

Ю. С. Первушин, П. В. Соловьев

## НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ БАЛОЧНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ НЕСБАЛАНСИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ ИЗГИБЕ

Рассматривается влияние несбалансированности структуры слоистых композитов, вызванной технологическими отклонениями углов укладки слоев, на напряженно-деформированное состояние балочных стержневых элементов при изгибе. Влияние несбалансированности анализируется на двухопорной и консольной балках, находящихся под действием распределенной нагрузки, при разных числах слоев. Приведены результаты деформированного состояния и напряженного состояния в наиболее нагруженных слоях. *Композит; слой; несбалансированность; напряжение; деформация*

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При изготовлении стержневых элементов из слоистых композитов может иметь место несбалансированность структуры, вызванная несовершенствами технологического характера, которые заключаются в отклонении углов укладки слоев от заданных.

Несбалансированное состояние приводит к непрогнозируемому деформационному поведению слоистых балочных конструкций, которое характеризуется тем, что наряду с изгибом имеет место кручение.

Рассматриваются слоистые балки из несбалансированного композиционного материала, структура которых удовлетворяет следующим предпосылкам:

- композит имеет одну срединную плоскость, параллельную плоскости укладки слоев, относительно которой физико-механические свойства отдельных слоев могут быть несимметричны; в каждом слое имеется одна плоскость упругой симметрии, параллельная данной;
- слоистый композит в целом и каждый слой в отдельности подчиняются обобщенному закону Гука;
- адгезия слоев абсолютна;
- выполняется гипотеза Кирхгофа о прямых нормалях.

### 2. РАСЧЕТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

Рассмотрим характер влияния несбалансированности композита на его напряженно-деформированное состояние.

Расчетные зависимости по определению напряженного и деформированного состояния сбалансированных и несбалансированных

структур взяты из источников [1, 3]. В источнике [3] рассматривается поведение несбалансированных слоистых структур только в случае растяжения. Ниже проанализировано влияние несбалансированности на стержневые конструкции при изгибе.

Деформации произвольного  $k$ -го слоя  $\epsilon_1^{(k)}$ ,  $\epsilon_2^{(k)}$  и  $\epsilon_6^{(k)}$  в зависимости от расстояния  $z$  от срединной плоскости выражаются через деформации срединной плоскости  $\epsilon_1^{(0)}$ ,  $\epsilon_2^{(0)}$ ,  $\epsilon_6^{(0)}$  и кривизны изгиба  $K_1$ ,  $K_2$  и кручения  $K_6$ :

$$\begin{aligned}\epsilon_1^{(k)} &= \epsilon_1^{(0)} + zK_1, \\ \epsilon_2^{(k)} &= \epsilon_2^{(0)} + zK_2, \\ \epsilon_6^{(k)} &= \epsilon_6^{(0)} + zK_6,\end{aligned}\quad (1)$$

Обобщенный закон Гука для  $k$ -го элементарного слоя при плоском напряженном состоянии имеет вид

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}^{(k)}. \quad (2)$$

Из зависимости (2) с учетом равенств (1) получим

$$\epsilon_j^{(0)} + zK_j = S_{ji}^{(k)} \sigma_i^{(k)}, \quad (j, l = 1, 2, 6). \quad (3)$$

Из уравнений (3) находим

$$\sigma_i^{(k)} = \bar{Q}_{ij}^{(k)} (\epsilon_j^{(0)} + zK_j), \quad (4)$$

где  $\bar{Q}_{ij}^{(k)} = (S_{ij}^{(k)})^{-1}$  – матрица жесткости  $k$ -го слоя:

$$\bar{Q}_{ij}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & \bar{Q}_{12}^{(k)} & \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} & \bar{Q}_{22}^{(k)} & \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} & \bar{Q}_{26}^{(k)} & \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Деформации срединной плоскости  $\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}, \varepsilon_6^{(0)}$  и кривизны  $K_1, K_2, K_6$  не зависят от координаты  $z$ , поэтому выражения усредненных напряжений  $\sigma_l$  и моментов  $M_l$  ( $l = 1, 2, 6$ ) будут иметь вид [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_l &= A_{ij} \varepsilon_j^{(0)} + B_{ij} K_j, \\ M_l &= B_{ij} \varepsilon_j^{(0)} + D_{ij} K_j, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz, \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z dz, \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz. \end{aligned} \quad (7)$$

Из системы уравнений (6) находим деформации и кривизны срединной плоскости в виде

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_j^{(0)} \\ K_l^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{jk} & b_{jk} \\ c_{lk} & d_{lk} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_l \\ M_k \end{bmatrix}, \quad (j, k, l = 1, 2, 6), \quad (8)$$

где  $a_{jk}, b_{jk}, c_{lk}, d_{lk}$  – выражаются через характеристики элементарных слоев (7).

Матрица податливости (8) является симметричной относительно главной диагонали и  $c_{lk} = b_{jk}$ .

Выражения для напряжений  $\sigma_l^{(k)}$  в  $k$ -м слое имеют вид:

$$\sigma_l^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}^{(k)} & \bar{Q}_{12}^{(k)} & \bar{Q}_{16}^{(k)} \\ \bar{Q}_{12}^{(k)} & \bar{Q}_{22}^{(k)} & \bar{Q}_{26}^{(k)} \\ \bar{Q}_{16}^{(k)} & \bar{Q}_{26}^{(k)} & \bar{Q}_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0^{(1)} + z_k K_1 \\ \varepsilon_2^{(1)} + z_k K_2 \\ \varepsilon_6^{(1)} + z_k K_6 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

### 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Рассмотрим влияние несбалансированности на напряженное состояние и деформационное поведение двухопорной и консольной балок из девятислойного углепластика (рис. 1, 2).

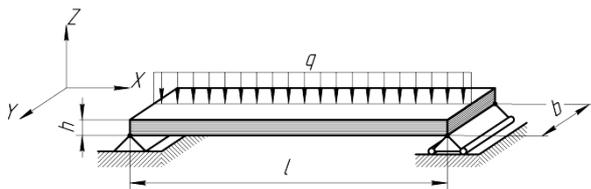


Рис. 1. Расчетная схема двухопорной слоистой композитной балки

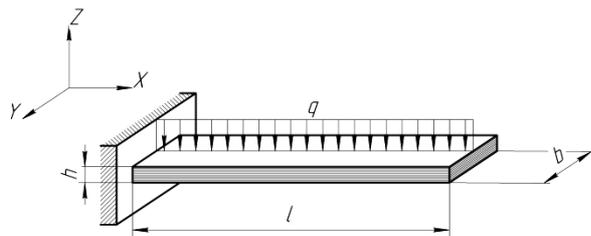


Рис. 2. Расчетная схема консольной слоистой композитной балки

Исходные данные:

- толщина слоя  $h_c = 0,25$  мм;
- количество слоев  $n = 9$ ;
- толщина слоистого пакета  $h = h_c \cdot n = 0,25 \cdot 9 = 2,25$  мм,
- ширина балки  $b = 10$  мм;
- длина балки  $l = 100$  мм;
- распределенная нагрузка

•  $q = 0,05$  Н/мм;

Характеристики армирующего материала:

1) углеродные нити

- $E_{B1} = 300$  ГПа;
- $E_{B2} = 9$  ГПа;
- $G_{B12} = 12$  ГПа;
- $\nu_B = 0,15$ ;

2) стеклянные нити

- $E_{B1} = E_{B2} = 70$  ГПа;
- $G_{B12} = 40$  ГПа;
- $\nu_B = 0,22$ ;

Характеристики матрицы:

– эпоксидная смола

- $E_M = 4,0$  ГПа;
- $G_M = 1,0$  ГПа;
- $\nu_B = 0,35$ .

Коэффициент армирования  $\psi = 0,7$ .

Решение поставленной задачи производилось в программном комплексе ANSYS.

Исходными данными для расчета являются упругие характеристики элементарного слоя. Каждый элементарный слой является ортотропным и характеризуется следующими упругими постоянными:

- $E_x, E_y, E_z$  – модули упругости композиционного материала в направлениях осей  $X, Y$  и  $Z$  соответственно;

- $G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$  – модули сдвига в плоскостях  $XY, YZ$  и  $XZ$  соответственно;

- $\nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}$  – коэффициенты Пуассона (первый индекс обозначает направление действия силы, второй – направление поперечной деформации).

Упругие характеристики однонаправленного слоя рассчитывались по методу [2] и представлены в табл. 1.

Таблица 1

**Упругие характеристики однонаправленного слоя**

Характеристика	Углепластик	Стеклопластик
$E_x$	211 ГПа	50,2 ГПа
$E_y$	6,55 ГПа	11,8 ГПа
$G_{xy}$	2,79 ГПа	3,15 ГПа
$\nu_{xy}$	0,21	0,26

Исследование напряженного и деформированного состояния балок проводилось под действием поверхностной распределенной нагрузки, эквивалентной распределенной нагрузке по линии, показанной на рис. 1 и 2.

Определение прогибов проводилось в сечениях наибольших перемещений.

Схема укладки слоев в рассматриваемых композитных балках в сбалансированном состоянии: 45/-45/30/-30/0/-30/30/-45/45.

Несбалансированные структуры, вызванные нарушением углов укладки внешнего слоя (слой № 9), следующие:

45/-45/30/-30/0/-30/30/-45/35;

45/-45/30/-30/0/-30/30/-45/38;

45/-45/30/-30/0/-30/30/-45/40;

45/-45/30/-30/0/-30/30/-45/42.

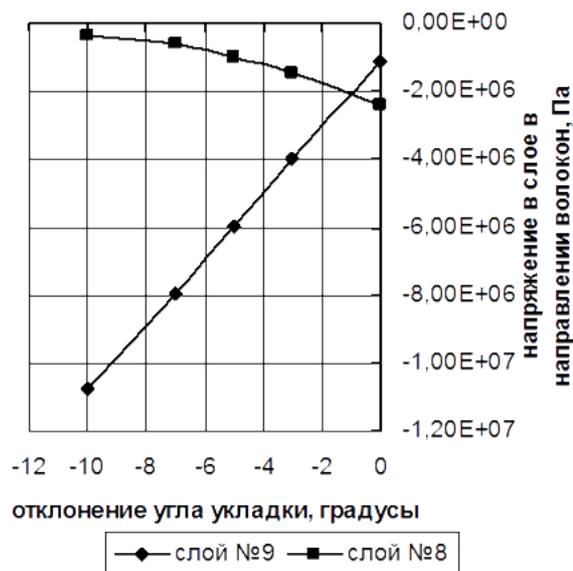
Зависимость прогиба двухопорной девятислойной балки из углепластика от величины отклонения угла укладки внешнего слоя выглядит следующим образом (рис. 3).



**Рис. 3.** Зависимость прогиба двухопорной девятислойной балки из углепластика от величины отклонения угла укладки девятого слоя от сбалансированного состояния (45°) в сторону уменьшения

Характер изменения напряжений в крайних слоях наиболее напряженного сечения данной балки представлен на рис. 4.

Для девятислойной консольной балки из углепластика зависимости прогибов и напряжений от угла укладки исследуемого слоя выглядят так (рис. 5, 6).



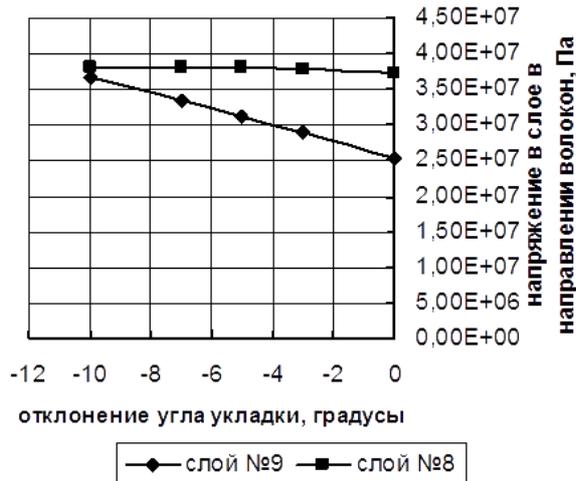
**Рис. 4.** Зависимость нормальных напряжений в слоях двухопорной девятислойной балки из углепластика от отклонения угла укладки девятого слоя от сбалансированного состояния (45°) в сторону уменьшения



**Рис. 5.** Зависимость прогиба консольной девятислойной балки из углепластика от отклонения угла укладки девятого слоя от сбалансированного состояния (45°) в сторону уменьшения

Для выявления влияния числа слоев на величину изменения прогибов, были рассмотрены пятислойная, тринадцатислойная, семнадцатислойная балки из углепластика в двухопорном и консольном вариантах закрепления.

Графики зависимостей прогибов и напряжений для пятислойной балки из углепластика при двухопорном и консольном закреплении от величины отклонений угла укладки внешнего слоя приведены на рис. 7–10.



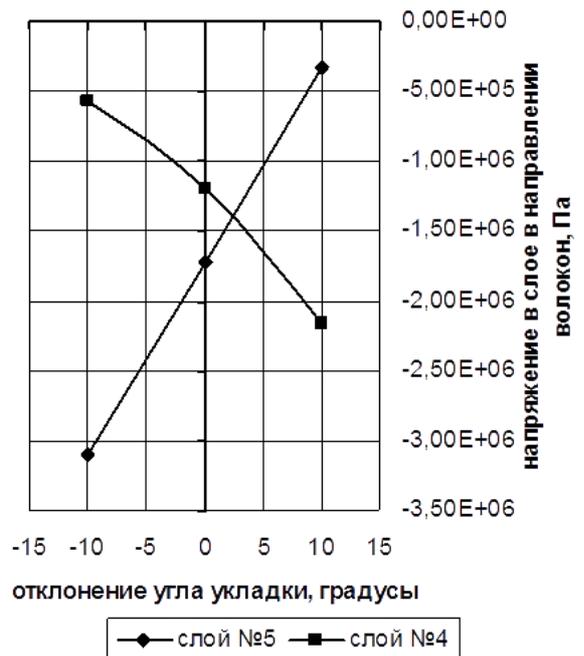
**Рис. 6.** Зависимость нормальных напряжений в слоях элемента, расположенного в сечении заделки, консольной девятислойной балки из углепластика от отклонения угла укладки девятого слоя от сбалансированного состояния ( $45^\circ$ ) в сторону уменьшения



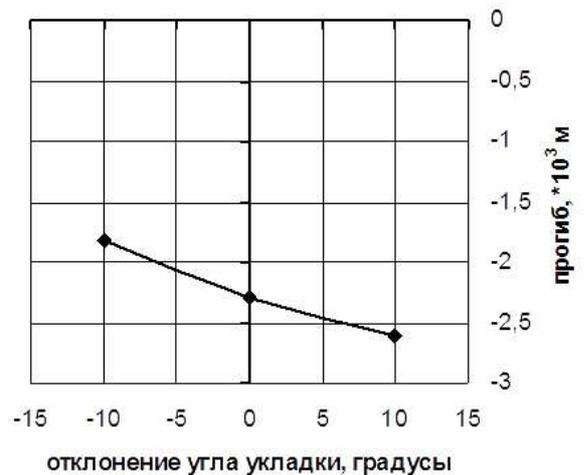
**Рис. 7.** Зависимость прогиба двухопной пятислойной балки из углепластика от отклонения угла укладки пятого слоя от сбалансированного состояния ( $45^\circ$ )

Для тринадцатислойных и семнадцатислойных углепластиковых балок графики зависимостей не приводятся, так как они качественно схожи с графиками, приведенными выше для девятислойных углепластиковых балок.

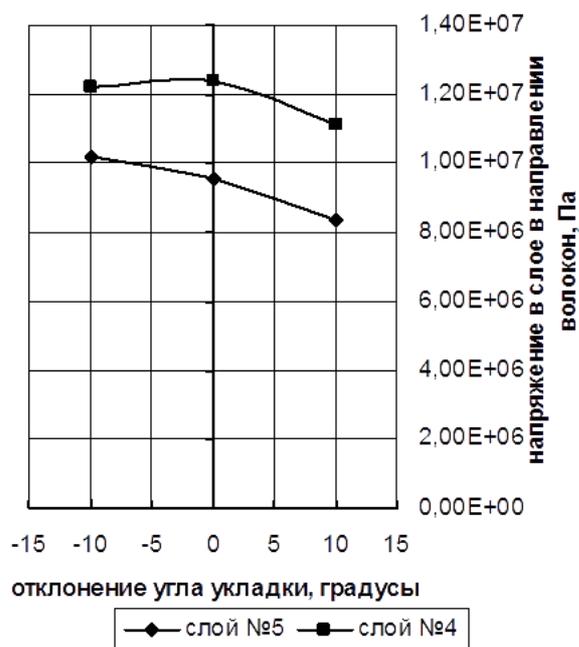
Ниже приведена зависимость относительного изменения прогиба несбалансированных балок по сравнению со сбалансированными структурами (табл. 2).



**Рис. 8.** Зависимость нормальных напряжений в слоях двухопной пятислойной балки из углепластика от отклонения угла укладки пятого слоя от сбалансированного состояния ( $45^\circ$ )



**Рис. 9.** Зависимость прогиба консольной пятислойной балки из углепластика от отклонения угла укладки пятого слоя от сбалансированного состояния ( $45^\circ$ )



**Рис. 10.** Зависимость нормальных напряжений в слоях элемента, расположенного в сечении заделки, консольной пятислойной балки из углепластика от отклонения угла укладки исследуемого внешнего слоя

Таблица 2

**Изменение прогибов несбалансированных структур композитных балок по отношению к сбалансированному состоянию**

Количество слоев	Вариант закрепления	Изменение прогиба при $\Delta\varphi = -10^\circ$ , %	Изменение прогиба при $\Delta\varphi = +10^\circ$ , %
5	двухопорное	29	11
	консольное	21	14
9	двухопорное	15	6
	консольное	10	3
13	двухопорное	10	8
	консольное	8	5
17	двухопорное	7	7
	консольное	6	4
9 (стеклопластик)	двухопорное	11	1
	консольное	9	2

Изменение прогиба вычислялось по формуле

$$\Delta U = \frac{U_{\text{сбал}} - U_{\text{несбал}}}{U_{\text{сбал}}} \cdot 100\%, \quad (10)$$

где  $U_{\text{сбал}}$  – прогиб балки в сбалансированном состоянии, а  $U_{\text{несбал}}$  – прогиб балки в несбалансированном состоянии соответственно.

Из табл. 2 видно, что при увеличении числа слоев величина изменения прогиба уменьшается. При отклонении угла укладки внешнего слоя консольной балки, находящейся под действием поперечной нагрузки, имеет место кручение. С увеличением числа слоев влияние несбалансированности уменьшается.

### ВЫВОД

Нарушение сбалансированности углепластиковых слоистых структур балочных элементов из КМ, вызванное отклонениями углов укладки слоев от расчетных, приводит к изменению как деформационного поведения, так и напряженного состояния. Изменение зависит от величин отклонений углов укладки, числа слоев и граничных условий закрепления балок. При числе слоев  $\geq 13$  влияние отклонений углов укладки в пределах  $\pm 5^\circ$  на величину максимального прогиба незначительно (не превышает 5%).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роценс К.А., Штейнерс К.Н. Оценка податливости и жесткости несбалансированных моноклинических композиций // Механика полимеров, 1976. №6. С. 1030-1035.
2. Первушин Ю. С., Жернаков В. С. Основы механики, проектирования и технологии изготовления изделий из слоистых композиционных материалов: учеб. пособие. Уфа, 2008. 303 с.
3. Первушин Ю. С. Влияние несбалансированности структуры слоистых композиционных материалов на напряженно-деформированное состояние стержневых элементов // Вестник УГАТУ. 2010. № 2. С. 56–59.

### ОБ АВТОРАХ

**Первушин Юрий Сергеевич**, проф. каф. сопр. материалов. Дипл. инж.-мех. (УАИ, 1958). Д-р техн. наук по динамике и прочности машин и аппаратов (Челяб. политехн. ин-т, 1991). Иссл. в обл. мех-ки и термомех-ки композиц. материалов.

**Соловьев Павел Владимирович**, асп. каф. авиац. двиг. Дипл. инж. (УГАТУ, 2009).