раздел **МАТЕМАТИКА и МЕХАНИКА**

УДК 517.98
DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.1.1

О ЗАДАЧАХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ГОЛОМОРФНЫМИ СУММАМИ РЯДОВ ЭКСПОНЕНТ

С. В. Попенов

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
Россия, Республика Башкортостан, 450000 г. Уфа, ул. Чернышевского, 112.

Тел.: +7 (917) 754 56 59.
Email: s_popenov@mail.ru

Изучаются некоторые постановки задач интерполяции с бесконечным множеством узлов, дискретным в выпуклой области, рядами экспонент с показателями из заданного множества, а также элементами инвариантных относительно дифференцирования подпространств голоморфных функций, в некоторой конкретной области или во всех выпуклых областях и с произвольными дискретными множествами узлов в этих областях. В доказательствах важную роль играет известный эффект принудительного аналитического продолжения функций, используемых для интерполяции. Найдено необходимое и достаточное условие на заданное неограниченное множество показателей, обеспечивающее разрешимость задачи интерполяции элементами инвариантных подпространств, порождаемых системой экспонент с этими показателями во всех выпуклых областях с произвольными дискретными множествами узлов в этих областях. На основе этого критерия доказана возможность сведения к эквивалентным задачам, например, к задаче аппроксимации интерполяционных данных значениями сумм рядов экспонент в узлах интерполяции. Доказано существование сумм рядов экспонент и функций из инвариантных подпространств, обладающих экзотическим поведением как самой функции, так и ее производных вблизи границы выпуклой области.

Ключевые слова: *голоморфная функция, интерполяция, сумма ряда экспонент, инвариантное подпространство.*

Введение

В последние годы появилось много работ, посвященных изучению нескольких близких задач под различными названиями (см., например, [1–9] и библиографию там), но относящихся к тематике данной работы, которая продолжает исследование задач голоморфной интерполяции в выпуклых областях элементами различных подмножеств из замыкания (в топологии равномерной сходимости на компактах) линейной оболочки системы экспонент с показателями из заданного множества в областях неполноты этой системы, а также изучение различных эквивалентных задач. В частности, рассмотрены результаты, анонсированные в работе [7], об интерполяции элементами инвариантных подпространств и доказано, что эта задача эквивалентна ряду других задач. Рассмотрен также вопрос о существовании голоморфной функции, представленной в виде ряда экспонент (а также функций из инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез), с экзотическим предельным поведением вблизи границы выпуклой области как самой функции, так и ее производных.

Постановка задач интерполяции и условие их разрешимости

Пусть D – выпуклая область в комплексной плоскости, обозначим $H(D)$ линейное пространство голоморфных в D функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах. Это метризуемое пространство, полное и, в силу теоремы Монтеля, являющееся пространством Фреше. Отметим также рефлексивность H(D). Пусть $M = \{\mu_k\} \subset D$ – это счетное множество узлов интерполяции, дискретное в D, т.е. без конечных предельных точек в области; $m_k \in \mathbb{N}$ – это кратности узлов μ_k, а $\Lambda \subset \mathbb{C}$ –это некоторое неограниченное множество показателей. Обозначим

$$\Sigma(\Lambda, D) = \{U : U(z) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{\lambda_n}, \lambda_n \in \ \Lambda\},$$

при этом предполагается, что ряды экспонент абсолютно сходятся для $z \in D$. Известно, что ряды, абсолютно сходящиеся в выпуклой области, сходятся равномерно на всех компактных подмножествах в D, так что все суммы рядов $U \in \Sigma(\Lambda, D)$ являются голоморфными в D функциями; $\Sigma(\Lambda, D)$ – это линейное подпространство $H(D)$, вообще говоря, не замкнутое.

Задача интерполяции суммами рядов экспонент в заданной выпуклой области: найти описание классов множеств M и Λ, которые дают разрешимость следующей проблемы:

для любых интерполяционных данных $b_k^j \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots, m_k - 1$ *существует такая сумма ряда* $U \in \Sigma(\Lambda, D)$, *что* $U^{(j)}(\mu_k) = b_k^j$.

Приведем контрпример. Если $D = \mathbb{C}$, пусть $\Lambda = \{2\pi n, n \in \mathbb{N}\}$, тогда целые функции, представленные в виде $U(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, e^{2\pi n z}$, удовлетворяют разностному уравнению $U(z) = U(z + i)$. Видим, что для любых двух узлов вида $\mu_1 = \mu, \mu_2 = \mu + i, \mu \in \mathbb{C}$ простая интерполяция $U(\mu_k) = b_k$ не разрешима для интерполяционных данных $b_1 \neq b_2$.

Представления для $H(D)$. Классический результат о разрешимости задачи интерполяции в пространстве $H(D)$ позволяет сделать следующее. Обозначим $\psi_M \in H(D)$ аналитическую функцию с нулевым множеством $M = \{\mu_k\}$ с учетом кратностей m_k. Обозначим через $(\psi_M) = \{h \in H(D): h = r\psi_M, r \in H(D)\}$ идеал в $H(D)$, порождаемый ψ_M. Легко увидеть, что для заданного множества узлов $M = \{\mu_k\}$ с кратностями $\{m_k\}$ разрешимость проблемы интерполяции рядами экспонент равносильна существованию представления $H(D) = \Sigma(\Lambda, D) + (\psi_M)$.

Определение. Обозначим $\mathbb{S} = \{s \in \mathbb{C}: |s| = 1\}$. Пусть $X \subset \mathbb{C}$ – неограниченное множество. Определим множество $P(X) \subset \mathbb{S}$ предельных направлений множества X в бесконечности как состоящее из всех таких $s \in S$, что $s = \lim_{k\to\infty} x_k/|x_k|$ для некоторой последовательности $\{x_k\} \subset X, x_k \to \infty$.

Произвольным образом выберем разреженную последовательность $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$, такую что $|\lambda_{n+1}| > 2|\lambda_n|$ и при этом $P(\{\lambda_n\}) = P(\Lambda)$. Она имеет нулевую линейную плотность, а целая функция $G_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{\lambda_n})$ имеет минимальный тип при порядке роста 1.

Пусть M_{G_1} – это оператор свертки в $H(D)$, порождаемый G_1. Результаты А. Ф. Леонтьева [10] (а также можно воспользоваться результатами О. А. Кривошеевой и А. С. Кривошеева [11–13]) позволяют доказать замкнутость подпространства $\Sigma(\{\lambda_n\}, D)$, откуда следует, что $KerM_{G_1} = \Sigma(\{\lambda_n\}, D)$, это равенство есть фундаментальный принцип для M_{G_1}. Итак, для изучения разрешимости указанной задачи интерполяции суммами рядов экспонент достаточно изучить существование представления вида $H(D) = KerM_{G_1} + (\psi_M)$, так как $KerM_{G_1} = \Sigma(\{\lambda_n\}, D) \subset \Sigma(\Lambda, D)$.

В работе [7] найдено необходимое и достаточное условие на множество Λ для разрешимости задачи интерполяции суммами абсолютно сходящихся рядов экспонент во всех выпуклых областях и произвольных узлов интерполяции в этих областях.

Теорема 1. *Условие $P(\Lambda) = \mathbb{S}$ – это необходимое и достаточное условие на множество Λ для разрешимости задачи интерполяции суммами рядов экспонент из $\Sigma(\Lambda, D)$ во всех выпуклых областях и для произвольных множеств узлов интерполяции, дискретных в каждой рассматриваемой области.*

Сформулируем теперь задачу кратной интерполяции элементами инвариантных подпространств. Рассмотрим бесконечное неограниченное множество показателей $\{\lambda_n\}, n \in \mathbb{N}$ и множество кратностей $\{l_n\}$, имеющее конечную плотность с учетом кратностей, тогда система экспонент $\{z^j e^{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, l_n - 1\}$ неполна в $H(\mathbb{C})$. Для произвольной выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ обозначим $W_D = W_{D,\{\lambda_n\}}$ – замыкание линейной оболочки системы $\{z^j e^{\lambda_n}: n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, l_n - 1\}$ в топологии $H(D)$, это есть инвариантное относительно дифференцирования подпространство в H(D). Если W_D совпадает с H(D), то разрешима классическая задача кратной интерполяции голоморфными функциями. Если же W_D есть собственное подпространство, для этой области рассмотрим задачу кратной интерполяции элементами инвариантного подпространства W_D:

для любого множества узлов интерполяции, дискретного в области D, и для любых интерполяционных данных $b_k^j \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m_k - 1$ существует такая функция $U \in W_D$, что $U^{(j)}(\mu_k) = b_k^j, k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m_k - 1$.

Справедлива следующая:

Теорема 2. *Для разрешимости задачи кратной интерполяции элементами из W_D для всех выпуклых областей D и для произвольных множеств узлов интерполяции, дискретных в каждой рассматриваемой области, необходимо и достаточно, чтобы множество показателей экспонент удовлетворяло условию* $P(\{\lambda_n\}) = \mathbb{S}$.

Опишем основные этапы доказательства теоремы 2.

Достаточность условия на множество показателей. Как описано выше, произвольным образом выберем разреженную последовательность показателей и докажем существование представления $H(D) = KerM_{G_1} + (\psi_M)$. Для этого достаточно доказать, что сумма подпространств в правой части есть 1) замкнутое и 2) всюду плотное подпространство. Далее, как и в работе [7], используется стандартная двойственность, порождаемая преобразованием Лапласа, определяемым на пространстве $H^*(D)$ всех линейных непрерывных функционалов на $H(D)$, которое осуществляет топологический изоморфизм пространства $H^*(D)$ с сильной топологией и пространства P_D всех целых функций экспоненциального типа с обычной топологией индуктивного предела нормированных пространств. Доказываются два двойственных утверждения, которые эквивалентны утверждениям 1) и 2) выше, с использованием изучения поведения последовательностей сужений на множество $\{\lambda_n\}$ квазиполиномов, т. е. линейных комбинаций мономов $z^j e^{\mu_k z}, k \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m_n - 1$.

Необходимость условия. Пусть $D = B_r$ – открытый круг радиуса r с центром в нуле, по условию в B_r разрешима задача простой интерполяции (все кратности $m_k = 1$) и для любых данных интерполяции $b_k \in \mathbb{C}$ существует $U \in W_{D}, U(\mu_k) = b_k$. $P(\{\lambda_n\})$ есть замкнутое множество, поэтому, если условие $P(\{\lambda_n\}) = \mathbb{S}$ на множество показателей не выполнено, существует открытая дуга (a, b) на окружности $\mathbb{S}$ из дополнения множества

$\mathrm{P}(\{\lambda_n\})$. Далее, согласно эффекту принудительного аналитического продолжения [14–17], все функции $U \in W_D$ аналитически продолжаются в большую область

$$\{z \in \mathbb{C}: Re(ze^{it}) < r, \forall e^{it} \in \mathrm{P}(\{\lambda_n\})\}.$$

Эта область есть $\mathrm{P}(\{\lambda_n\})$ – выпуклая оболочка круга B_r, она содержит открытую дугу границы B_r (это есть комплексное сопряжение дуги (ra, rb)). В частности, все $U \in W_D$ ограничены в окрестности любой точки этой дуги. Это противоречит разрешимости простой интерполяции для любого множества узлов, имеющего предельную точку на этой дуге с неограниченными данными b_k. Необходимость условия теоремы доказана.

Заключение

С учетом того, что нами доказана как достаточность, так и необходимость найденного условия, можно получить ряд утверждений, ослабляющих те или иные требования в рассматриваемой ранее задаче интерполяции.

Утверждение 1. С*формулированные в теореме 2 задачи простой и кратной интерполяции эквивалентны.*

Пусть разрешима задача простой интерполяции. Тогда выше доказано, что выполнено необходимое условие, но оно является и достаточным для разрешимости задачи кратной интерполяции. А из разрешимости кратной интерполяции следует простая интерполяция.

Утверждение 2. *Разрешимость задачи интерполяции элементами из W_D для всех выпуклых областей D и для произвольных множеств узлов интерполяции $\{\mu_k\}$, дискретных в каждой рассматриваемой области, равносильна разрешимости такой задачи для конкретной гладкой области, например для круга B_r, и произвольных дискретных множеств узлов в этой области.*

Если решена задача интерполяции для конкретной гладкой области (в доказательстве необходимости, не меняя рассуждений, можно всего лишь предполагать, что эта область не имеет угловых точек), то выполнено необходимое условие, которое, как показано выше, является и достаточным для решения задачи в произвольных областях.

Утверждение 3. *Разрешимость задачи интерполяции элементами из W_D для всех выпуклых областей D и для произвольных множеств узлов интерполяции $\{\mu_k\}$, дискретных в каждой рассматриваемой области, равносильна разрешимости такой задачи для конкретной гладкой области, например для круга B_r и всего лишь одного дискретного множества узлов $\{\mu_k\}$, у которого предельные точки всюду плотны на границе этой области.*

Доказательство необходимости условия легко адаптируется к данной ситуации.

Утверждение 4. *Разрешимость задачи простой интерполяции элементами из W_D для всех выпуклых областей D и для произвольных множеств узлов интерполяции $\{\mu_k\}$, дискретных в каждой рассматриваемой области, равносильна разрешимости задачи нестрогой интерполяции: для некоторой заданной ограниченной последовательности $\beta_k > 0$, для произвольных дискретных множеств узлов и для произвольных данных интерполяции* $b_k \in \mathbb{C}$ существует $U \in W_{D,}$ $|U(\mu_k) - b_k| < \beta_k$.

Доказательство проводится аналогично предыдущим утверждениям. Аналогичный результат можно сформулировать и в случае наличия кратностей $m_k > 1$.

Утверждение 5. *В предыдущей формулировке задачу нестрогой интерполяции можно заменить на задачу аппроксимации интерполяционных данных: для произвольной ограниченной последовательности $\beta_k > 0$, для произвольных дискретных множеств узлов $\{\mu_k\}$ и для произвольных данных интерполяции* $b_k \in \mathbb{C}$ существует $U \in W_{D,}$ $|U(\mu_k) - b_k| < \beta_k$.

Доказательство проводится аналогично предыдущим утверждениям. Аналогичный результат можно сформулировать и в случае наличия кратностей $m_k > 1$.

Утверждение 6. *Разрешимость задачи простой (а также и кратной) интерполяции элементами из W_D для всех выпуклых областей D и для произвольных множеств узлов интерполяции $\{\mu_k\}$, дискретных в каждой рассматриваемой области, равносильна разрешимости как задачи нестрогой интерполяции, так и задачи аппроксимации интерполяционных данных для некоторой заданной гладкой ограниченной области и всего лишь одного дискретного множества узлов, у которого предельные точки всюду плотны на границе этой области.* Доказательство проводится аналогично предыдущим утверждениям.

Отметим также, что разрешимость интерполяционной задачи позволяет доказать существование ряда экспонент с разреженными показателями, у которого сумма и ее производные обладают экзотическим предельным поведением у границы области. Например, выберем дискретную последовательность узлов интерполяции $\{\mu_k\}$, имеющую всюду плотное множество предельных точек на границе области. Выбирая различными способами кратности m_k узлов и интерполяционные данные $b_k \in \mathbb{C}$ с требуемыми нам свойствами, из разрешимости соответствующей интерполяционной задачи получаем существование рядов экспонент, у которых суммы и любые их производные имеют любые заданные (включая и бесконечные) предельные значения на всюду плотном подмножестве границы области. Аналогично можно получить и существование элементов инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, с такими же свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Напалков В. В., Попенов С. В. Голоморфная задача Коши для оператора свертки в аналитически равномерных пространствах и разложения Фишера // Докл. РАН. 2001. Т. 381. №2. С. 164–166.
2. Напалков В. В., Нуятов А. А. Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки // Матем. сб. 2012. Т. 203. №2. С. 77–86.
3. Мерзляков С. Г., Попенов С. В. Кратная интерполяция рядами экспонент в H(C) с узлами на вещественной оси // Уфимск. матем. журн. 2013. Т. 5. №3. С. 130–143.
4. Напалков В. В., Нуятов А. А. Многоточечная задача Валле-Пуссена для операторов свертки с узлами, заданными в угле // Теор. мат. физ. 2014. Т. 180. №2. С. 264–271.
5. Напалков В. В., Зименс К. Р. Кратная задача Валле-Пуссена на выпуклых областях в ядре оператора свертки // Доклады РАН. 2014. Т. 458. №4. С. 387–389.
6. Мерзляков С. Г. Попенов С. В. Интерполяция рядами экспонент в H(D), с вещественными узлами // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7. №1. С. 46–58.
7. Мерзляков С. Г., Попенов С. В. Множество показателей для интерполяции суммами рядов экспонент во всех выпуклых областях // Дифференциальные уравнения. Математический анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. 2017. Т. 143. С. 48–62.
8. Мерзляков С. Г., Попенов С. В. Интерполяция суммами рядов экспонент с показателями, сгущающимися в одном направлении // Комплексный анализ. Математическая физика. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. ВИНИТИ РАН. 2019. Т. 162. С. 62–79.
9. Мерзляков С. Г., Попенов С. В. Интерполяция суммами рядов экспонент и глобальная задача Коши для операторов свертки // Доклады РАН. Математика. 2019. Т. 485. №2. С. 149–152.
10. Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука. 1980. 384 с.
11. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях. Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68. №2. С. 71–136.
12. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. Замкнутость множества сумм рядов Дирихле // Уфим. мат. ж. 2013. Т. 5. №3. С. 96–120.
13. Кривошеева О. А., Кривошеев А. С. Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости // Функц. анал. прилож. 2012. Т. 46. №4. С. 14–30.
14. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). №1(5). С. 3–30.
15. Кривошеев А. С. Критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости // Изв. РАН. 2004. Сер. матем. Т. 68. №.1. С. 43–78.
16. Кривошеева О. А. Область сходимости рядов экспоненциальных мономов // Уфим. мат. ж. 2011. Т. 3. №2. С. 43–56.
17. Кривошеева О. А. Область сходимости рядов экспоненциальных многочленов // Уфим. мат. ж. 2013. Т. 5. №4. С. 84–90.

Поступила в редакцию 04.03.2024 г.

DOI: 10.33184/bulletin-bsu-2024.1.1

ON INTERPOLATION PROBLEM BY SUMS OF EXPONENTIALS SERIES

© S. V. Popenov

Institute of mathematics with computing center, Ufa Federal Research Centre of RAS
112 Chernishevsky St., 450000 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Phone: +7 (917) 754 56 59.
Email: s_popenov@mail.ru

We formulate and study interpolation problems with infinite discrete sets of nodes in a convex domain by exponentials series which exponents are in a given unbounded set as well as by elements of subspaces that are invariant under differentiation in the space of holomorphic functions in a given convex domain or in all convex domains and with arbitrary interpolation nodes sets that are discrete in the domains. In the proofs, we use the well-known effect of forced analytic continuation of function used for interpolation. A condition on the set of exponents is obtained that is necessary and sufficient for resolvability of interpolation problem by elements of invariant subspaces that are generated by the exponents in all convex domains and with arbitrary interpolation nodes sets that are discrete in the domains. Oт the basis of this test it is proved that the interpolation problem may by reduced to some equivalent problems e.g. to the problem of approximation of interpolation data by values of sums of exponentials series in the interpolation nodes. The existence of sums of exponentials series and functions in invariant subspaces that have complicated behavior near the boundary is proved.

Keywords: Holomorphic function, interpolation, sum of exponentials series, invariant subspace.

Received 04.03.2024.