

## раздел МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 546.26+546.214+539.196.3

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.2.1

МОДЕЛЬ ЕСТЕСТВЕННОЙ КОНВЕКЦИИ В КОЛЬЦЕВОМ КАНАЛЕ  
С ПОДВИЖНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ГРАНИЦЕЙ© Э. И. Нарыгин<sup>1,2</sup>, П. Т. Зубков<sup>2</sup><sup>1</sup>Тюменский нефтяной научный центр  
Россия, Тюменская обл., 625002 г. Тюмень, ул. Осипенко, 79.<sup>2</sup>Тюменский государственный университет  
Россия, Тюменская область, 625003 г. Тюмень, ул. Володарского, 6.

Тел.: +7 (912) 385 63 88.

\*Email: e.i.narygin@yandex.ru

*В работе рассматривается задача об естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости, полностью заполняющей горизонтальный кольцевой канал. Внутренний цилиндр закреплен в центре области и может вращаться вокруг своей оси. На внешней границе поддерживается постоянный перепад температуры. Движение жидкости в области приведет к движению внутреннего цилиндра.*

*Задача рассматривается в двумерной постановке. В качестве математической модели используются уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска. Уравнения записаны в цилиндрической системе координат. Уравнение движения внутреннего цилиндра получено из закона сохранения момента импульса.*

*Предложена математическая модель описания естественной конвекции в кольцевом канале с подвижной границей. Проведено сравнение результатов вычислительного эксперимента с аналитическим решением и результатами других авторов. Проведена оценка влияния способа аппроксимации уравнения движения внутреннего цилиндра на результат. Установлено, что способ аппроксимации не влияет на получаемый результат. Проведены предварительные расчеты для определения оптимальной плотности сетки для данной задачи.*

**Ключевые слова:** естественная конвекция, кольцевой канал, приближение Буссинеска, уравнение Навье-Стокса, численные методы, аппроксимация, разностные уравнения.

**Введение**

Большое количество технических устройств в своей конструкции содержат кольцевые каналы, заполненные жидкостью. Например, такие элементы можно обнаружить в системах охлаждения ядерного реактора, солнечных коллекторах, различных системах хранения тепла. Неоднородность поля температуры в процессе работы устройства может приводить к возникновению конвективных течений.

Исследования естественной конвекции в кольцевых каналах исследуются в течение длительного времени. Большая часть работ посвящена интенсификации теплообмена между внутренним и внешним цилиндрами [1–2].

Существуют различные подходы к моделированию процессов течения жидкости около абсолютно твердых тел,двигающихся по заданному закону или под действием сил. Первый метод – это метод связанных сеток [3]. В данном подходе в каждый момент времени граница тела совпадает с одной из линий сетки. Вторым методом – использование Эйлера-Лагранжевого подхода (ALE). Расчетная сетка перестраивается на каждом временном шаге в зависимости от границы тела [4]. Третий метод – использование бессеточного метода вязких вихревых доменов (ВВД)[5]. Метод построен на использовании лагранжевых координат. Метод не требует построения сеток, лагранжевы точки концентрируются в высокоградиентных областях.

В настоящей работе формулируется математическая модель для описания естественной конвекции в кольцевой полости с подвижным внутренним цилиндром. Исследовано влияние расчетной сетки и аппроксимации уравнения движения внутреннего цилиндра на получаемые результаты.

**Физическая постановка задачи**

Рассматривается задача об естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости, полностью заполняющей горизонтальный кольцевой канал бесконечной длины. Схема поперечного сечения канала представлена на рис.. Внутренний цилиндр закреплен в центре области и может вращаться вокруг своей оси. Постоянный перепад температуры на внешней границе приведет к возникновению в канале конвективных течений. Естественная конвекция вблизи внутреннего цилиндра, за счет вязкого трения, будет приводить его в движение. Предполагается, что все теплофизические параметры жидкости постоянны и вращение внутреннего цилиндра вокруг своей оси происходит без трения. В начальный момент времени внутренний цилиндр и жидкость в области покоятся при постоянной температуре.

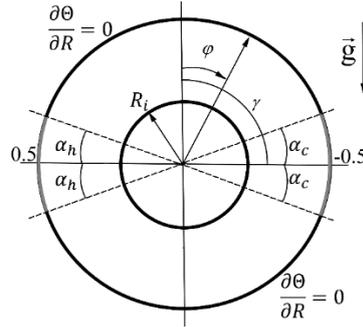


Рис. 1. Схема поперечного сечения канала.

### Математическая постановка задачи

В качестве математической модели используется система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. Предположение о бесконечной длине канала позволяет рассматривать задачу в двумерной постановке. Для сокращения числа параметров, решение задачи будет осуществляться в безразмерных переменных. Система уравнений, описывающая естественную конвекцию, в проекциях на оси координат запишется в виде (1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_R}{\partial \tau} + V_R \frac{\partial V_R}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{R} &= -\frac{\partial P}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial V_R}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_R}{\partial \varphi^2} - \frac{V_R}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \text{Gr} \cdot \cos(\varphi) \cdot \Theta \\ \frac{\partial V_\varphi}{\partial \tau} + V_R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{V_R V_\varphi}{R} &= -\frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{V_\varphi}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial V_R}{\partial \varphi} - \text{Gr} \cdot \sin(\varphi) \cdot \Theta \\ \frac{\partial}{\partial R} (R \cdot V_R) + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} &= 0 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + V_R \frac{\partial \Theta}{\partial R} + \frac{V_\varphi}{R} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} &= \frac{1}{\text{Pr}} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \tilde{\lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \tilde{\lambda} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} \right) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} V_R = \frac{v_r}{v^*}, V_\varphi = \frac{v_\varphi}{v^*}, \tau = \frac{t}{t^*}, P = \frac{p + \rho_0 \cdot g \cdot \cos(\varphi)}{p^*}, R = \frac{r}{r_0} \\ R_i = \frac{r_i}{r_0}, \Theta = \frac{T - T^*}{T_h - T_c}, \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_l}, v^* = \frac{\mu}{\rho_0 r_0}, t^* = \frac{r_0}{v^*}, p^* = \frac{\mu}{t^*}, T^* = \frac{T_h + T_c}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Систему уравнений (1) необходимо дополнить уравнением движения для внутреннего цилиндра. Запишем закон сохранения момента импульса для внутреннего цилиндра. Аналогичный подход применялся для описания закручивания внутреннего ядра земли за счет изменения момента импульса опускающейся жидкости [6]. На цилиндр действует только сила вязкого трения со стороны жидкости. В безразмерных переменных (2) уравнение движения запишется в следующем виде [7]:

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{2}{\rho_s \pi R_i^2} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} - \frac{V_\varphi}{R} \right) \Big|_{R=R_i} d\varphi \quad (3)$$

где  $\Omega = (V_\varphi/R)|_{R=R_i}$  – угловая скорость внутреннего цилиндра,  $\rho_s$  – относительная плотность внутреннего цилиндра к плотности жидкости.

Для уравнений движения на внешней и внутренней границах заданы условия прилипания и непротекания. Для уравнения теплопроводности на внешней границе заданы два участка, на которых поддерживается постоянная температура и размер которых определяется углами  $\alpha_h$  и  $\alpha_c$ , а расположение – углом  $\gamma$  (рис.). Задача решается насквозь, т.е. одновременно для жидкости и внутреннего цилиндра, поэтому дополнительных условий на границе не требуется.

$$\begin{aligned} R = 1: \quad V_R = 0, V_\varphi = 0, \Theta = \begin{cases} 0.5, & |\varphi - \gamma - \pi| \leq \alpha_h \\ -0.5, & |\varphi - \gamma| \leq \alpha_c \\ \frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0, & \text{иначе} \end{cases} \\ R = 0: \quad V_R = 0, V_\varphi = 0, \frac{\partial \Theta}{\partial R} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Задача определяется следующими безразмерными параметрами: числом Грасгофа  $Gr = \frac{\beta \rho_0^2 (T_h - T_c) r_0^3}{\mu^2}$ ; числом Прандтля  $Pr = \frac{c\mu}{\lambda_l}$ ; безразмерным внутренним радиусом  $R_i$ ; отношением теплопроводностей внутреннего цилиндра и жидкости  $\lambda_{sl}$ ; углами  $\alpha_h, \alpha_c$ , определяющими величину горячего и холодного участка соответственно; углом  $\gamma$ , определяющим положение теплой и холодной границ.

### Численная реализация

Для численного исследования поставленной задачи была написана программа на языке FORTRAN. Для получения дискретных аналогов для уравнений (1) использовался метод контрольного объема, а решение уравнений осуществлялось алгоритмом SIMPLER [8].

Для получения дискретного аналога уравнения движения внутреннего цилиндра проинтегрируем уравнение (3) по времени от  $\tau$  до  $\tau + \Delta\tau$ . Будем предполагать, что в период времени  $\Delta\tau$  интеграл в правой части является константой или практически от нее не отличается. Учитывая условие прилипания, второе слагаемое подынтегрального выражения не зависит от  $\varphi$ . Тогда уравнение (3) переписывается в следующем виде:

$$\Omega^{\tau+\Delta\tau} - \Omega^\tau = \frac{2\Delta\tau}{\rho_s \pi R_i^2} \left[ \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right) \Big|_{R=R_i} d\varphi - 2\pi\Omega \right] \quad (5).$$

Рассмотрим аппроксимацию производной  $\left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right) \Big|_{R=R_i}$ . Для равномерной сетки первый порядок аппроксимации производной запишется в виде (6), второй порядок аппроксимации запишется в виде (7).

$$\left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right) \Big|_{R=R_i} \approx 2 \frac{V_\varphi \Big|_{R=R_i+\Delta R/2} - V_\varphi \Big|_{R=R_i}}{\Delta R} \quad (6).$$

$$\left( \frac{\partial V_\varphi}{\partial R} \right) \Big|_{R=R_i} \approx \frac{9V_\varphi \Big|_{R=R_i+\Delta R/2} - 8V_\varphi \Big|_{R=R_i} - V_\varphi \Big|_{R=R_i+3\Delta R/2}}{3\Delta R} \quad (7).$$

Подставляя выражение (6) или (7) в (5), получим дискретный аналог для интегро-дифференциального уравнения (3). Будем рассматривать четыре случая: первый порядок аппроксимации – явная схема (*var 1*) и неявная схема (*var 2*), второй порядок аппроксимации – явная (*var 3*) и неявная схема (*var 4*). Для численного интегрирования использовался метод средних прямоугольников, который для равномерной сетки соответствует методу трапеций.

Для задания скорости внутреннего цилиндра и условия непротекания при решении уравнений (1) использовался дополнительный источниковый член [9]. Итерационный характер решения позволяет пересчитывать скорость цилиндра на внутренних итерациях. Дискретный аналог уравнения теплопроводности записывается для всей области без изменений.

### Тестирование программы

Тестирование программы разделено на два этапа. На первом этапе проводилось тестирование решения уравнений Навье-Стокса. На втором – решение уравнения движения внутреннего цилиндра. При тестировании программы результаты будут сравниваться с существующими аналитическими и численными решениями, полученными другими авторами.

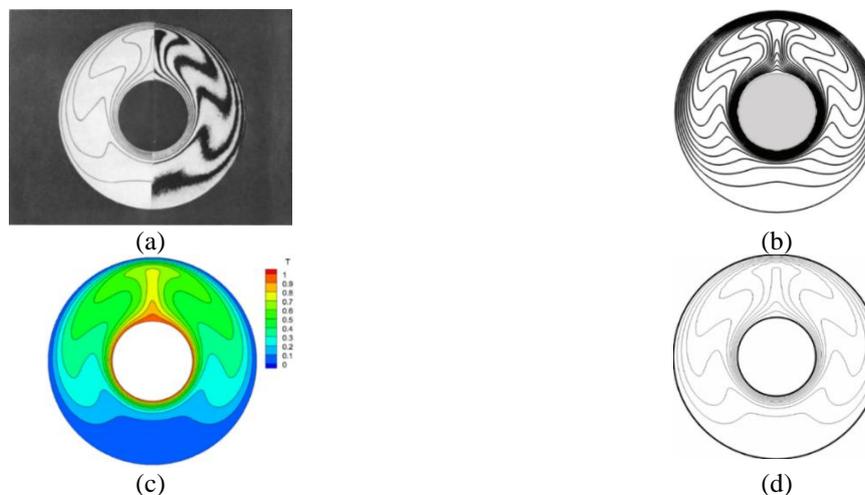


Рис. 2. Поле температуры: для случая (а) левая часть – численное решение, правая часть – результаты эксперимента [1], (b) [10], (c) [2], (d) – эта работа.

### Естественная конвекция в горизонтальном кольцевом канале

Рассматривается задача об естественной конвекции вязкой несжимаемой жидкости, полностью заполняющей горизонтальный кольцевой канал. На внутренней и внешней границах поддерживается постоянная температура, температура внутреннего цилиндра выше температуры внешнего цилиндра.

Рассмотрим случай, когда  $Pr = 0.7$ ,  $Ra = 4.7 \cdot 10^4$ . Существует большое количество работ, как натуральных экспериментов, так и численных исследований, соответствующих данным параметрам. На *рис. 2* представлено сравнение температурных полей, полученных различными авторами. Наблюдается хорошая согласованность полученных результатов.

Представленные результаты свидетельствуют, что решение, полученное с помощью авторской программы, с достаточной точностью согласуется с результатами исследований других авторов.

#### Задача о движении жидкости в кольцевом канале при вращении внешней границы с постоянной скоростью

Рассмотрим задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости, полностью заполняющей кольцевой канал. Внешняя граница движется с постоянной угловой скоростью  $\Omega_o$ . Если внутренний цилиндр, расположенный в центре области, может вращаться вокруг своей оси без трения, то после выхода на стационарный режим жидкость и внутренний цилиндр будут вращаться с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости внешней границы.

Рассмотрим случай, когда  $\Omega_o = 1$ . Расчетная сетка  $10 \times 10$  контрольных объемов. Численные расчеты в точности воспроизводят аналитическое решение. Разностная схема и порядок аппроксимации не оказывают влияние на получаемый результат. Ошибка увеличивается с уменьшением внутреннего радиуса. Это связано с увеличением ошибки при численном решении уравнений Навье-Стокса (*табл. 1*).

Результаты, полученные с помощью авторской программы, соответствуют аналитическому решению. Данная программа может использоваться при проведении исследований естественной конвекции в кольцевом канале с подвижной внутренней границей.

Таблица 1

Абсолютная ошибка  $\Delta\Omega = (\Omega - \Omega_o) \cdot 10^3$  для различных вариантов

Аппроксимация	Внутренний радиус		
	$R_i = 0.2$	$R_i = 0.4$	$R_i = 0.6$
var 1	4.292	0.737	0.185
var 2	4.292	0.736	0.187
var 3	4.710	0.795	0.202
var 4	4.711	0.794	0.794

#### Уточнение параметров вычислительного эксперимента

Рассмотрим случай, когда  $Gr = 10^4$ ,  $Pr = 1$ ,  $\alpha_h = \alpha_c = \pi/5$ ,  $\gamma = \pi/2$ ,  $\lambda_{sl} = 0$ . Для данных фиксированных параметров выполним серию расчетов, чтобы определить максимальный шаг сетки, обеспечивающий решение с достаточной точностью, и наилучший вариант аппроксимации уравнения движения внутреннего цилиндра. На *рис. 3* представлены примеры рассматриваемых расчетных сеток.

Рассмотрим случай, когда  $R_i = 0.4$ . Для других значений внутреннего радиуса получаются аналогичные результаты. Для оценки получаемых решений рассмотрим угловую скорость внутреннего цилиндра после выхода процесса на стационарный режим. Как видно из *табл. 2*, результаты, получаемые при использовании явной и неявной разностных схем, совпадают. Используемый порядок аппроксимации имеет слабое влияние на получаемый результат. Например, различие между первым и вторым порядком аппроксимации на сетке  $40 \times 40$  составляет менее 2%. При измельчении расчетной сетки отличия между первым и вторым порядком аппроксимации будут уменьшаться. Можно сделать вывод, что способ аппроксимации уравнения движения внутреннего цилиндра практически не влияет на получаемый результат. В данном случае качество получаемых решений полностью определяется плотностью расчетной сетки. Это связано с ошибками при численном решении уравнений Навье-Стокса.

Рис. 3. Расчетная сетка: (a)  $10 \times 10$ , (b)  $80 \times 80$ .

Наилучшим вариантом для проведения расчетов является сетка 80x80. Скорость расчета на данной сетке выше, чем при использовании сетки 160x160, а получаемое значение угловой скорости отличается на 1.3%. На расчетной сетке 40x40 результаты получаемой угловой скорости сопоставимы с результатами на сетке 80x80, однако более грубая расчетная сетка хуже описывает экстремальные значения при выходе процесса на стационарный режим (рис. 4).

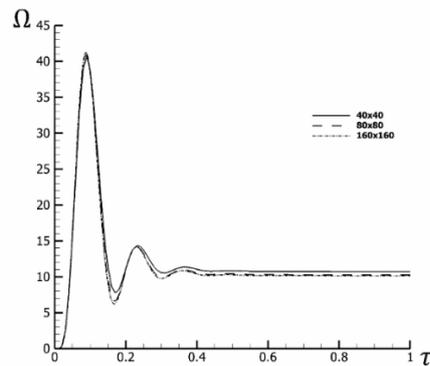


Рис. 4. Зависимость угловой скорости внутреннего цилиндра  $\Omega$  от времени  $\tau$  при  $R_i = 0.4$ .

Таблица 2

Угловая скорость внутреннего цилиндра  $\Omega$  после выхода течения на стационарный режим при  $R_i = 0.4$

Аппроксимация	Сетка				
	10x10	20x20	40x40	80x80	160x160
var 1	20.56	12.16	10.72	10.29	10.16
var 2	20.56	12.16	10.72	10.29	10.16
var 3	19.65	11.85	10.57	10.21	10.12
var 4	19.65	11.85	10.57	10.21	10.12

### Заключение

Для задачи о естественной конвекции в горизонтальном кольцевом канале с внутренней границей, свободно вращающейся вокруг своей оси, предложена математическая модель. Движение внутреннего цилиндра описывается уравнением сохранения момента инерции, где момент силы создает жидкость за счет внутреннего трения. Сравнение результатов вычислительного эксперимента показало хорошую сходимость с аналитическим решением и результатами других авторов. Проведен анализ влияния способа аппроксимации уравнения движения внутреннего цилиндра на получаемый результат. Результат вычислительного эксперимента полностью определяется плотностью расчетной сетки и не зависит от способа аппроксимации. Определена оптимальная сетка для рассматриваемых безразмерных параметров.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Kuehn T. H. and Goldstein, R. J. 1976. An Experimental and Theoretical Study of Natural Convection in the Annulus Between Horizontal Concentric Cylinders, *Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 4. Pp 695–719. DOI: 10.1017/S0022112076002012.
2. Xiufeng Yang, Song-Chang Kong Numerical study of natural convection states in a horizontal concentric cylindrical annulus using SPH method.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. С. 234.
4. Souli M., Zolesio J. P. Arbitrary Lagrangian-Eulerian and free surface methods in fluid mechanics // *J. Comput. Methods Appl. Mech. Energ.* 2001. Vol. 191. Pp. 451–466.
5. Дынникова Г. Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье-Стокса // *Доклады Академии наук*. 2004. Т. 399. №1. С. 42–46. EDN OPTXBR.
6. Решетняк М. Ю. Вращение внутреннего ядра Земли в модели геодинамо // *Доклады Академии наук*. 2001. Т. 380. №5. С. 685–690. EDN SRRLKS.
7. Zubkov P. T., Narygin E. I. Numerical Study of Unsteady Natural Convection in a Horizontal Annular Channel // *Microgravity Science and Technology*. 2020. Т. 32. №4. С. 579–586.
8. Patankar S. V. Numerical heat transfer and fluid flow, Hemisphere Publ // Corp., New York. 1980. Т. 58. С. 288.
9. Patankar S. V. Computation of conduction and duct flow heat transfer. Innovative Research // Inc., Maple Grove, Minnesota. 1991.
10. Fallah K., et al.: Simulation of natural convection heat transfer using nanofluid in a concentric annulus. *Thermal science: Year 2017*. Vol. 21. No. 3. Pp. 1275–1286.

Поступила в редакцию 07.04.2023 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2023.2.1

**A MODEL OF NATURAL CONVECTION IN AN ANNULAR CHANNEL  
WITH MOVABLE INTERNAL BORDER**© E. I. Narygin<sup>1,2</sup>, P. T. Zubkov<sup>2</sup><sup>1</sup>*Tyumen Oil Research Center  
79 Osipenko Street, 625002 Tyumen, Tyumen Oblast, Russia.*<sup>2</sup>*Tyumen State University  
6 Volodarsky Street, 625003 Tyumen, Tyumen Oblast, Russia.**Phone: +7 (912) 385 63 88.**\*Email: e.i.narygin@yandex.ru*

The work deals with the problem of natural convection of a viscous incompressible fluid that completely fills a horizontal annular channel. The inner cylinder is fixed in the center of the area and can rotate around its axis. A constant temperature difference is maintained at the outer boundary. The motion of fluid in the area will cause the motion of the inner cylinder. It is assumed that the rotation of the inner cylinder around its axis occurs without friction.

The problem is considered in the two-dimensional formulation. The Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation are used as a mathematical model. The equations are written in a cylindrical coordinate system. The equation of motion of the inner cylinder is derived from the law of conservation of angular momentum. The problem was solved jointly for the liquid and the inner cylinder.

A mathematical model is proposed for describing natural convection in an annular channel with a movable border. Comparison of the results of the computational experiment with the analytical solution and results of other authors is carried out. The influence of the method of approximating the equation of motion of the inner cylinder on the result is estimated. It was established that the method of approximation does not affect the result obtained. Preliminary calculations were carried out to determine the optimal mesh density for this problem.

**Keywords:** natural convection, annular channel, Boussinesq approximation, Navier-Stokes equation, numerical methods, approximation, difference equations.

*Received 07.04.2023.*