=t$, $n \in N$, такие, что $T_n \subset T_{n+1}$, $n \in N$, и $\lambda_n = \max_k\left|t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}\right|\to 0$ при $n\to\infty$. Через $\mathrm{X}^{(n)}(s)$, $s \in [0, t]$, обозначим ломаную, построенную по функции $X(s)$ и отвечающую разбиению T_n, а через $\mathrm{N}^{(n)}(t,u)=\Sigma_{s\le t}1\left(\mathrm{X}^{(n)}(s)=u\right)$ соответствующую ей индикатрису Банаха. Положим $\Delta t_k^{(n)}=t_k^{(n)}-t_{k-1}^{(n)}$, $\left[\Delta t_k^{(n)}\right]=\left[t_{k-1}^{(n)},t_k^{(n)}\right]$, $\Delta\mathrm{X}_k^{(n)} = \mathrm{X}\left(t_k^{(n)}\right)-\mathrm{X}\left(t_{k-1}^{(n)}\right)$.

Определение 3. Симметричным интегралом называется

$$\int_0^t f(s,\mathrm{X}(s)) * d\mathrm{X}(s) \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_k \frac{1}{\Delta t_k^{(n)}}\int_{\left[\Delta t_k^{(n)}\right]} f\left(s,\mathrm{X}^{(n)}(s)\right)ds\Delta\mathrm{X}_k^{(n)},$$

если предел в правой части равенства существует и не зависит от выбора последовательности разбиений T_n, $n \in N$. В случае, когда $X(t) = W(t)$ – стандартный винеровский процесс, симметричный интеграл совпадает со стохастическим интегралом Стратоновича.

Пусть $F(s, x, \upsilon)$, $s \in R_+$, $\upsilon \in R$, $x \in R^d$, – функционал из $S'(R^d)$ при каждом $s > 0$, $\upsilon\in R$, функция $f(s, \upsilon) = \langle F(s, x, \upsilon), \phi(x)\rangle$ – его значение на произвольной пробной функции $\phi(x) \in S(R^d)$ $\forall s > 0$, $\upsilon \in R$, такие, что функция $f(s, \upsilon)$ измерима по s и υ.

Определение 4. Симметричным интегралом от обобщенной функции $F(s, x, X(s))$ называется функционал, действующий на пробную функцию $\phi\in S(R^d)$ по правилу:

$$\left\langle\int_0^t F(s,x,\mathrm{X}(s)) * d\mathrm{X}(s),\phi(x)\right\rangle \overset{def}{=} \overset{def}{=} \int_0^t \left\langle F(s,x,\mathrm{X}(s)),\phi(x)\right\rangle * d\mathrm{X}(s) = \int_0^t f(s,\mathrm{X}(s)) * d\mathrm{X}(s).$$

Достаточное условие существования симметричного интеграла от «обычной», регулярной функции – так называемое условие (S) [10].

Определение 5. Будем говорить, что пара функций $X(s)$, $s \in R_+$, и $f(s, \upsilon)$, $s \in R_+$, $\upsilon \in R$, удовлетворяют условию (S) на $[0, t]$, если:

(a) Функция $X(s)$, $s \in [0, t]$, непрерывна;

(b) При п. в. υ функция $f(s, \upsilon)$, $s \in [0, t]$, имеет ограниченное изменение и непрерывна справа по $s \in [0, t]$;

(c) При п. в. υ справедливо равенство $\int_0^t 1(\mathrm{X}(s)=\upsilon)|f|(ds,\upsilon)=0$, где при каждом υ функция $|f|(s, \upsilon)$ есть полное изменение функции $f(\tau, \upsilon)$ по переменной τ на отрезке $[0, s]$;

(d) Полное изменение $|f|(t, \upsilon)$ функции $f(s, \upsilon)$ по переменной s на отрезке $[0,t]$ локально суммируемо по υ.

Чтобы существовал симметричный интеграл от обобщенной функции $F(s, x, X(s))$, достаточно, чтобы пара функций $(X(s), f(s, \upsilon))$, где $f(s, \upsilon) = \langle F(s, x, \upsilon), \phi(x)\rangle$, удовлетворяла условию (S) на $[0, t]$. В этом случае существуют производная $f_s'(s,\upsilon)=\left\langle F(s,x,\upsilon),\phi(x)\right\rangle_s'$, интегралы $\int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(t)} f(t,\upsilon)d\upsilon$, $\int_0^t\int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(s)} f_s'(s,\upsilon)d\upsilon ds$ и $\forall\phi(x)\in S\left(R^d\right)$ симметричный интеграл от обобщенной функции $F(s, x, X(s))$ может быть вычислен по формуле:

$$\left\langle\int_0^t F(s,x,\mathrm{X}(s)) * d\mathrm{X}(s),\phi(x)\right\rangle = = \int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(t)}\left\langle F(t,x,\upsilon),\phi(x)\right\rangle d\upsilon - - \int_0^t\int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(s)}\left\langle F(s,x,\upsilon),\phi(x)\right\rangle_s' d\upsilon ds. \tag{12}$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных гиперболического типа

$$u_{tt}'' + 2au_t' + bu - \Delta u = = \left[g(t,x_1,0,\mathrm{X}(t)) + h(t,x_1,0,\mathrm{X}(t))\mathrm{X}'(t)\right]\delta_0(x_2), \tag{13}$$
$$x\in D, t\in(0,\mathrm{T}),$$

с начальными и краевыми условиями:

$$u(0,x)=u_0(x),\quad u_t'\big|_{t=0}=\upsilon_0(x),\quad x\in D\cup S_{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

$$u(t,x)\big|_{x\in S_{\mathrm{T}}}=\mu(t), t\in[0,\mathrm{T}], \tag{15}$$

где a, $b \in R$, $x = (x_1, x_2) \in R^{d-1} \times R$, g, h – обобщенные функции из $S'(R^d)$, D – некоторая ограниченная область в R^d, $S_т$ – граница «цилиндра» с основанием D при $t = 0$, направленного вдоль оси времени, $\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа.

Ниже будет представлен метод, позволяющий свести решение как задачи (13)–(14), так и первой краевой задачи (13)–(15) к решению задач такого же типа, не содержащих при этом симметричных интегралов, что существенно упростит решение этих задач.

В уравнении (13) $\mathrm{X}'(t) = \frac{d}{dt}\mathrm{X}(t)$ – формальная производная функции $X(t)$, которая понимается в форме симметричного интеграла, а само уравнение (13) следует понимать в интегральной форме:

$$u'_t(t,x) - u'_t(0,x) + 2au(t,x) - \\ - 2au(0,x) + b\int_0^t u(s,x)ds - \int_0^t \Delta u(s,x)ds = \\ = \left[\int_0^t g(s,x_1,0,\mathrm{X}(s))ds + \int_0^t h(s,x_1,0,\mathrm{X}(s)) * d\mathrm{X}(s)\right]\delta_0(x_2), \tag{16}$$

где последний интеграл в правой части есть детерминированный аналог интеграла Стратоновича – симметричный интеграл [10].

Так как в правой части уравнения (13) (или (16)) содержится дельта-функция Дирака $\delta_0(x_2)$ и функции g и h, мы понимаем его как уравнение с обобщенными функциями [3, 4, 14] $\forall \phi \in S(R^d)$:

$$\langle u'_t(t,x) - u'_t(0,x) + 2au(t,x) - 2au(0,x) + \\ + b\int_0^t u(s,x)ds - \int_0^t \Delta u(s,x)ds, \phi(x)\rangle = \\ = \int_0^t \langle g(s,x_1,0,\mathrm{X}(s)), \phi(x_1,0)\rangle ds + \\ + \int_0^t \langle h(s,x_1,0,\mathrm{X}(s)), \phi(x_1,0)\rangle * d\mathrm{X}(s). \tag{17}$$

Определение 6. Слабым решением задачи (13)–(14) в области $D \times [0, T]$ называется обобщенная функция $u(x, t)$ из класса $S'(R^d)$, удовлетворяющая уравнению (17) в области $D \times [0, T]$ и начальным условиям (14) на нижнем основании цилиндра S_T.

Определение 7. Слабым решением первой краевой задачи (13)–(15) в области $D \times [0, T]$ называется обобщенная функция $u(x, t)$ из класса $S'(R^d)$, удовлетворяющая уравнению (17) в области $D \times [0, T]$, начальным условиям (14) на нижнем основании цилиндра S_T и граничным условиям (15) на его боковой поверхности.

Задача (13)–(14) является обобщением задачи (7) в том смысле, что в правой части уравнения (13) в качестве шума по времени содержится формальная производная симметричного интеграла [10] (в случае, когда $X(t) = W(t)$ – траектория винеровского процесса, то формальная производная стохастического интеграла Стратоновича), в качестве шума по пространству – обобщенные функции g и h, которые могут быть как гауссовским шумом, рассмотренным в [14], так и функциями от траекторий винеровского процесса, фрактального броуновского движения, стационарных случайных процессов с непрерывными реализациями и так далее.

В настоящей работе показано, что существование и единственность слабых решений задач (13)–(14) и (13)–(15) вытекают из существования и единственности обобщенных решений задач с классическими дифференциальными уравнениями того же типа, что и исходное, не содержащих симметричных интегралов в правой части и на границе. В случае, когда в правой части дифференциального уравнения содержится только белый шум по времени $\frac{d}{dt}\mathrm{X}(t)$, действующий на гиперплоскости R^{d-1}, а функции g и h достаточно гладкие, предложенная в работе техника позволяет не только решатьзадачи типа (7), но и моделировать полученные вычисления в пакетах прикладных программ, например, в среде Matlab, тогда как численное решение и моделирование решений задач типа (7) в виде стохастических интегралов по мартингальным мерам весьма затруднительно.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассуждения для первой краевой задачи (13)–(15), приведенные ниже, будут справедливы также и для задачи (13)–(14). Модифицируем метод, предложенный в [10], и будем искать решение этих задач в виде

$$u(t,x) = \int_0^t p(s,x,\mathrm{X}(s))ds + u_0(x), \\ u(0,x) = u_0(x), u'_t|_{t=0} = \upsilon_0(x), \tag{18}$$

где функция $p = p(t, x, \upsilon) \in S'(R^d)$, $t \in R_+$, $x \in R^d$, $\upsilon \in R$, в обобщенном смысле дифференцируема по x и имеет совместно непрерывную производную $p''_{t,\upsilon}(t,x,\upsilon) = P''_{t,\upsilon}(t,\upsilon)$, функция $P(t, \upsilon) = \langle p(t, x, \upsilon), \phi(x)\rangle$ для любой $\phi \in S(R^d)$.

Подставив в уравнение (17) вместо функции $u(t, x)$ правую часть выражения (18), $\forall \phi(x) \in S(R^d)$ получим:

$$\begin{aligned}&\langle p(t,x,\mathrm{X}(t)) - p(0,x,\mathrm{X}(0)), \phi(x)\rangle = \\ &= \Big\langle \Big[-2a\int_0^t p(s,x,\mathrm{X}(s))ds - \\ &- b\int_0^t\int_0^s p(\tau,x,\mathrm{X}(\tau))d\tau ds - b\int_0^t u_0(x)ds + \\ &+ \int_0^t \Delta\Big(\int_0^s p(\tau,x,\mathrm{X}(\tau))d\tau\Big)ds + \\ &+ \int_0^t \Delta u_0(x)ds\Big], \phi(x)\Big\rangle + \\ &+ \Big\langle \int_0^t g(s,x_1,0,\mathrm{X}(s))\delta_0(x_2)ds, \phi(x)\Big\rangle + \\ &+ \int_0^t \langle h(s,x_1,0,\mathrm{X}(s))\delta_0(x_2), \phi(x)\rangle * d\mathrm{X}(s).\end{aligned} \tag{19}$$

Левую часть (19) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}&\langle p(t,x,\mathrm{X}(t)) - p(0,x,\mathrm{X}(0)), \phi(x)\rangle = \\ &= \langle p(t,x,\mathrm{X}(t)) - p(t,x,\mathrm{X}(0)) + \\ &+ p(t,x,\mathrm{X}(0)) - p(0,x,\mathrm{X}(0)), \phi(x)\rangle = \\ &= \int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(t)} \langle p(t,x,\upsilon), \phi(x)\rangle'_\upsilon d\upsilon + \\ &+ \int_0^t \langle p(s,x,\mathrm{X}(0)), \phi(x)\rangle'_s ds.\end{aligned} \tag{20}$$

Согласно формуле (12) для вычисления симметричного интеграла заменим интеграл в правой части уравнения (19) на выражение

$$\begin{aligned}&\int_0^t \langle h(s,x_1,0,\mathrm{X}(s))\delta_0(x_2), \phi(x)\rangle * d\mathrm{X}(s) = \\ &\int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(t)} \langle h(t,x_1,0,\upsilon)\delta_0(x_2), \phi(x)\rangle d\upsilon - \\ &- \int_0^t\int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(s)} \langle h(s,x_1,0,\upsilon)\delta_0(x_2), \phi(x)\rangle'_s d\upsilon ds\end{aligned} \tag{21}$$

и, подставив (20), (21) в соотношение (19), после некоторых алгебраических преобразований получим:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(t)} [\langle p(t,x,\upsilon), \phi(x)\rangle'_\upsilon - \langle h(t,x_1,0,\upsilon)\delta_0(x_2), \phi(x)\rangle] d\upsilon = \\ &\int_0^t \Big\{\Big\langle \Big[-2ap(s,x,\mathrm{X}(s)) - b\int_0^s p(\tau,x,\mathrm{X}(\tau))d\tau - bu_0(x) + \\ &+ \Delta\Big(\int_0^s p(\tau,x,\mathrm{X}(\tau))d\tau\Big) + \Delta u_0(x)\Big], \phi(x)\Big\rangle - \\ &- \langle p(s,x,\mathrm{X}(0)), \phi(x)\rangle'_s + \langle g(s,x_1,0,\mathrm{X}(s))\delta_0(x_2), \phi(x)\rangle - \\ &- \int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(s)} \langle h(s,x_1,0,\upsilon)\delta_0(x_2), \phi(x)\rangle'_s d\upsilon\Big\} ds.\end{aligned} \tag{22}$$

В целях упрощения опустим далее треугольные скобки в смысле применения функционалов к произвольным пробным функциям $\phi \in S(R^d)$.

Заметим, что правая часть равенства (22) является функцией ограниченной вариации по переменной t, в то время как левая — нет, следовательно, интегранды в обеих частях равенства (22) равны нулю [10]. Значит,

$$p'_\upsilon(s,x,\upsilon) = h(s,x_1,0,\upsilon)\delta_0(x_2), \tag{23}$$

$$\begin{aligned}&-2ap(s,x,\mathrm{X}(s)) - b\int_0^s p(\tau,x,\mathrm{X}(\tau))d\tau - bu_0(x) + \\ &+ \Delta\Big(\int_0^s p(\tau,x,\mathrm{X}(\tau))d\tau\Big) + \Delta u_0(x) - p'_s(s,x,\mathrm{X}(0)) + \\ &+ g(s,x_1,0,\mathrm{X}(s))\delta_0(x_2) - \int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(s)} h'_s(s,x_1,0,\upsilon)\delta_0(x_2)d\upsilon = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Согласно равенству (23), интеграл $\int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(s)} h'_s(s,x_1,0,\upsilon)\delta_0(x_2)d\upsilon$ в уравнении (24) может быть вычислен следующим образом:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(s)} h'_s(s,x_1,0,\upsilon)\delta_0(x_2)d\upsilon = \\ &= \int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(s)} p''_{\upsilon s}(s,x,\upsilon)d\upsilon = \\ &= p'_s(s,x,\mathrm{X}(s)) - p'_s(s,x,\mathrm{X}(0)).\end{aligned} \tag{25}$$

Из последних двух выражений получаем, что:

$$\begin{aligned}&p'_s(s,x,\mathrm{X}(s)) = -2ap(s,x,\mathrm{X}(s)) - \\ &- b\int_0^s p(\tau,x,\mathrm{X}(\tau))d\tau - \\ &- bu_0(x) + \Delta\Big(\int_0^s p(\tau,x,\mathrm{X}(\tau))d\tau\Big) + \Delta u_0(x) + \\ &+ g(s,x_1,0,\mathrm{X}(s))\delta_0(x_2).\end{aligned} \tag{26}$$

Проинтегрировав равенство (23), найдем структуру функции P:

$$p(s,x,\mathrm{X}(s)) = \mathrm{K}(s,x,\mathrm{X}(s)) + C(s,x), \tag{27}$$

где $\mathrm{K}(s,x,\mathrm{X}(s)) = \delta_0(x_2)\int_{\mathrm{X}(0)}^{\mathrm{X}(s)} h(s,x_1,0,\upsilon)d\upsilon$ – известная функция. Функция $C(s, x)$ – обобщенная функция из $S'(R^d)$, которая находится из уравнения (26) с начальным условием $p(0, x, X(0)) = \upsilon_0(x)$:

$$\begin{aligned}&\langle C'_s(s,x) + 2aC(s,x) + \\ &+ b\int_0^s C(\tau,x)d\tau + bu_0(x) - \\ &- \Delta\Big(\int_0^s C(\tau,x)d\tau\Big) - \Delta u_0(x), \phi(x)\rangle = \\ &= \langle \Phi(s,x,\mathrm{X}(s)), \phi(x)\rangle, \\ &C(0,x) = \upsilon_0(x),\end{aligned} \tag{28}$$

где Φ – известная функция:

$$\Phi(t,x,X(t)) = -K'_t(t,x,X(t)) - 2aK(t,x,X(t)) -$$
$$- b\int_0^t K(s,x,X(s))ds + \Delta\left(\int_0^t K(s,x,X(s))ds\right) +$$
$$+ g(t,x_1,0,X(t))\delta_0(x_2) = \Big[-\int_{X(0)}^{X(t)} h'_t(t,x_1,0,\upsilon)d\upsilon -$$
$$- 2a\int_{X(0)}^{X(t)} h(t,x_1,0,\upsilon)d\upsilon - b\int_0^t\int_{X(0)}^{X(s)} h(s,x_1,0,\upsilon)d\upsilon ds +$$
$$+ g(t,x_1,0,X(t))\Big]\delta_0(x_2) + \int_0^t\int_{X(0)}^{X(s)}\Big[h''_{x_1x_1}(s,x_1,0,\upsilon)\delta_0(x_2) +$$
$$+ h(s,x_1,0,\upsilon)(\delta_0(x_2))''_{x_2x_2}\Big]d\upsilon ds.$$

Воспользовавшись формулами [3] для вычисления производной дельта-функции

$$x\delta'_0(x) = -\delta_0(x),$$

$$\delta''_0(x) = -\left(\frac{\delta_0(x)}{x}\right)' = \frac{x\delta'_0(x) - \delta_0(x)}{x^2} = -2\frac{\delta_0(x)}{x^2},$$

получим:

$$\Phi(t,x,X(t)) = \Big[g(t,x_1,0,X(t)) - \int_0^{X(t)}\big[h'_t(t,x_1,0,\upsilon) +$$
$$+ 2ah(t,x_1,0,\upsilon)\big]d\upsilon - \int_0^t\int_0^{X(s)}\big[bh(s,x_1,0,\upsilon) -$$
$$- h''_{x_1x_1}(s,x_1,\upsilon) + 2h(s,x_1,0,\upsilon)/(x_2)^2\big]d\upsilon ds\Big]\delta_0(x_2). \tag{29}$$

Подставив выражение (27) в (18), получаем, что решение задачи (13)–(15) имеет вид:

$$u(t,x) = \int_0^t p(s,x,X(s))ds + u(0,x) = \\ = \int_0^t K(s,x,X(s))ds + \widetilde{C}(t,x), \tag{30}$$

где

$$\widetilde{C}(t,x) = \int_0^t C(s,x)ds + u(0,x),\ \widetilde{C}(0,x) = u(0,x). \tag{31}$$

Переписав уравнение (28) в терминах $\widetilde{C}(t,x)$ с начальными и граничными условиями, получим аналог первой краевой задачи (13)–(15), в отличие от которой в правой части уже не будет «шума» в виде симметричного интеграла или его производной:

$$\left\langle \widetilde{C}''_{tt} + 2a\widetilde{C}'_t + b\widetilde{C} - \Delta\widetilde{C}, \phi(x)\right\rangle = \\ = \left\langle \Phi(t,x,X(t)), \phi(x)\right\rangle,\ x \in D,\ t \in [0,T] \tag{32}$$

$$\widetilde{C}(0,x) = u_0(x),\ \widetilde{C}'_t\big|_{t=0} = \upsilon_0(x),\ x \in D \cup S_T, \tag{33}$$

$$\widetilde{C}(t,x)\Big|_{x\in S_T} = \mu(t) - \int_0^t K(s,x,X(s))ds\Big|_{x\in S_T}, \\ t \in [0,T], \tag{34}$$

где функция $\Phi(t, x, X(t))$ в правой части находится по формуле (29).

В связи с тем, что в задаче (32)–(34) содержатся обобщенные функции, ее решение также следует искать в классе обобщенных функций [3, 8].

Таким образом, решение краевой задачи (13)–(15) для дифференциального уравнения в частных производных гиперболического типа с шумом в правой части, сконцентрированным на гиперплоскости и содержащим формальные производные симметричного интеграла [10] (детерминированного аналога стохастического интеграла Стратоновича), сводится к решению обобщенной краевой задачи (32)–(34) с обычным дифференциальным уравнением, не содержащим симметричные интегралы, с функциями от произвольных непрерывных функций (в частности, реализаций винеровского процесса) в правой части и на границе. Следовательно, решив задачу (32)–(34) с помощью стандартных численно-аналитических методов математической физики (см., например, [4], [5], [8]), мы найдем решение исходной краевой задачи (13)–(15).

Замечание. В случае, когда в уравнении (13) функции $g = 0$, $h = 1$, $X(t)$ – траектория стандартного винеровского процесса, начальные условия $u_0(x) = 0$, $\upsilon_0(x) = 0$, задача (13)–(14) сводится к задаче (9). Ранее ее решение было получено в виде стохастического интеграла по мартингальной мере типа Уолша (11) (см. [12], [14]).

4. ПРИМЕР

Рассмотрим частный случай первой краевой задачи (13)–(15), где в правой части находится только временной шум, $x = (x_1, x_2) \in R \times R$:

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{x_1x_1} - u''_{x_2x_2} = \big[4W(t)\sin(x_1) + \\ + \sin(t)W'(t)\cos(x_1)\big]\delta_0(x_2), \\ (x_1,x_2) \in (-0.1;0.1)\times(-0.1;0.1),\ t \in (0,1), \\ u(0,x) = 0,\ u'_t\big|_{t=0} = 0,\ x \in [-0.1;0.1]\times[-0.1;0.1], \\ u(t,-0.1,x_2) = u(t,0.1,x_2) = 0, \\ u(t,x_1,-0.1) = u(t,x_1,0.1) = 0,\ t \in [0;1], \end{cases} \tag{35}$$

где в качестве произвольной непрерывной функции неограниченной вариации $X(t)$ в уравнение входит траектория стандартного винеровского процесса $W(t) = W(t, \omega)$, $W(0) = 0$, $t \in [0; +\infty]$, заданного на вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, F, (F_t), P)$ [1, 2]. Подобную краевую задачу можно поставить для мембраны, случайная сила на которую воздействует перпендикулярно поверхности вдоль полосы, шириной которой можно пренебречь. Согласно изложенному выше методу, решение задачи (35) представляется в виде:

$$u(t,x) = \cos(x_1)\delta_0(x_2)\int_0^t W(s)\sin(s)ds + \widetilde{C}(t,x), \tag{36}$$

где неизвестная функция $\tilde{C}(t,x)$ находится из краевой задачи

$$\begin{cases} \tilde{C}''_{tt} - \tilde{C}''_{x_1x_1} - \tilde{C}''_{x_2x_2} = 4W(t)\sin(x_1)\delta_0(x_2) - \\ -\delta_0(x_2)[W(t)\sin(t)\cos(x_1) - \\ -\cos(x_1)(1+2/x_2^2)\int_0^t W(s)\sin(s)ds], \\ (x_1,x_2) \in (-0.1;0{,}1)\times(-0.1;0.1), t\in(0;1), \\ \tilde{C}(0,x)=0, \tilde{C}'_t|_{t=0}=0, \\ (x_1,x_2)\in[-0.1;0.1]\times[-0.1;0.1], \\ \tilde{C}(t,x)|_{(x)\in S} = -\cos(x_1)\delta_0(x_2)\int_0^t W(s)\sin(s)ds|_{(x)\in S}, \\ t\in[0;1]. \end{cases} \quad (37)$$

Для того, чтобы решить численно задачу (37), дискретизируем ее. Вместо дельта-функции Дирака $\delta_0(x_2)$ перейдем к обычной непрерывной функции (или точнее, дельтаобразной последовательности непрерывных функций, сходящейся к функции Дирака равномерно на любом конечном отрезке [9]). В результате от обобщенной задачи (37) мы перейдем к классической, для которой существуют хорошо разработанные методы для численно-аналитического решения и моделирования полученных вычислений в пакетах прикладных программ.

При моделировании правой части и граничных условий первой краевой задачи (37) заменим значение дельта-функции Дирака в точках сетки $\{x_j^i = i_j\Delta x_j\}$, $i_j = \overline{0,\mathrm{N}_{x_j}}$, $\Delta x_j = l/\mathrm{N}_{x_j}$, $j=1{,}2$, выражением

$$\delta_0^{\mathrm{N}_{x_2}}(x_2) \approx \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x_2}, x_2 = 0, \\ 0, x_2 \neq 0. \end{cases} \quad (38)$$

Построим конечно-разностную схему задачи (37) для $x = (x_1, x_2) \in [0, l] \times [0, l]$, $t \in [0, T]$, которая реализует принципы построения численных решений подобных задач в среде Matlab. Введем расчетную сетку $\{t^k = k\Delta t, x_j^i = i_j\Delta x_j\}$, $k = \overline{0,\mathrm{N}_t}$, $i_j = \overline{0,\mathrm{N}_{x_j}}$, $\Delta t = \mathrm{T}/\mathrm{N}_t$, $\Delta x_j = l/\mathrm{N}_{x_j}$, $j=1{,}2$, $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2)$. Построим первую краевую разностную задачу:

$$\frac{c_i^{k+1} - 2c_i^k + c_i^{k-1}}{\Delta t^2} + 2a\frac{c_i^{k+1} - c_i^k}{\Delta t} + \\ + bc_i^k - \frac{c_{i+1}^k - 2c_i^k + c_{i-1}^k}{\Delta x^2} = \Phi_i^k, \quad (39)$$

где $\Phi_i^k = \Phi(t^k, x^i, \mathrm{X}(t^k))$ – значения правой части (32) на точках сетки, $i = (i_1, i_2)$, $i_j = \overline{0,\mathrm{N}_{x_j}}$, $k = \overline{0,\mathrm{N}_t}$, $j = 1{,}2$. Аппроксимируем начальные и граничные условия:

$$c_i^0 = u_0(0, i\Delta x),\ \frac{c_i^1 - c_i^{-1}}{2\Delta t} = \upsilon_0(x^i),\ i = (i_1, i_2), \quad (40)$$

$$c_0^k = \mu_1(t^k, \mathrm{X}(t^k)),\ c_{\mathrm{N}_x}^k = \mu_2(t^k, \mathrm{X}(t^k)),\ k = \overline{0,\mathrm{N}_t}. \quad (41)$$

Заметим, что c_i^{-1} в выражении (40) – это формальная запись, значение c_i^{-1} вычисляется из этого начального условия.

Исследуем устойчивость численной схемы по методу Фурье [5]. Подставив в нашу разностную схему решение вида $c_j^k = \lambda^k e^{ij\xi}$, где $\xi = m\Delta x$, $m \in R$, получим характеристическое уравнение $\lambda^2 + z_1\lambda + z_2 = 0$, где

$$z_1 = -\frac{1}{1+2a\Delta t}(2r_x\cos\xi + 2r_1),\quad z_2 = \frac{1}{1+2a\Delta t}.$$

В частности, если строить численную схему для однородного волнового уравнения при, a = = b = 0 получим уравнение на λ:

$$\lambda^2 + 2[r_x(1-\cos\xi) - 1]\lambda + 1 = 0,$$

решая которое, находим условие устойчивости численной схемы: $r_x \le \dfrac{1}{1-\cos\xi}$, значит, $r_x = \dfrac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \le 1$, решение устойчиво [26].

Краевую задачу (37) будем решать численно с помощью пакета прикладных программ Matlab, используя вышеприведенную конечно-разностную схему. В результате проделанных вычислений получим решение краевой задачи (37), а затем по формуле (36) перейдем к решению задачи (35), графики которого в разные моменты времени приведены ниже (рис. 1, 2).

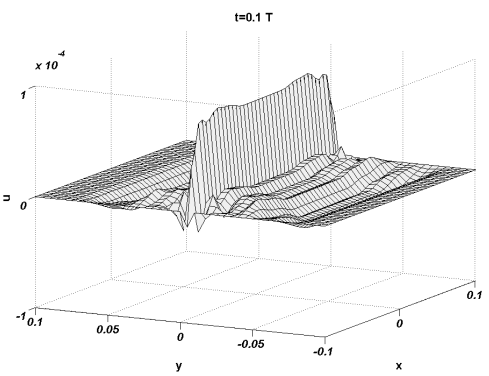

Рис. 1. График решения задачи (35) в момент времени t = 0,1

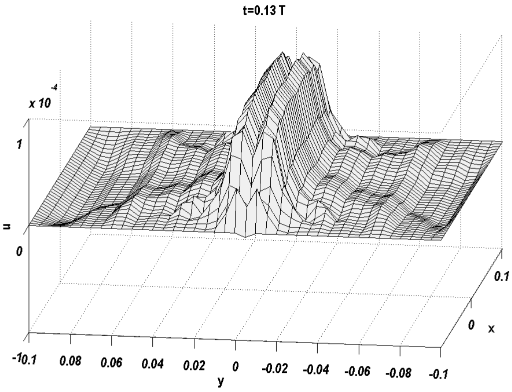

Рис. 2. График решения задачи (35)
в момент времени t = 0,13

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стохастическое исчисление / С. В. Анулова [и др.] // ВИНИТИ. 1989. Т. 49. С. 5–260.

2. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 408 с.

3. **Владимиров В. С.** Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 320 с.

4. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. 320 с.

5. **Ворожцов Е. В.** Разностные методы решения задач механики сплошных сред: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1998. 86 с.

6. **Захарова О. В.** Аналог формулы Даламбера для решения задачи Коши колебания бесконечной струны под действием случайной внешней силы // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16, В. 2. С. 261–262.

7. **Захарова О. В.** Математическое моделирование некоторых колебательных процессов в среде со случайными возмущениями: дис. канд. физ.-мат. наук. Уфа.: УГАТУ, 2009. 120 с.

8. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

9. **Микусинский Я., Сикорский Р.** Элементарная теория обобщенных функций. Т. 1. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. 79 с.

10. **Насыров Ф. С.** Симметричные интегралы и стохастический анализ // Теория вероятностей и ее применение. 2006. Т. 51, № 3. С. 496–517.

11. **Alos E., Bonnacorsi S.** Stochastic partial differential equations with Dirichlet white-noise boundary conditions // Ann. Inst. H. Poincare. Probab. Statist. 2002. Vol. 38(2). P. 125–154.

12. **Dalang R. C.** Extending the martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous SPDE's // Electronic Journal of Probability. 1999. Vol. 4, Article Nr 6.

13. **Dalang R. C., Frangos N. E.** The stochastic wave equation in two spatial dimensions // Ann. Prob. 1998. Vol. 26(1). P. 187–212.

14. **Dalang R.C. Leveque O.** Second-order hyperbolic SPDE's driven by homogeneous gaussian noise on a hyperplane // Transactions of the AMS. 2006. Vol. 358, № 5. P. 2123–2159.

15. **Dawson D. A., Salihi H.** Spatially homogeneous randow evolutions // J. Mult. Anal. 1980. Vol. 7. P. 141–180.

16. **Da Prato G., Zabczyck J.** Evolution equations with white-noise boundary conditions // Stoch. and Stoch. Reports. 1993. Vol. 42. P. 167–182.

17. **Mao X., Markus L.** Wave equation with stochastic boundary values // J. Math. Anal. and Appl. 1993. Vol. 177. P. 315–341.

18. **Millet A., Sanz-Sole M.** A stochastic wave equation in two space dimension: smoothness of the law // Ann. Prob. 1999. Vol. 27(2). P. 803–844.

19. **Millet A., Sanz-Sole M.** Approximation and support theorem for a wave equation in two space dimensions // Bernoulli. 2000. Vol. 6(5). P. 887–915.

20. **Mueller C.** Long time existence for the wave equation with a noise term // Ann. Prob. 1997. Vol. 25(1). P. 133–151.

21. **Neveu J.** Processus aleatoires gaussiens // Presses de l'Universite de Montreal, 1968.

22. **Peszat S.** The Cauchy problem for a nonlinear stochastic wave equation in any dimension // J. Evol. Eq. 2002. Vol. 2. P. 383–394.

23. **Peszat S., Zabczyck J.** Nonlinear stochastic wave and heat equations // Prob. Th. and Rel. Fields. 2000. Vol. 116. P. 421–443.

24. **Walsh J. B.** An introduction to stochastic partial differential equations // Ecole d'ete deprobabilites de Saint-Flour XIV, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, 1984.

25. **Wilcox C. H.** The Cauchy problem for the wave equation with distribution data: an elementary approach // The American Mathematical Society Monthly. 1991. Vol. 98. P. 401–47.

26. Applied numerical methods using Matlab / W. Yang [et al.]. Canada: John Wiley & Sons, Inc. 2005. 518 p.

ОБ АВТОРЕ

Гапечкина Екатерина Викторовна, асп. каф. математики. Дипл. магистр прикл. матем. и информатики (2008). Иссл. в обл. стохастического анализа и теории дифференциальных уравнений.