УДК 517.9

Приближенное стационарное дробно-дифференциальное уравнение радиальной фильтрации

М. П. Чунарёва

mchunaryeva@gmail.com

ФГБОУ ВО «Уфимский государственный авиационный технический университет» (УГАТУ)

Аннотация. Для дробно-дифференциальной модели радиальной фильтрации строится приближение в виде дифференциального уравнения с малым параметром, выделенным из порядка дробного дифференцирования. Для построенного приближенного уравнения находятся приближенные симметрии и интегрирующий множитель.

Ключевые слова: уравнение фильтрации; дробная производная; малый параметр; приближенная симметрия; интегрирующий множитель.

ВВЕДЕНИЕ

Концепция групп преобразований для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, а также уравнений в частных производных была впервые использована выдающимся норвежским математиком Софусом Ли. Им были сформулированы основы группового анализа [1], мощный аппарат которого является единственным универсальным методом, позволяющим решать нелинейные дифференциальные уравнения аналитически.

После развития основ теории дробного интегро-дифференцирования [2], внимание было переключено на его практическое применение. Задача моделирования аномальных процессов, протекающих в сложных структурах, описывается именно дробно-дифференциальными уравнениями. Поэтому закономерно, что разработка методов исследования качественных свойств нелинейных дробно-дифференциальных моделей является актуальной задачей. На данный момент базовые методы группового анализа, как эффективного аппарата в области решения дифференциальных уравнений, были успешно распространены на уравнения с различными видами дробных производных [3, 4].

Однако допускаемая дробно-дифференциальными уравнениями группа точечных преобразований, почти всегда, оказывается меньше группы аналогичного уравнения с производными целого порядка. Одним из возможных подходов к нахождению дополнительных симметрий является переход к их приближенным аналогам [5, 6].

Целью данной работы является построение приближенного аналога для дробно-дифференциального уравнения фильтрации и нахождение приближенной группы преобразований этого уравнения на основе известной точной группы, также используется методика нахождения интегрирующего множителя через сопряженное уравнение [7].

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается стационарное уравнение радиальной фильтрации

$$ {}_0D_x^{\alpha}\left(x^{\alpha-1}\,{}_x^{C}D_{\infty}^{\alpha}y\right)=0, \qquad \alpha\in(0,1), \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, государственное задание № 1.3103.2017/4.6.

где $y = y(x)$, ${}_0D_x^\alpha y$ — левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля [2] порядка α, ${}_x^CD_\infty^\alpha y$ — правосторонняя дробная производная Капуто [2] порядка α. Решается задача построения приближенного аналога для уравнения (1) при $\alpha = 1 - \varepsilon$, где ε – малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$).

Разложение левосторонней дробной производной Римана-Лиувилля в ряд по малому параметру известно [5] и имеет вид

$$
{}_0D_x^{1-\varepsilon} f(x) = f' - \varepsilon\left[\frac{f}{x} + f'(\psi(2) - \ln x) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-x)^{k-1}}{(k-1)k!} D_x^k f\right] + O(\varepsilon^2), \quad (2)
$$

где $\psi(2) = 1 - \gamma$ и $\gamma \approx 0{,}577\ldots$ – постоянная Эйлера.

Используя разложение (2), левую часть уравнения (1) при $\alpha = 1 - \varepsilon$ можно представить как

$$
{}_0D_x^{1-\varepsilon}\left(x^{-\varepsilon}\,{}_x^CD_\infty^{1-\varepsilon} y\right) = (-\varepsilon)x^{-1-\varepsilon}\,{}_x^CD_\infty^{1-\varepsilon} y + x^{-\varepsilon}\frac{d}{dx}\left({}_x^CD_\infty^{1-\varepsilon} y\right) - \varepsilon\left[-\frac{y'}{x} + (1 - \gamma - \ln x)y'' - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-x)^{k-1} D_x^{k+1} y}{(k-1)k!}\right].
$$

Разложение дробной производной Капуто в ряд по малому параметру известно только для левосторонней производной по конечному отрезку, поэтому выполним замену независимой переменной $x = \frac{1}{\xi}$. Тогда

$$
{}_x^CD_\infty^\alpha y = -\xi^\alpha\,{}_0^CD_\xi^\alpha(\xi^\alpha z) + \alpha\xi^\alpha\,{}_0I_\xi^{1-\alpha}(\xi^{\alpha-1} z),
$$

где $z(\xi) = y\left(\frac{1}{\xi}\right)$.

Теперь можно воспользоваться разложением [5]:

$$
{}_0^CD_x^{1-\varepsilon} f(x) = f' - \varepsilon\left[f'(\psi(2) - \ln x) - \frac{f - f(0)}{x} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-x)^{k-1} D_x^k f}{(k-1)k!}\right] + O(\varepsilon^2). \quad (3)
$$

Разложение левостороннего дробного интеграла дано в [2]:

$$
{}_0I_\xi^\varepsilon f(x) = f(x) + \varepsilon\left[\gamma f(x) + \frac{d}{dx}\int_0^x \ln(x - t) f(t)\,dt\right] + O(\varepsilon). \quad (4)
$$

Теперь представим интеграл из формулы (4) тоже в виде ряда. Для этого необходимо разложить подинтегральную функцию в ряд Тейлора и произвести обратную замену переменных $\xi = \frac{1}{x}$ с использованием соотношения

$$
z^{(n)}(\xi) = (-1)^n x^n n!\,(n-1)! \times \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k y^{(k)}}{(n-k)!\,k!\,(k-1)!}.
$$

Имеем

$$
\int_0^\xi \ln(\xi - t)\, z(t)\,dt = \frac{y}{x} + \frac{y \ln x}{x} + \ln x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k+1} \times \sum_{m=1}^{k} \frac{x^{m-1} y^{(m)}}{(k-m)!\,m!\,(m-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{(k+1)^2} \sum_{m=1}^{k} \frac{x^{m-1} y^{(m)}}{(k-m)!\,m!\,(m-1)!}. \quad (5)
$$

Используя разложения (3)-(5) и учитывая, что $x^{-\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon \ln x + O(\varepsilon^2)$, после преобразований находим окончательный вид приближенного к (1) уравнения:

$$
F \equiv y'' + \varepsilon\left[2\frac{y'}{x} + 2y''(\gamma - 1 + \ln x) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k-1} D_x^{k+1} y}{(k-1)k!} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{k} \binom{k-2}{m-2} \frac{x^{m-2} D_x^m y}{m!\,k} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{k} \binom{k-2}{m-2} \frac{x^{m-1} D_x^{m+1} y}{m!\,(m-1)k} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{k} \binom{k-1}{m-1} \frac{(m-1) x^{m-2} D_x^m y}{(k+1)^2 m (m-2)!} + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{k} \binom{k-1}{m-1} \frac{x^{m-1} D_x^{m+1} y}{(k+1)^2 m (m-2)!} + \right.
$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\binom{k-1}{m-1}\frac{x^{m-1}D_x^{m+1}y}{(k+1)^2(m-1)!}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\binom{k-1}{m-1}\frac{x^{m}D_x^{m+2}y}{(k+1)^2 m!}+$$
$$+2\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{k}\binom{k-1}{m-1}\frac{x^{m-2}D_x^{m}y}{(k+1)m(m-2)!}+$$
$$+2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\binom{k-1}{m-1}\frac{x^{m-1}D_x^{m+1}y}{(k+1)m!}+$$
$$+\ln x\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{k}\binom{k-1}{m-1}\frac{(m-1)x^{m-2}D_x^{m}y}{(k+1)m(m-2)!}+$$
$$+\ln x\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{k}\binom{k-1}{m-1}\frac{x^{m-1}D_x^{m+1}y}{(k+1)m(m-2)!}+$$
$$+\ln x\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\binom{k-1}{m-1}\frac{x^{m-1}D_x^{m+1}y}{(k+1)(m-1)!}+$$
$$\left.+\ln x\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{k}\binom{k-1}{m-1}\frac{x^{m}D_x^{m+2}y}{(k+1)m!}\right]\approx 0. \quad (6)$$

Из (6) имеем $\varepsilon y''\approx 0$, поэтому (6) может быть существенно упрощено:

$$F\equiv y''+2\varepsilon\frac{y'}{x}\approx 0. \quad (7)$$

НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ СИММЕТРИЙ

Найдем приближенную группу точечных преобразований для уравнения (7). Инфинитезимальный оператор приближенной группы имеет вид [6]

$$X=(\xi_0+\varepsilon\xi_1)\frac{\partial}{\partial x}+(\eta_0+\varepsilon\eta_1)\frac{\partial}{\partial y}. \quad (8)$$

Координаты $\xi_{(i)},\eta_{(i)}(i=0,1)$ являются функциями x,y. Оператор (8) продолжается на все переменные, входящие в уравнение (7):

$$\tilde{X}=X+(\zeta_0^1+\varepsilon\zeta_1^1)\frac{\partial}{\partial y'}+(\zeta_0^2+\varepsilon\zeta_1^2)\frac{\partial}{\partial y''},$$

где координаты ζ_i^k продолженного оператора определяются по классическим формулам продолжения [1].

При $\varepsilon=0$ уравнение (7) переходит в простое дифференциальное уравнение второго порядка $y''=0$, группа преобразований которого известна [1]:

$$\xi_0=C_4x+C_5x^2+C_6+C_7y+C_8xy,$$
$$\eta_0=C_1+C_2x+C_3y+C_5xy+C_8y^2.$$

С использованием известного [6] алгоритма нахождения приближенной группы преобразований было доказано следующее утверждение.

Утверждение. *Уравнение (7) допускает 16-параметрическую группу приближенных точечных преобразований, порождаемую операторами*

$$X_1=\frac{\partial}{\partial y},\ \ X_2=x[1+2\varepsilon(1-\ln x)]\frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_3=y\frac{\partial}{\partial y},\ \ X_4=x\frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_5=x^2[1+2\varepsilon(2-\ln x)]\frac{\partial}{\partial x}+$$
$$+xy[1+2\varepsilon(1-\ln x)]\frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_6=(1+2\varepsilon\ln x)\frac{\partial}{\partial x},X_7=y[1+2\varepsilon\ln x]\frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_8=xy\frac{\partial}{\partial x}+y^2[1-2\varepsilon]\frac{\partial}{\partial y},$$
$$X_{i+8}=\varepsilon X_i,\qquad i=1,\dots 8.$$

Знание приближенной группы дает возможность строить приближенно инвариантные решения уравнения (1).

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Найдем приближенный первый интеграл уравнения (7) методом интегрирующего множителя. Соответствующий множитель будем строить с помощью сопряженного уравнения по методике [7].

Сопряженное уравнение к (7) будем строить по формуле

$$F^*=\frac{\delta[zF]}{\delta y}=\frac{\partial[zF]}{\partial y}-D_x\left(\frac{\partial[zF]}{\partial y'}\right)+$$
$$+D_x^2\left(\frac{\partial[zF]}{\partial y''}\right), \quad (9)$$

где $z=z(x)$ – новая зависимая переменная, $\frac{\delta}{\delta y}$ – оператор Эйлера-Лагранжа.

Подставив уравнение (7) в формулу (9), получаем

$$F^{*} \equiv z'' + 2\varepsilon z \frac{1}{x^2} - 2\varepsilon z' \frac{1}{x} \approx 0. \quad (10)$$

Уравнения (7) и (10) удовлетворяют условию

$$zF - yF^{*} = D_x(\psi),$$

где $\psi[y, z]$ – первый интеграл исходного уравнения.

Возьмем любое частное решение уравнения (10), например $z = x$, оно и будет являться интегрирующим множителем для уравнения (7).

Тогда приближенный первый интеграл уравнения (7) вычисляется по формуле из [7]:

$$\psi = y\left[2\varepsilon \frac{1}{x} z - z'\right] + y'z = 2\varepsilon y - y + xy'.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы было построено приближенное уравнение фильтрации с малым параметром для дробно-дифференциальной модели в предположении близости порядка дробного дифференцирования к единице. Для полученного уравнения была найдена приближенная группа точечных преобразований, на основании известной групповой классификации ОДУ второго порядка. На основании приближенного сопряженного уравнения построен первый приближенный интеграл найденного приближенного аналога уравнения фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ибрагимов Н. Х.** Азбука группового анализа / Н. Х. Ибрагимов. — М.: Знание, 48с. [N. H. Ibragimov, ABC Group Analysis. Znanie]

2. **Самко С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с. [S.G. Samko, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. London: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.]

3. **Gazizov R. K.** Symmetries and group invariant solutions of fractional ordinary differential equations / Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. // In Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vol. 2. Fractional Differential Equations. Eds.: Anatoly Kochubei, Yuri Luchko. – Berlin, Boston: De Gruyter. – 2019. – Pp. 65-90.

4. **Gazizov R. K.** Symmetries, conservation laws and group invariant solutions of fractional PDEs / Gazizov R. K., Kasatkin A. A., Lukashchuk S. Yu. // In Handbook of Fractional Calculus with Applications. Vol. 2. Fractional Differential Equations. Eds.: Anatoly Kochubei, Yuri Luchko. – Berlin, Boston: De Gruyter. – 2019. – Pp. 353-382.

5. **Лукащук С. Ю.** Групповая классификация одного нелинейного приближенного уравнения субдиффузии // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. наука. – 2016. – Т. 20, № 4. – С. 603–619. [S. Yu. Lukashchuk, Group classification of a single nonlinear approximate subdiffusion equation. Samara: Seria Fiz. Mat. nauk, 2016]

6. **Байков В. А**. Методы возмущений в групповом анализе / В. А. Байков, Р. К. Газизов, Н. Х. Ибрагимов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. – 1989. Т. 34, – С. 85–147. [V. A. Baikov, Perturbation methods in group analysis. Itogi nauki i texniki 1989]

7. **Ibragimov N. H.** Nonlinear self-adjointness in constructing conservationlaws, Archives of ALGA.–2010-2011–v.7/8.–p.1–99.

ОБ АВТОРЕ

ЧУНАРЁВА Мария Павловна, магистрант каф. математики УГАТУ.

METADATA

Title: Approximate stationary fractional differential equation of radial filtration

Authors: M. P. Chunareva

Affiliation:

Ufa State Aviation Technical University (UGATU), Russia.

Email: mchunaryeva@gmail.com

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa State Aviation Technical University), no. 2 (21), pp. 205-208, 2019. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: For a fractional differential model of radial filtration, an approximation is constructed in the form of a differential equation with a small parameter separated from the fractional differentiation order. For the constructed approximate equation, approximate symmetries and an integrating factor are found.

Key words: filtration equation, fractional derivative, small parameter, approximate symmetry, integrating factor.

About authors:

CHUNAREVA, Maria Pavlovna., master student 1 year, Ufa state aviation technical University