ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

УДК 517.9

Дробно-дифференциальная модель линейной двухфазной фильтрации

Н. С. Белевцов [1]

[1] nikitabelewtsov@mail.com

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (УУНиТ)

Аннотация. Рассматривается процесс двухфазной фильтрации флюида в неоднородной трещиновато-пористой среде, описываемый дробно-дифференциальной модификацией закона фильтрации Дарси с потенциалом Рисса. Выполняется построение линейной модели двухфазной фильтрации. Производится вывод уравнения на давление нефти из системы уравнений модели. Предлагается использование метода *IMPES* для построения численного решения рассматриваемой модели фильтрации.

Ключевые слова: потенциал Рисса; фильтрация флюидов; моделирование; закон Дарси.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач математического моделирования является описание и исследование диффузионных процессов в сложных неоднородных средах. Процессы в подобных средах часто характеризуются аномальной кинетикой протекания, которая не подчиняется нормальной (гауссовой) статистике и может проявляться в виде эффектов памяти (нелокальность по времени) или дальних пространственных взаимодействий (нелокальность по пространству). Данные явления возникают при исследовании диффузионных и волновых процессов, в классической и квантовой механике, физике диэлектриков и полупроводников, физике плазмы и во многих других областях [1].

В последние годы аппарат интегро-дифференцирования дробного порядка [2] все чаще применяется для описания аномальных явлений и процессов с эффектами пространственной и временной нелокальности. Применение данной теории позволяет описывать аномальную кинетику в сложных неоднородных средах посредством замены неоднородных сред однородными, но с нелокальными эффектами, описываемыми интегралами и производными дробного порядка. В настоящий момент предложено множество дробно-дифференциальных математических моделей подобных процессов [3].

Целью данной работы является построение дробно-дифференциального обобщения модели двухфазной фильтрации с потенциалом Рисса, который является одним из возможных обобщений понятия дробного интегрирования на случай многомерного пространства.

ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДИФИКАЦИЯ ЗАКОН ДАРСИ

Рассмотрим процесс двухфазной фильтрации флюида в неоднородной трещиновато-пористой среде с эффектами нелокальности по пространству. Подобная нелокальность может быть вызвана различными дальними взаимодействиями, которые могут наблюдаться, например, в нефтяных пластах с естественной трещиноватостью [4]. Трещиновато-пористая среда может быть осредненно представлена как однородная изотропная сжимаемая пористая среда со степенной реологией, приводящей к следующей дробно-дифференциальной модификации закона фильтрации Дарси:

$$u = -\frac{k_\alpha}{\mu}\nabla(R^\alpha p), \quad \alpha \in (0{,}1). \tag{1}$$

Здесь
μ – вязкость флюида, Па·с;
k_α – дробно-дифференциальный аналог проницаемости пористой среды, м $^\alpha$;
u – вектор скорости фильтрующегося флюида, м/с;
R^α – потенциал Рисса, который определяется как

$$R^\alpha u(x) = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int\limits_{R^n}\frac{u(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy, \quad \alpha \neq n, \qquad n+2, \qquad n+4, \ldots, \tag{2}$$

где

$$\gamma_n(\alpha) = 2^\alpha \pi^{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}.$$

Закон фильтрации (1) позволяет описывать процессы супердиффузионного переноса вещества. В предельном случае $\alpha = 0$ данная модель совпадает с классическим законом фильтрации Дарси. Модифицированный закон Дарси подобного вида исследовался, например, в работе [5].

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

Основные уравнения модели (уравнения массового баланса) записываются для двух рассматриваемых несмешивающихся и находящихся в термодинамическом равновесии фаз (o – нефть, w – вода) и имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_o}{B_o}\right) + \nabla\left(\frac{u_o}{B_o}\right) = q_o, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_w}{B_w}\right) + \nabla\left(\frac{u_w}{B_w}\right) = q_w. \tag{4}$$

Здесь ϕ – пористость среды, S_l – насыщенность фазы l, u_l – скорость фильтрации фазы l, B_l – коэффициент объемного расширения фазы l, q_l – плотность объемных источников фазы l при нормальных условиях, $l=\{o,w\}$ – обозначение рассматриваемой фазы. Плотности объемных источников q_l включаются в систему уравнений модели для учета влияния добывающих и нагнетающих скважин.

Зависимость скоростей и давлений рассматриваемых фаз может быть учтена с использованием дробно-дифференциального обобщения закона фильтрации Дарси (1), которое, с учетом влияния гравитационных сил, может быть представлено в виде

$$u = -\frac{k}{\mu_l}[k_{rl}^\alpha \nabla(R^\alpha p_l) + k_{rl}\rho_l g], \quad \alpha \in (0{,}1), \quad p = p(t,x), \quad x \in R^3. \tag{5}$$

Здесь k – проницаемость пористой среды, μ_l – вязкость фазы l, k_{rl} – относительная фазовая проницаемость для фазы l, k_{rl}^α – дробно-дифференциальный аналог относительной фазовой проницаемости, p_l – давление фазы l, ρ_l – плотность фазы l, g – вектор ускорения свободного падения.

Плотности фаз представляются в виде

$$\rho_l = \frac{\rho_l^*}{B_l},$$

где ρ_l^* – плотности фаз при нормальных условиях.

Совместность системы уравнений обеспечивается представленными ниже замыкающими соотношениями. Первое из них связывает давления нефти и воды через капиллярное давление:

$$p_{cow} = p_o - p_w, \tag{6}$$

а второе представляет собой балансовое соотношение для насыщенностей:

$$S_o + S_w = 1. \tag{7}$$

Подстановка модифицированного закона Дарси (5) в систему уравнений модели (3), (4), с учетом представленных выше замыкающих соотношений (6), (7), приводит к следующей системе уравнений дробно-дифференциальной модификации модели двухфазной фильтрации

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{1-S_w}{B_o}\right) = F_o, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_w}{B_w}\right) = F_w, \tag{9}$$

где

$$F_o \equiv \nabla[\lambda_o k_{ro}^{\alpha}\nabla(R^{\alpha}p_o) + \lambda_o k_{ro}\rho_o g] + q_o,$$

$$F_w \equiv \nabla[\lambda_w k_{rw}^{\alpha}\nabla(R^{\alpha}[p_o - p_{cow}]) + \lambda_w k_{rw}\rho_w g] + q_w,$$

$$\lambda_l = \frac{k}{\mu_l B_l}.$$

В системе уравнений (8), (9) неизвестными функциями являются водонасыщенность $S_w = S_w(t,x)$ и давление нефти $p_o = p_o(t,x)$, а следующие функции считаются известными:

$$\phi = \phi(x, p_o), \quad k = k(x, p_o), \quad q_l = q_l(t, x, p_l, S_w),$$

$$B_l = B_l(p_l), \quad \mu_l = \mu_l(p_l), \quad \rho_l = \rho_l(p_l),$$

$$k_{ro} = k_{ro}(S_w), \quad k_{rw} = k_{rw}(S_w), \quad p_{cow} = p_{cow}(S_w).$$

В качестве начальных условий для данной модели можно положить распределения полей водонасыщенности и давления нефти в начальный момент времени:

$$p_o(0,x) = p_o^0(x), \;\; S_w(0,x) = S_w^0(x).$$

УРАВНЕНИЕ НА ДАВЛЕНИЕ

Численное решение представленной ранее системы уравнений двухфазной фильтрации (8), (9) может быть построено с использованием метода *IMPES* [6]. В данном методе из системы уравнений модели многофазной фильтрации выделяется уравнение на давление, которое записывается исходя из условия пренебрежения изменением капиллярного давления в пределах каждого временного шага. Для численного решения данного уравнения используется неявная разностная схема, а для нахождения значений водонасыщенности – явная разностная схема, записанная для уравнения (8).

По временной переменной $t \in [t_o, T]$ задается разностная сетка вида

$$\omega_n = \left\{t_k : t_k = t_{k-1} + \Delta t_k, k = 1, \ldots, N, \sum_{n=1}^{\infty}\Delta t_n = T\right\}. \tag{10}$$

Пренебрегая изменением капиллярного давления в пределах каждого временного шага, справедливо

$$p_{cow}(t) = p_{cow}(t_n), t \in [t_n, t_{n+1}],$$

$$\frac{\partial p_o}{\partial t} = \frac{\partial p_w}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Уравнение (8) дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{1-S_w}{B_o}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right) - \phi\frac{S_w}{B_w}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B_w}{B_o}\right) - \frac{B_w}{B_o}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi\frac{S_w}{B_w}\right) = F_o.$$

Отсюда, в силу (9), можно записать уравнение на давление в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\phi}{B_o}\right) - \phi\frac{S_w}{B_w}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B_w}{B_o}\right) = F_o + \frac{B_w}{B_o}F_w. \quad (11)$$

В пределах каждого временного слоя, т.е. при $t \in [t_n, t_{n+1}]$, уравнение (11) представляется как

$$b\frac{\partial p_o}{\partial t} = F_o + \frac{B_w}{B_o}F_w, \quad (12)$$

где

$$b = \frac{B_o\left(\frac{\partial\phi}{\partial p_o} - \phi\frac{S_w}{B_w}\frac{dB_w}{dp_w}\right) - \phi\frac{dB_o}{dp_o}(1-S_w)}{B_o^2}.$$

Выделяя из правой части (12) члены, зависящие от $\nabla(R^\alpha p_o)$, получим уравнение на давление вида

$$b\frac{\partial p_o}{\partial t} = \nabla\lambda_o k_{ro}^\alpha \nabla(R^\alpha p_o) + \frac{B_w}{B_o}\nabla\lambda_w k_{rw}^\alpha \nabla(R^\alpha p_o) + Q, \quad (13)$$

где

$$Q = \nabla[(\lambda_o k_{ro}\rho_o + \lambda_w k_{rw}\rho_w)g] - \nabla\lambda_w k_{rw}^\alpha \nabla(R^\alpha p_{cow}) + q_o + q_w.$$

Уравнение (19) является нелинейным, так как его коэффициенты зависят от давления нефти. В *IMPES* методе численное решение подобных уравнений строится с использованием неявной разностной схемы, для которой выполняется внутренний итерационный процесс в пределах каждого временного шага для уточнения получаемых значений нелинейных коэффициентов. Для численного нахождения значений водонасыщенности с учетом найденного давления нефти выполняется построение явной разностной схемы уравнения (8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен процесс фильтрации флюидов в неоднородной трещиновато-пористой среде. Для описания подобного процесса предложено использование дробно-дифференциального обобщения закона фильтрации Дарси с потенциалом Рисса. Выполнено построение модели двухфазной фильтрации с использованием предложенного закона фильтрации. Для численного решения системы уравнений построенной модели предложено использование метода *IMPES*, для чего из рассматриваемой системы уравнений было выделено одно уравнение на давление нефти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учайкин В. В. Метод дробных производных. –Ульяновск: Артишок, 2008. –512 с.

2. Самко, С. Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

3. Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. – World scientific, 2000. – 472 p.

4. Yamazaki K. Remarks on the method of modulus of continuity and the modified dissipative Porous Media Equation. Journal of Differential Equations. – 2018. – V. 250. – №. 4. – pp. 1909-1923.

5. Belevtsov N. S., Lukashchuk S. Y. Lie group analysis of 2-dimensional space-fractional model for flow in porous media //Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2018. – V. 41. – №. 18. – pp. 9123-9133.

6. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – 2004. – 416 с.

ОБ АВТОРАХ

БЕЛЕВЦОВ Никита Сергеевич, аспирант 3-го курса, Уфимский государственный авиационный технический университет

METADATA

Title: Fractional model of linear two-phase filtration.

Affiliation: Ufa University of Science and Technology (UUST), Russia.
Email: nikitabelewtsov@mail.ru

Language: Russian.
Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 1 (27), pp. 104-108, 2023. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: The process of two-phase fluid filtration in an inhomogeneous fractured porous medium described by a fractional Darcy filtration law with a Riesz potential is considered. A linear model of two-phase filtration is constructed. The oil pressure equation is derived from the system of equations of the model. IMPES method is proposed for constructing a numerical solution of the considered filtration model.

Key words: Riesz potential; fluid filtration; modeling; Darcy’s law.

About authors:
BELEVTSOV, Nikita Sergeevich, postgraduate student 3 year, Ufa state aviation technical university.