УДК 517.9

Исследование взаимосвязи классического и дробно-дифференциального уравнений Гельмгольца

В. В. Спеле

spele.vv@ugatu.su

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (УУНиТ)

Аннотация. Исследуется взаимосвязь дробно-дифференциального обобщения уравнения Гельмгольца с дробной степенью оператора Лапласа и классического уравнения Гельмгольца. С помощью свойств фундаментальных решений и замен переменных получена запись дробно-дифференциального уравнения Гельмгольца в виде классического уравнения с дробной правой частью. Такая запись позволяет облегчить численное решение краевых задач для дробно-дифференциального уравнения Гельмгольца.

Ключевые слова: дробная степень оператора Лапласа; дробно-дифференциальное обобщение уравнения Гельмгольца; фундаментальное решение;

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время моделирование волновых процессов широко используется во многих прикладных областях, в частности, в сейсморазведке. Распространение волн в однородных средах описывается классическими дифференциальными уравнениями гиперболического типа, которые широко известны и изучены. Однако при распространении волн в неоднородных средах могут возникать различные аномальные свойства. В частности, возможно появление свойств пространственной нелокальности. В этом случае при построении математических моделей волновых процессов может быть эффективно использован аппарат дробно-дифференциальных уравнений, описывающих распространение линейных и нелинейных волн в таких средах, которые в настоящее время активно исследуются. Численное моделирование на основе таких дробно-дифференциальных уравнений связано с решением систем линейных алгебраических уравнений не с разреженными, а с плотно заполненными матрицами, что приводит к существенному росту требований к вычислительным ресурсам.

Дробная степень оператора Лапласа [1] возникает, в частности, в теории потенциала [2], гармоническом анализе [3], функциональном анализе [4], процессах Леви [5], и др. В работе [6] изучалось линейное волновое уравнение с дробной степенью оператора Лапласа. В случае монохроматической гармонической волны такое уравнение редуцируется к дробно-дифференциальному обобщению уравнения Гельмгольца.

Целью данной работы является исследование взаимосвязи классического и дробно-дифференциального уравнений Гельмгольца. Результатом является установление эквивалентности по решению дробно-дифференциального уравнения Гельмгольца с дробным оператором Лапласа в виде классического уравнения Гельмгольца с правой частью специального вида.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается дробно-дифференциальное обобщение уравнения Гельмгольца вида

$$-(-\Delta_x)^{\frac{\alpha}{2}}u + \omega^2 u = f, \qquad u = u(x), \qquad f = f(x), \qquad x \in R^2, \qquad \omega \in R, \tag{1}$$

где $(-\Delta_x)^{\frac{\alpha}{2}}$ – дробная степень оператора Лапласа, которая может быть определена через преобразование Фурье $\mathcal{F}$ как

$$(-\Delta_x)^{\frac{\alpha}{2}}u(x) = \mathcal{F}^{-1}(|k|^{\alpha}(Fu)(k))(x). \qquad (2)$$

Выполнив замену переменных $z^{\alpha} = \omega^2 x^{\alpha}$ в уравнении (1), получим

$$(-\Delta_z)^{\frac{\alpha}{2}}\mathrm{u(z)} + \mathrm{u} = \varphi(\mathrm{z}), \qquad (3)$$

где $\varphi(z) \equiv \omega^{-2} f\left(z\omega^{-\frac{2}{\alpha}}\right)$. Решение уравнения (3) может быть представлено в виде [7]

$$u_{\alpha} = \int_{R^2} G_{\alpha}(|z-\xi|)\varphi(\xi)d\xi. \qquad (4)$$

Здесь $G_{\alpha}(z)$ – фундаментальное решение дробно-дифференциального оператора левой части уравнения (3). Оно находится как решение уравнения

$$(-\Delta_z)^{\frac{\alpha}{2}}G_{\alpha}(\mathrm{z}) + G_{\alpha}(\mathrm{z}) = \delta(\mathrm{z}), \qquad (5)$$

где $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В работе [7] была доказана теорема о явном представлении фундаментального решения $G_{\alpha}(z)$ в виде

$$G_{\alpha}(z) = C_1 J_0(|z|) + C_{\alpha} H^{2,1}_{2,4}\left[\frac{|z|^2}{4}\left|\begin{matrix} & \left(1-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right) & \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right) & \\ (0,1) & \left(1-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right) & (0,1) & \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right)\end{matrix}\right.\right], \qquad (6)$$

где C_1, C_{α} – произвольные постоянные, $J_0(z)$ – функция Бесселя первого порядка, $H(z)$ – функция Фокса[8]. При $\alpha = 2$ формула (6) даёт известное фундаментальное решение классического уравнения Гельмгольца

$$G_2(z) = C_1 J_0(|z|) + C_2 Y_0(|z|), \qquad (7)$$

где $Y_0(z)$ – функция Бесселя второго порядка. Также в работе [7] было показано, что асимптотика функции Фокса из (6) при $|z| \to \infty$ имеет вид

$$\mathrm{H}(|z|) \sim Y_0\left(2\sqrt{|z|}\right) + \mathcal{O}\left(|z|^{-1-\frac{\alpha}{2}}\right). \qquad (8)$$

Из известных асимптотик функций Бесселя $J_0(|z|) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{|z|}}\right), Y_0(|z|) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{|z|}}\right), z \to \infty$, следует, что для сходимости интеграла (4), достаточно, чтобы $\varphi(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|z|^{\rho}}\right), \rho > \frac{3}{2}, z \to \infty$. Учитывая связь $\varphi(z)$ и $f(x)$, замечаем, что уравнение (1) будет иметь смысл при

$$f(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{|x|^{\rho}}\right), \rho > \frac{3}{2}, |x| \to \infty. \qquad (9)$$

Сравнение (6) и (7) с учетом (8) показывает, что мы можем представить фундаментальное решение G_{α} в виде

$$G_{\alpha}(z) = G_2(z) + G_0(z), \qquad (10)$$

где $G_0(z) = \mathcal{O}(|z|^{-1-\frac{\alpha}{2}}),\ z \to \infty$. Фундаментальное решение $G_2(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_z G_2(z) + G_2(z) = \delta(z). \qquad (11)$$

В силу (5), (10) и (11) получаем

$$\Delta_z G_\alpha(z) - \Delta_z G_o(z) + G_\alpha(z) - G_o(z) = -(-\Delta_z)^{\frac{\alpha}{2}} G_\alpha(z) + G_\alpha(z), \tag{12}$$

откуда

$$\Delta_z G_o(z) + G_o(z) = g(z), \tag{13}$$

где $g(z) \equiv (-\Delta_z)^{\frac{\alpha}{2}} G_\alpha(z) + \Delta_z G_\alpha(z)$. Подстановка в эту формулу $G_\alpha(z)$ из (6) даёт следующее явное представление для функции $g(z)$:

$$g(z) = C_\alpha H_{2,4}^{2,1}\left[\frac{|z|^2}{4}\left|\begin{matrix} & \left(2-\frac{4}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right) & \left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right) & \\ (0,1) & \left(2-\frac{4}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right) & (0,1) & \left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right)\end{matrix}\right.\right] -$$

$$C_\alpha H_{2,4}^{2,1}\left[\frac{|z|^2}{4}\left|\begin{matrix} & \left(1-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right) & \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right) & \\ (0,1) & \left(1-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right) & (0,1) & \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{\alpha},\frac{2}{\alpha}\right)\end{matrix}\right.\right].$$

Таким образом фундаментальное решение $G_\alpha(z)$ разложено в суперпозицию двух решений $G_2(z)$ и $G_0(z)$ классического (локального) уравнения Гельмгольца. При этом $G_0(z)$ является решением линейного уравнения, и может быть найдено как свёртка фундаментального решения $G_2(z)$ и правой части $g(z)$:

$$G_o(z) = \int_{R^2} G_2(|\eta|) g(z-\eta) d\eta. \tag{14}$$

Подстановка (10) в (4) даёт

$$u_\alpha = \int_{R^2} G_2(|\eta|)\varphi(z-\eta)d\eta + \int_{R^2} G_o(|\eta|)\varphi(z-\eta)d\eta\,. \tag{15}$$

Заменяя в данном представлении $G_0(z)$ в силу (14), получаем

$$u_\alpha = \int_{R^2} G_2(|\eta|)\varphi(z-\eta)d\eta + \iint_{R^2} G_2(|\xi|)\varphi(z-\eta)g(\eta-\xi)d\eta d\xi \tag{16}$$

или

$$u_\alpha = \int_{R^2} G_2(|\eta|)\left[\varphi(z-\eta) + \int_{R^2}\varphi(z-\xi)g(\xi-\eta)d\xi\right]d\eta. \tag{17}$$

Заметим, что при замене переменных $\xi = s + \eta$ внутренний интеграл в (17) преобразуется как

$$\int_{R^2}\varphi(z-\xi)g(\xi-\eta)d\xi = \int_{R^2}\varphi(z-\eta-s)g(s)ds. \tag{18}$$

Обозначим

$$h(z) = \int_{R^2}\varphi(z-s)g(s)ds. \tag{19}$$

Тогда (17) примет вид

$$u_\alpha = \int_{R^2} G_2(|\eta|)[\varphi(z-\eta) + h(z-\eta)]d\eta, \tag{20}$$

что является решением уравнения

$$\Delta_z u + u = \psi(z), \tag{21}$$

где $\psi(z) \equiv \varphi(z) + h(z)$.

Таким образом, дробно-дифференциальное уравнение Гельмгольца оказывается эквивалентно по решению классическому уравнению Гельмгольца (21) с правой частью специального вида. Дробная степень оператора Лапласа входит в правую часть от известной функции, поэтому может быть вычислена заранее один раз для всех f из (1).

Выражая $\psi(z)$ через x и ω с учётом замены $z^\alpha=\omega^2 x^\alpha$ и $\varphi(z) = \omega^{-2} f(z\omega^{-\frac{2}{\alpha}})$, получим:

$$\psi(z) = \Theta(x, \omega), \tag{22}$$

где $\Theta(x, \omega) \equiv \frac{f(x)}{\omega^2} + \omega^{\frac{2}{\alpha}-2} \int_{R^2} g((x - \eta)\omega^{\frac{2}{\alpha}}) f(\eta) d\eta$. Для оператора Лапласа имеем

$$\Delta_z = \omega^{-\frac{4}{\alpha}} \Delta_x. \tag{23}$$

Тогда с учетом (22) и (23) мы можем записать (21) как

$$\Delta_x u + \omega^{\frac{4}{\alpha}} u = \omega^{\frac{4}{\alpha}} \Theta(x, \omega). \tag{24}$$

Важно отметить, что так как $G_0(z) = O(|z|^{-1-\frac{\alpha}{2}})$, то в силу (17) $g(z) = O(|z|^{-1-\frac{\alpha}{2}})$. Это означает, что в практических приложениях для функций $f(x)$, удовлетворяющих (9), нет необходимости интегрировать по всей области R^2. Интегрирование можно проводить по шару $\Omega = \{x: |x| \leq R\}$ некоторого радиуса R, величина которого должна быть согласована с требуемой точностью приближенного решения задачи:

$$\int_{R^2} g\left((x - \eta)\omega^{\frac{2}{\alpha}}\right) f(\eta) d\eta \approx \int_{\Omega} g\left((x - \eta)\omega^{\frac{2}{\alpha}}\right) f(\eta) d\eta. \tag{25}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показана эквивалентность дробно-дифференциального уравнения Гельмгольца (1) по решению классическому уравнения Гельмгольца с правой частью специального вида (24). Это позволяет упростить построение приближенных численных решений краевых задач для дробно-дифференциальных уравнений распространения монохроматических гармонических волн путём однократного вычисления правой части специального вида единожды.

Вопросом дальнейшего теоретического исследования является возможность перехода от классического неоднородного уравнения Гельмгольца (24) к линейному волновому уравнению с правой частью специального вида. С практической точки зрения следует рассмотреть задачу разработки новых эффективных численных алгоритмов компьютерного моделирования волновых процессов с использованием полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

2. Cooper G., Cowan D. The application of fractional calculus to potential field data // Exploration Geophysics. – 2003. – V. 34. – P. 51-56.

3.Паровик Р.И. Анализ добротности вынужденных колебаний дробного линейного осциллятора // Журнал технической физики. – 2020. – Т. 90, вып. 7. – С. 1059-1063.

4.Карапетян Г.А. Дробные мультианизотропные пространства и теоремы вложения для них // Математические труды. – 2019. – Т. 22(2). – С. 76-89.

5. Башаров А.М. О стохастическом обосновании описания кинетики наночастиц дифференциальными уравнениями с дробными производными // Наносистемы: физика, химия, математика. – 2012. – 3(6). – С. 47-63.

6. Antoine X., Lorin E. Towards Perfectly Matched Layers for time-dependant space fractional PDE // Journal of Computational Physics. – 2019. – V. 391. – C. 59-90.

7. Belevtsov N. S., Lukashchuk S. Y. A fast algorithm for fractional Helmholtz equation with application to electromagnetic waves propagation // Applied Mathematics and Computation. – 2022. – V. 416. – 12 p.

8. Kilbas A. A. H-transforms: Theory and Applications. – CRC Press, 2004. – 398 p.

ОБ АВТОРАХ

СПЕЛЕ Владимир Владимирович, аспирант 1-го курса каф. ВВТиС УГАТУ, инженер ИКИ УГАТУ.

METADATA

Title: The research about correlation of fractional and classical Helmholtz equations

Affiliation: Ufa University of Science and Technology (UUST), Russia.

Email: spele.vv@ugatu.su

Language: Russian.

Source: Molodezhnyj Vestnik UGATU (scientific journal of Ufa University of Science and Technology), no. 1 (27), pp. 122-126, 2023. ISSN 2225-9309 (Print).

Abstract: The relationship between the fractional-differential generalization of the Helmholtz equation with the fractional degree of the Laplace operator and the classical Helmholtz equation is investigated. Using the properties of fundamental solutions and variable substitutions, a record of the fractional-differential Helmholtz equation is obtained in the form of a classical equation with a fractional right-hand side. Such a record makes it easier to numerically solve boundary value problems for the fractional-differential Helmholtz equation.

Key words: fractional Laplacian; fractional Helmholtz equation; fundamental solution.

About authors:

SPELE, Vladimir Vladimirovich, 1st year postgraduate student at Ufa State Aviation Technical University (USATU), High Performance Computing Systems and Technology, research engineer at The Computer Science Research Institute (USATU).